Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
им. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Белов Иван Романович

АНИЗОТРОПИЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ШУМАМИ

Специальность 05.13.01 — Системный анализ, управление и обработка информации (в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем управления имени В.А. Трапезникова Российской академии наук (ИПУ РАН).

Научный руководитель:	**Кустов Аркадий Юрьевич**, кандидат физико-математических наук.
Официальные оппоненты:	**Пакшин Павел Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор по кафедре общетехнических дисциплин, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева.
	Деревянкин Алексей Викторович, кандидат физико-математических наук, ведущий инженер в ООО "КС Кадровый Консалтинг".
Ведущая организация:	Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана

Защита состоится "28" октября 2021 г. в 14-00 часов на заседании диссертационного совета Д002.226.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем управления имени В.А. Трапезникова Российской академии наук по адресу: Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПУ РАН и на сайте www.ipu.ru.

Автореферат разослан "__"________ 20__ года.

Ученый секретарь Диссертационного совета Д002.226.02 / Мусатова Е.Г.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Задача оценивания состояния или выходного сигнала системы на основании доступных измерений является одной из фундаментальных задач теории управления. Технические системы чаще всего имеют достаточно сложную структуру, и поэтому точно измерить все их параметры не представляется возможным. Измерения параметров объекта чаще всего содержат в себе случайные шумы, которые могут сильно влиять на конечное значение измеряемой величины и динамику системы в целом. Поэтому возникает необходимость в построении оптимальных с точки зрения некоторого критерия оценок состояния или определенных параметров системы.

При постановке задачи фильтрации для исследуемого объекта вводится некоторый критерий эффективности искомого оценивателя, который чаще всего представляется в форме квадратичного функционала от ошибки оценивания. Достаточно известными методами решения задач фильтрации для линейных систем являются методы $\mathcal{H}_2$-теории и $\mathcal{H}_\infty$-теории. Однако у $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-фильтров есть свои недостатки: к примеру, отсутствие робастности у $\mathcal{H}_2$-фильтра и консервативность $\mathcal{H}_\infty$-фильтра. В 90-е годы с целью обобщения $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-теорий была предложена анизотропийная теория управления и фильтрации. Изложению основ анизотропийной теории, решениям задач анизотропийного анализа и синтеза посвящены работы И.Г. Владимирова, А.П. Курдюкова, А.В. Семенова, Ф. Даймонда, П. Клоедена, М.М. Чайковского, В.Н. Тимина, Е.А. Максимова, А.Ю. Кустова, А.В. Юрченкова и многих других.

Методы анизотропийной теории нашли свое применение во многих задачах синтеза регуляторов и фильтров для разных видов линейных систем с детерминированными (неслучайными) матрицами. Однако параметры многих объектов и процессов могут меняться во времени случайным образом. Решение задач анализа и синтеза для стохастических систем в общей постановке является довольно трудоемким, поэтому чаще всего рассматриваются частные случаи задач, связанные с упрощенными постановками. К таким частным случаям относятся системы с мультипликативными шумами. Подобные системы имеют достаточно широкую область практического применения. К примеру, решению задач анализа и синтеза для примеров систем с мультипликативными шумами в финансовой, биологической и других сферах жизнедеятельности посвящены работы И. Яеша, А. Стоицы, Э. Гершона, Е. Тодорова и других. К такого рода системам относятся и системы со случайными сбоями в датчиках. Они чаще всего описывают поведение объектов, в которых измерения параметров объекта становятся неполными в момент отказа и потому необходимо построение фильтра, дающего оптимальную оценку состояния данной системы с учетом возможных сбоев.

Вследствие большого научного интереса к системам с мультипликативными шумами уже существует целый ряд работ на темы задач робастного и линейно-квадратичного управлений, оценивания состояния или выхода системы, и многие другие. Однако, до сих пор существует множество нерешенных задач управления и фильтрации для подобных систем. Одной из них является задача субоптимальной анизотропийной фильтрации, решение которой является основной целью данной диссертационной работы.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования диссертационной работы является линейная дискретная нестационарная система с мультипликативными шумами на конечном интервале времени. На вход системы подается возмущение в виде последовательности случайных векторов, описываемой вектором с ограниченной сверху анизотропией. Выходами системы являются измерения ее параметров (измеряемый выход) и интересующие исследователя параметры системы или связанная с ней величина (оцениваемый выход). Предметом исследования является построение субоптимальной оценки на основе значений измеряемого выхода системы для ее оцениваемого выхода. Критерием оценивания является условие ограниченности анизотропийной нормы соответствующей системы в ошибках оценивания заданной величиной.

Цели и задачи

Целью работы является разработка методов анизотропийного анализа и синтеза субоптимальных анизотропийных фильтров для линейных дискретных нестационарных систем с мультипликативными шумами на конечном интервале времени. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Разработать метод вычисления в пространстве состояний анизотропийной нормы линейной дискретной нестационарной системы с мультипликативными шумами на конечном интервале времени.

2. Сформулировать условия ограниченности анизотропийной нормы для систем с мультипликативными шумами.

3. Разработать метод синтеза субоптимального анизотропий-

ного фильтра (оценивателя) для систем в мультипликативными шумами при различных конфигурациях фильтра.

4. Разработать метод синтеза субоптимального анизотропийного фильтра для систем со случайными сбоями в датчиках.

5. Продемонстрировать эффективность разработанных методов анализа и синтеза на численном примере.

Область исследования

Данная диссертационная работа соответствует специальности 05.13.01 “Системный анализ, управление и обработка информации (в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)” по следующим пунктам:

1. Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации;

2. Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации;

3. Разработка специального математического и алгоритмического обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации;

Методы исследования

В диссертационной работе применяются математические методы теории фильтрации, линейной алгебры, ковариационного анализа, функционального анализа, вариационного исчисления, теории функций комплексной переменной и теории вероятности.

Используются конгруэнтные преобразования, методы перехода от уравнений Риккати к соответствующим неравенствам, лемма Шура для перехода к линейным матричным неравенствам и численные методы решения ЛМН для реализации методов решения поставленных задач. При реализации метода синтеза субоптимального анизотропийного регулятора используется среда MATLAB и пакет YALMIP.

Научная новизна

1. Впервые получено решение задачи анизотропийного анализа для линейных дискретных нестационарных систем с мультипликативными шумами и центрированным внешним возмущением на конечном интервале времени в виде формулы вычисления анизотропийной нормы в пространстве состояний.

2. Предложена процедура анизотропийного анализа для систем с мультипликативными шумами, которая заключается в формулировке условий ограниченности сверху анизотропийной нормы системы заданным неотрицательным числом. В отличие от известных результатов, данная процедура выгодно отличается меньшей консервативностью и большой точностью.

3. Впервые представлен алгоритм синтеза субоптимального анизотропийного фильтра для систем с мультипликативными шумами как решения системы линейных матричных неравенств в терминах матриц системы и фильтра.

Теоретическая и практическая значимость работы

Методы анизотропийной теории позволяют решать задачи робастного управления и фильтрации для различных систем с нестандартными параметрами входных возмущений. Поскольку системы с мультипликативными шумами хорошо аппроксимируют многие технические системы с меняющимися случайным образом параметрами и внешними шумами, решение задач анизотропийного анализа и анизотропийной фильтрации для подобных систем имеет большое теоретическое значение.

Представленные в диссертации результаты имеют и практическое значение. Приведенный алгоритм синтеза оценивателя для систем со случайными сбоями в датчиках может использоваться при решении многих технических задач, поскольку с помощью суперпозиции рассмотренной системы со случайными сбоями в датчиках можно описывать многие более сложные объекты.

Основные результаты, выносимые на защиту

1. Метод вычисления в пространстве состояний анизотропийной нормы линейной дискретной нестационарной системы с мультипликативными шумами на конечном интервале времени.

2. Условия ограниченности анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами.

3. Метод синтеза субоптимального анизотропийного фильтра (оценивателя) для систем в мультипликативными шумами в общей и частной постановках.

4. Метод синтеза субоптимального анизотропийного фильтра

для систем со случайными сбоями в датчиках с его дальнейшей реализацией в численном примере.

Степень обоснованности и достоверности полученных результатов

Представленные в работе результаты решения поставленных задач анализа и синтеза являются достоверными и обоснованными по причине использования строгого математического аппарата. В качестве подтверждения в работе продемонстрированы результаты компьютерного моделирования предложенных методов решения задач.

Реализация и внедрение результатов исследования

Предложенный метод синтеза субоптимального анизотропийного фильтра для систем со случайными сбоями в датчиках реализован в численной форме для модели продольного движения самолета Ту-154 по глиссаде, имеющей вид линейной дискретной нестационарной системы на конечном интервале времени. Результаты представлены в виде наборов матриц искомого фильтра и в виде графиков ошибок оценивания переменных системы. Для численного решения задачи и моделирования использовались среда MATLAB и пакет YALMIP.

Апробация результатов

По тематике диссертационной работы были сделаны доклады на следующих российских и международных конференциях: XXI конференция молодых ученых «Навигация и управление движением» с международным участием (19-22 марта 2019 года); 13-е Всероссийское совещание по проблемам управления (XIII ВСПУ

2019); 27th Mediterranean Conference on Control Automation (MED-2019); XV Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого 2020 года); 28th Mediterranean Conference on Control & Automation (MED-2020); 21st International Carpathian Control Conference (ICCC-2020).

Также основные положения диссертации докладывались и обсуждались на докладах научных семинаров в Институте проблем управления имени В.А. Трапезникова; Московском Авиационном Институте (МАИ) и Московском Государственном Техническом Университете имени Н.Э. Баумана (МГТУ им. Н.Э. Баумана).

Публикации

По теме диссертации всего опубликовано 8 работ, в том числе 2 статьи в рецензируемых научных изданиях из списка RSCI, 3 публикации в рецензируемых трудах конференций из перечня Web of Science/Scopus, 3 работы в сборниках трудов и тезисов конференций.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 135 страницах,содержит 4 таблицы и 22 иллюстрации. Библиография содержит 82 наименования.

Содержание работы

Во **введении** представлено обоснование актуальности темы диссертационной работы и ее научная ценность. Кроме того, представлен краткий обзор публикаций по теме классических задач фильтрации и методов их решения, анизотропийной теории и ее применения для решения задач управления и фильтрации, а также статей, посвященных рассмотрению систем с мультипликативными шумами и решению соответствующих им задач оптимальной и субоптимальной фильтрации. В конце раздела описаны структура диссертации и ее общая характеристика.

В **первой главе** диссертационной работы изложены необходимые теоретические положения и результаты, на базе которых были получены основные результаты данной работы. В первом подразделе представлены такие базовые определения, как линейная дискретная нестационарная система с ее реализацией в пространстве состояний, вход-выходные соотношения системы, среднеквадратичный коэффициент усиления, а также аналоги 2- и ∞-норм для подобных систем. Для общего понимания результатов работы далее приведены необходимые определения.

Линейная дискретная нестационарная система на конечном интервале времени $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$ имеет представление в пространстве состояний

$$T_{zw} \sim \left\{ \begin{array}{rcl} x(k+1) & = & A(k)x(k) + B(k)w(k), \\ z(k) & = & C(k)x(k) + D(k)w(k) \end{array} \right. \tag{1}$$

с n_x-мерным вектором состояния $x(k)$ и начальным состоянием $x(0) = 0$; m_w-мерным вектором входного возмущения $w(k)$; p_z-мерным вектором выхода $z(k)$; и случайными матричными функциями времени $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$, $D(k)$ соответствующих размерностей.

Система T_{zw} также может быть описана с помощью вход-выходного соотношения $Z_{0:N} = F_{0:N}W_{0:N}$, где $Z_{0:N}$ — вектор-столбец значений выходного сигнала $z(k) \in \mathbb{L}_2^{p_z}$, $W_{0:N}$ — вектор значений входного сигнала $w(k) \in \mathbb{L}_2^{m_w}$. Далее используются обозначения $l_w = \dim(W_{0:N}) = m_w(N+1)$, $l_z = \dim(Z_{0:N}) = p_z(N+1)$.

Матрица $F_{0:N}$ представляет собой блочную нижнетреугольную случайную матрицу $F_{0:N} = \underset{0\leqslant k,\kappa\leqslant N}{\text{block}}(f(k,\kappa))$ размерности $l_z \times l_w$. Поскольку матрица $F_{0:N}$ полностью характеризует систему T_{zw} на интервале времени $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$, нормы системы будут отождествляться с соответствующими нормами матрицы $F_{0:N}$. Аналогом 2-нормы линейной дискретной нестационарной системы T_{zw} является фробениусова норма матрицы $F_{0:N}$, которая определяется выражением

$$\|T_{zw}\|_2 = \sqrt{\operatorname{tr}(\mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}])}.$$

Также для системы T_{zw} существует аналог ∞-нормы в виде аналога максимального сингулярного числа $F_{0:N}$:

$$\|T_{zw}\|_\infty = \sigma_{\max}(F_{0:N}) = \max_i \sqrt{\lambda_i(\mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}])}.$$

Качество работы системы T_{zw} может быть описано с помощью среднеквадратичного коэффициента усиления (СКУ), который определяется выражением

$$\mathbf{Q}(F_{0:N}, W_{0:N}) = \frac{\|Z_{0:N}\|_2}{\|W_{0:N}\|_2},$$

где $\|Z_{0:N}\|_2 = \sqrt{\mathbf{E}[Z_{0:N}^\top Z_{0:N}]}$, $\|W_{0:N}\|_2 = \sqrt{\mathbf{E}[W_{0:N}^\top W_{0:N}]}$ — нормы случайных векторов в пространствах $\mathbb{L}_2$ соответствующих размерностей. В общем случае $W_{0:N}$ может быть любым вектором из множества интегрируемых с квадратом случайных векторов. Однако, свойства входных возмущений $W_{0:N}$ могут быть более специфическими. Об этом рассказано подробнее во втором подразделе первой главы диссертации.

В третьем подразделе изложены основные положения анизотропийной теории, которые используются при решении поставленных задач. Одним из них является анизотропия случайного вектора $\mathbf{A}(W)$, являющаяся мерой отклонения распределения данного вектора от класса нормальных распределений с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей. Далее по тексту диссертации предполагается, что входное возмущение системы (1) принадлежит множеству случайных векторов с анизотропией, ограниченной сверху заданной величиной $a \geqslant 0$, т.е.

$$W_{0:N} \in \mathbb{W}_a = \{W \in \mathbb{L}_2^{l_w} : \ \mathbf{A}(W) \leqslant a\}. \tag{2}$$

Анизотропийной нормой системы T_{zw} с передаточной матрицей $F_{0:N}$ и заданным уровнем анизотропии $a \geqslant 0$ называется неотрицательная величина следующего вида:

$$|\!|\!| T_{zw} |\!|\!|_a = \sup_{W_{0:N} \in \mathbb{W}_a} \mathbf{Q}(F_{0:N}, W_{0:N}). \tag{3}$$

Анизотропийная норма является мерой чувствительности системы к внешним возмущениям с ограниченной сверху анизотропией. При равенстве a нулю анизотропийная норма равна масштабированной 2-норме системы, а при $a \to \infty$ анизотропийная норма стремится к ∞-норме, т.е.

$$\frac{\|T_{zw}\|_2}{\sqrt{l_w}} = |\!|\!| T_{zw} |\!|\!|_0 \leqslant |\!|\!| T_{zw} |\!|\!|_a < \lim_{a \to \infty} |\!|\!| T_{zw} |\!|\!|_a = \|T_{zw}\|_\infty. \tag{4}$$

В четвертом подразделе приведено описание систем с мультипликативными шумами. Представление таких систем в пространстве состояний на интервале $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$ имеет вид (1), где матрицы системы $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$, $D(k)$ являются случайными матрицами специального вида

$$X(k) = X_0(k) + \sum_{i=1}^{M} \xi_{ji}(k) X_i(k),\ X \in \{A, B, C, D\}.$$

где $A_i(k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B_i(k) \in \mathbb{R}^{n_x \times m_w}$, $C_i(k) \in \mathbb{R}^{p_z \times n_x}$, $D_i(k) \in \mathbb{R}^{p_z \times m_w}$. Величины $\xi_{ji}(k) \in \mathbb{L}_2^1$ при всех $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$, $i \in \{1, 2, \ldots, M\}$ и $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ являются независимыми в совокупности по индексам i, j, k скалярными случайными величинами с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Также стоит отметить, что в любые моменты времени $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$ и $t \in \{0, 1, \ldots, N\}$ случайные величины $\xi_{ji}(k)$ и входное случайное возмущение $w(t)$ предполагаются независимыми друг от друга.

Вторая глава посвящена задачам анизотропийного анализа для систем с мультипликативными шумами: выводу формулы анизотропийной нормы системы в пространстве состояний и получению условий ограниченности анизотропийной нормы сверху заданным числом. В первом подразделе представлены формулировки этих двух задач. Во втором подразделе приведена теорема о вычислении анизотропийной нормы в пространстве состояний.

Теорема 1. *Дана линейная дискретная нестационарная система T_{zw} вида (1) на конечном интервале $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$ с передаточной матрицей $F_{0:N}$ и задано максимальное значение анизотропии $a \geqslant 0$ входного сигнала. Тогда a-анизотропийная норма системы T_{zw} вычисляется по формуле $\|T_{zw}\|_a = \mathcal{N}(\mathcal{A}^{-1}(a))$, где $\mathcal{A}^{-1}(a)$ соответствует значению $q \in [0; \|T_{zw}\|_\infty^{-2})$, такому, что*

$\mathcal{A}(q) = a$. Функции $\mathcal{N}(q)$ и $\mathcal{A}(q)$ определены следующим образом:

$$\mathcal{N}(q) = \sqrt{\frac{\Phi(q) - 1}{q\Phi(q)}}, \quad \mathcal{A}(q) = \frac{l_w}{2}\left(\ln\Phi(q) - \Psi(q)\right),$$

где функции $\Phi(q)$ и $\Psi(q)$ имеют вид

$$\Phi(q) = \frac{1}{l_w}\sum_{k=0}^{N} \mathrm{tr}\Big(S(k) + L(k)\Upsilon(k)L^\top(k)\Big),$$
$$\Psi(q) = \frac{1}{l_w}\sum_{k=0}^{N} \ln\det S(k).$$

Матрицы $S(k)$ и $L(k)$ определены в терминах решения разностных уравнений Риккати в обратном времени

$$R_1(k) = \sum_{i=0}^{M}\Big(A_i^\top(k)R_1(k+1)A_i(k) + qC_i^\top(k)C_i(k)\Big), \tag{6}$$
$$R_2(k) = A_0^\top(k)R_2(k+1)A_0(k) + L^\top(k)S^{-1}(k)L(k), \tag{7}$$
$$\begin{aligned} S(k) = {} & (I_{m_w} - \sum_{i=0}^{M}\Big(qD_i^\top(k)D_i(k) + B_i^\top(k)R_1(k+1)B_i(k)\Big) \\ & -B_0^\top(k)R_2(k+1)B_0(k)\Big)^{-1}, \end{aligned} \tag{8}$$
$$\begin{aligned} L(k) = {} & S(k)\Big(qD_0^\top(k)C_0(k) + B_0^\top(k)R_1(k+1)A_0(k) \\ & + B_0^\top(k)R_2(k+1)A_0(k)\Big). \end{aligned} \tag{9}$$

с граничными условиями $R_1(N+1) = 0$, $R_2(N+1) = 0$. Матрицы $\Upsilon(k)$ удовлетворяют рекуррентной формуле

$$\begin{aligned} \Upsilon(k+1) = {} & (A_0^\top(k) + L^\top(k)B_0^\top(k))\Upsilon(k)(A_0^\top(k) + L^\top(k)B_0^\top(k))^\top \\ & + B_0(k)S(k)B_0^\top(k). \end{aligned} \tag{10}$$

Для уравнения (10) *определено начальное условие* $\Upsilon(0) = 0$.

Для доказательства теоремы используются критерий изометричности и формула ковариационной матрицы наихудшего входного возмущения системы. Далее в диссертации представлен вывод условий ограниченности анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами. Эти условия представлены в двух вариациях: в терминах уравнения Риккати и в терминах неравенства Риккати. Формулировка теоремы об условиях ограниченности в терминах неравенств Риккати приведена ниже.

Теорема 2. *Дана линейная дискретная нестационарная система* T_{zw} *вида* (1) *с мультипликативными шумами на конечном интервале времени* $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$. *Также заданы скалярные величины* $a \geqslant 0$ *и* $\gamma \geqslant 0$. *Анизотропийная норма системы удовлетворяет условию* $\|T_{zw}\|_a \leqslant \gamma$, *если существуют число* $q \in [0; ||T_{zw}||_\infty^{-2})$ *и семейство матриц* $\mathcal{R}(k) \succ 0$, *которые удовлетворяют неравенству Риккати в обратном времени*

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(k) &\succ A_0^\top(k)\mathcal{R}(k+1)A_0(k) + \sum_{i=1}^{M} A_i^\top(k)\mathcal{R}(k+1)A_i(k) \\ &\quad + q\sum_{i=0}^{M} C_i^\top(k)C_i(k) + \mathcal{L}^\top(k)\mathcal{S}^{-1}(k)\mathcal{L}(k),\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(k) &= \left(I_{m_w} - q\sum_{i=0}^{M}\left(D_i^\top(k)D_i(k) + B_i^\top(k)\mathcal{R}(k+1)B_i(k)\right)\right)^{-1}, \\ \mathcal{L}(k) &= \mathcal{S}(k)\left(B_0^\top(k)\mathcal{R}(k+1)A_0(k) + qD_0^\top(k)C_0(k)\right).\end{aligned}$$

Матрицы $\mathcal{S}(k)$ *являются положительно определенными мат-*

рицами и удовлетворяют неравенству специального вида

$$\sum_{k=0}^{N} \ln\det \mathcal{S}^{-1}(k) \geqslant 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2).$$

Для неравенства (11) *определено граничное условие* $\mathcal{R}(N+1) = 0$.

В **третьей главе** диссертации изложен подход к решению задачи субоптимальной анизотропийной фильтрации для систем с мультипликативными шумами в общей постановке. Задача заключается в поиске фильтра $T_{\hat{z}w}$ с представлением в пространстве состояний

$$T_{\hat{z}w} \sim \begin{cases} \hat{x}(k+1) &= W(k)\hat{x}(k) + H(k)(y(k) - \Gamma(k)\hat{x}(k)), \\ \hat{z}(k) &= F(k)\hat{x}(k) + G(k)(y(k) - \Gamma(k)\hat{x}(k)), \end{cases} \qquad (12)$$

на интервале $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$ с начальным состоянием $\hat{x}(0) = 0$ такого, что для системы в ошибках оценивания $T_{\tilde{z}w}$, где $\tilde{z}(k) = z(k) - \hat{z}(k)$, при заданных значениях параметров $a \geqslant 0$ и $\gamma \geqslant 0$ выполняется условие $|||T_{\tilde{z}w}|||_a \leqslant \gamma$. В системе (12) $\hat{x}(k)$ — вектор оценки состояния $x(k)$, $\hat{z}(k)$ — вектор оценки выхода $z(k)$. Матрица $\Gamma(k)$ выбирается исследователем перед началом решения поставленной задачи и отражает априорную информацию о векторе измерений $y(k)$. Для исходной системы (1) и фильтра (12) система в ошибках фильтрации $T_{\tilde{z}w}$ имеет вид

$$T_{\tilde{z}w} \sim \begin{cases} \overline{x}(k+1) &= \mathcal{A}(k)\overline{x}(k) + \mathcal{B}(k)w(k), \\ \tilde{z}(k) &= \mathcal{C}(k)\overline{x}(k) + \mathcal{D}(k)w(k), \end{cases} \qquad (13)$$

где $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ — ошибка оценивания состояния; $\overline{x}(k) = [x^\top(k)\ e^\top(k)]^\top$ — расширенный вектор состояния. Матрицы $\mathcal{A}(k)$, $\mathcal{B}(k)$, $\mathcal{C}(k)$, $\mathcal{D}(k)$ определяются следующим образом:

$$\mathcal{A}(k) = \begin{bmatrix} A(k) & 0 \\ A(k) - X(k) - H(k)C_y(k) & X(k) \end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(k) &= \begin{bmatrix} B(k) \\ B(k) - H(k)D_y(k) \end{bmatrix}, & (15) \\ \mathcal{C}(k) &= \begin{bmatrix} C_z(k) - Y(k) - G(k)C_y(k) & Y(k) \end{bmatrix}, & (16) \\ \mathcal{D}(k) &= D_z(k) - G(k)D_y(k), & (17) \end{aligned}$$

где $X(k) = W(k) - H(k)\Gamma(k)$, $Y(k) = F(k) - G(k)\Gamma(k)$. Используя изложенные выше в диссертации условия ограниченности анизотропийной нормы к системе (13), получена система неравенств Риккати с неравенством специального вида в терминах матриц системы и искомого фильтра. Далее эти неравенства преобразуются к форме ЛМН. Для этого используются лемма Шура, конгруэнтные преобразования для избавления от нелинейностей в неравенствах и замены переменных $\eta = q^{-1}$, $\overline{\Psi} = \eta\Psi$, $\mathcal{P}(k) = \eta\widehat{\mathcal{R}}(k)$. Для более компактной записи ЛМН введены следующие обозначения:

$$\mathcal{X}_{ex}(k) = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1^\top & \dots & \mathcal{X}_M^\top \end{bmatrix}^\top, \ \mathcal{Y}_{ex}(k) = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_0^\top & \dots & \mathcal{Y}_M^\top \end{bmatrix}^\top,$$

где $\mathcal{X} \in \{\mathcal{A}, \mathcal{C}\}$, $\mathcal{Y} \in \{\mathcal{B}, \mathcal{D}\}$. Также введены вспомогательная функция $\Phi_M(X)$, имеющая вид блочно-диагональной матрицы из M блоков, равных матрице X, и обозначение $\widehat{\mathcal{P}}(k) = \mathcal{P}(k+1)$. Ниже представлена формулировка теоремы об ограниченности анизотропийной нормы.

Теорема 3. *Задана линейная дискретная нестационарная система T_{zw} с мультипликативными шумами на конечном ин-*

тервале времени $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$ *и реализацией в пространстве состояний* (1) *и выбраны вещественные числа* $\gamma \geqslant 0$, $a \geqslant 0$. *Фильтр* $T_{\hat{z}w}$ *с реализацией в пространстве состояний* (12) *гарантирует выполнение неравенства* $|||T_{\tilde{z}w}|||_a \leqslant \gamma$ *для системы в ошибках фильтрации* $T_{\tilde{z}w}$ *с реализацией в пространстве состояний* (13), *если найдутся матрицы* $\mathcal{P}(k) \succ 0$, $W(k)$, $H(k)$, $F(k)$, $G(k)$ *и* $\overline{\Psi}(k)$, *которые при любых* $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(k) & * & * & * & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * & * & * & * \\ \widehat{\mathcal{P}}(k)\mathcal{A}_0(k) & \widehat{\mathcal{P}}(k)\mathcal{B}_0(k) & \widehat{\mathcal{P}}(k) & * & * & * \\ \widehat{\mathcal{P}}(k)\mathcal{A}_{ex}(k) & 0 & 0 & \Phi_M(\widehat{\mathcal{P}}(k)) & * & * \\ \mathcal{C}_0(k) & \mathcal{D}_0(k) & 0 & 0 & I_{p_z} & * \\ \mathcal{C}_{ex}(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p_z M} \end{bmatrix} \succ 0, \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \overline{\Psi}(k) & * & * \\ \widehat{\mathcal{P}}(k)\mathcal{B}_{ex}(k) & \Phi_{M+1}(\widehat{\mathcal{P}}(k)) & * \\ \mathcal{D}_{ex}(k) & 0 & I_{p_z(M+1)} \end{bmatrix} \succ 0, \tag{19}$$

$$\prod_{k=0}^{N} \det \overline{\Psi}(k) \geqslant e^{2a}(\eta - \gamma^2)^{l_w}. \tag{20}$$

При $k = N$ *выполняются неравенства вида*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(N) & * & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * & * \\ \mathcal{C}_0(N) & \mathcal{D}_0(N) & I_{p_z} & * \\ \mathcal{C}_{ex}(N) & 0 & 0 & I_{p_z M} \end{bmatrix} \succ 0, \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \overline{\Psi}(N) & * \\ \mathcal{D}(N) & I_{p_z} \end{bmatrix} \succ 0. \tag{22}$$

В следующих подразделах третьей главы рассмотрены частные случаи задачи субоптимальной анизотропийной фильтрации: фильтр вида (12), удовлетворяющий условиям $H(k) = 0$, $G(k) \neq 0$ и фильтр вида (12), удовлетворяющий условиям $H(k) \neq 0$, $G(k) = 0$. Для каждого из этих случаев сформулированы теоремы об ограниченности анизотропийной нормы системы в ошибках фильтрации в терминах ЛМН.

Четвертая глава диссертационной работы посвящена системам со случайными сбоями в датчиках. Рассматривается объект с системой датчиков, на каждом из которых может случиться сбой с определенной вероятностью. На интервале $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$ система со случайными сбоями в датчиках имеет представление в пространстве состояний вида (1) с измеряемым выходом следующего вида:

$$y(k) \ = \ \lambda(k)C_y(k)x(k) + D_y(k)w(k), \tag{23}$$

где $x(k)$ — вектор состояния системы; $w(k)$ — вектор входных возмущений; $C_y(k) \in \mathbb{R}^{p_y \times n_x}$, $D_y(k) \in \mathbb{R}^{p_y \times m_w}$ — детерминированные матрицы измеряемого выхода системы. Начальным состоянием системы является нулевое положение $x(0) = 0$. Компоненты $\lambda(k)$ являются случайными величинами, распределенными по закону Бернулли с вероятностью успеха (стабильной работы датчика) p. Решение задачи фильтрации для систем со случайными сбоями в датчиках сводится к решению системы линейных матричных неравенств и неравенства специального вида, представленных ниже в виде следующей теоремы.

Теорема 4. *Для системы $T_{\tilde{z}w}$ с мультипликативными шумами в терминах ошибок оценивания выхода системы* (1) *при условии $F(k) = C_z(k)$, выполняется условие $|||T_{\tilde{z}w}|||_a \leqslant \gamma$ для заданных*

$a \geqslant 0$ и $\gamma \geqslant 0$, если существует решение $\mathcal{P}(k) \succ 0, \Psi(k), \mathcal{Y}(k), \eta(k)$ системы линейных матричных неравенств вида

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(k) & * & * & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * & * & * \\ \mathcal{P}\mathcal{A}_0^0(k) + \mathcal{Y}\mathcal{A}_0^1(k) & \mathcal{P}\mathcal{B}_0^0(k) + \mathcal{Y}\mathcal{B}_0^1(k) & \mathcal{P}(k+1) & * & * \\ \sqrt{p(1-p)}\mathcal{Y}\mathcal{A}_1^1(k) & 0 & 0 & \mathcal{P}(k+1) & * \\ \mathcal{C}(k) & \mathcal{D}(k) & 0 & 0 & I_{p_z} \end{bmatrix} \succ 0, \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi(k) & * & * \\ \mathcal{P}\mathcal{B}^0(k) + \mathcal{Y}(k)\mathcal{B}^1(k) & \mathcal{P}(k+1) & * \\ \mathcal{D}(k) & 0 & I_{p_z} \end{bmatrix} \succ 0, \tag{25}$$

при всех $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, матричных неравенств для $\mathcal{P}(N) \succ 0$, $W(N)$, $H(N)$ и $\Psi(N)$ вида

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(N) & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * \\ \mathcal{C}(N) & \mathcal{D}(N) & I_{p_z} \end{bmatrix} \succ 0, \tag{26}$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi(N) & * \\ \mathcal{D}(N) & I_{p_z} \end{bmatrix} \succ 0, \tag{27}$$

и неравенства специального вида

$$\sum_{k=0}^{N} \ln\det\Psi(k) \geqslant 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2). \tag{28}$$

В последнем подразделе четвертой главы представлен численный пример решения задачи субоптимальной анизотропийной фильтрации с использованием представленного в диссертации метода. В качестве примера системы со случайными сбоями выбрана линеаризованная модель продольного движения самолета Ту-154 по глиссаде в режиме посадки. Управление самолетом осуществляется на основе обратной связи по измеряемому выходу, представляющему собой измерения скорости и высоты полета самолета. Известно, что в соответствующих датчиках самолета с определенной вероятностью возможны сбои, поэтому измеряемый выход имеет вид (23). На рассматриваемую систему также оказывают влияние шумы измерений и внешнее воздействие в виде порыва ветра с известным профилем. Было проведено численное решение соответствующей системы ЛМН и неравенства специального вида и моделирование системы с полученным фильтром. Результаты моделирования представлены в работе в виде графиков изменения ошибки фильтрации и значения оцениваемого выхода системы. Также было проведено сравнение качества работы полученного анизотропийного фильтра с аналогичными показателями $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-фильтров. Численное решение и моделирование осуществлены с помощью программного обеспечения MATLAB и библиотек Yalmip, Sedumi.

Выводы

1. Разработан метод вычисления в пространстве состояний анизотропийной нормы для линейных дискретных нестационарных систем с мультипликативными шумами на конечном интервале времени. Проведен сравнительный анализ методов для детерминированного и стохастического случаев.

2. Сформулированы необходимые и достаточные условия ограниченности анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами в терминах разностных уравнений Риккати, а также достаточные условия ограниченности анизотропийной нормы системы в терминах неравенства Риккати.

3. Предложен метод синтеза субоптимального анизотропийного фильтра для линейных дискретных нестационарных систем с мультипликативными шумами на конечном интервале времени. Получены решения задачи субоптимальной анизотропийной фильтрации в зависимости от конфигурации искомого фильтра.

4. Разработан метод синтеза субоптимального анизотропийного фильтра для систем со случайными сбоями в датчиках. Представленный метод заключается в решении системы линейных матричных неравенств в терминах матриц искомого фильтра.

5. Реализовано численное решение задачи субоптимальной анизотропийной фильтрации с использованием полученного метода для линеаризованной модели продольного движения самолета в режиме посадки. Проведен сравнительный анализ синтезированного анизотропийного фильтра с субоптимальными $\mathcal{H}_2$-фильтром и $\mathcal{H}_\infty$-фильтром.

Список публикаций по теме диссертации

Ниже представлен список выступлений и публикаций по теме данной диссертационной работы:

Статьи в журналах/сборниках из списка ВАК

1. И.Р. Белов. Анизотропийная фильтрация для линейных дискретных нестационарных систем с мультипликативными шумами на конечном горизонте.// Автоматика и Телемеханика, 2021. №6. С. 46–79.

2. И.Р. Белов. Анизотропийный анализ линейных дискретных нестационарных систем с мультипликативными шумами // Управление большими системами. Выпуск 91. М.: ИПУ РАН, 2021. С. 38–77.

Публикации Web of Science/Scopus

3. I.R. Belov, A.V. Yurchenkov, A.Yu. Kustov. Anisotropy-Based Bounded Real Lemma for Multiplicative Noise Systems: the Finite Horizon Case.// 27th Mediterranean Conference on Control and Automation. 2019. pp. 148–152.

4. I.R. Belov. Anisotropy-Based Estimation for Linear Discrete Time Varying Finite Horizon Systems with Missing Measurements. // 28th Mediterranean Conference on Control and Automation. France, 2020. pp. 832–837.

5. I.R. Belov. Anisotropy-based Estimation Problem for Linear Discrete Time Varying Systems with Multiplicative Noises: Special Case. // 21st International Carpathian Control Conference (ICCC2020). pp. 1–6.

Публикации в сборниках трудов и тезисов конференций

6. И.Р. Белов. Лемма об ограниченности анизотропийной нормы дискретных нестационарных систем с мультипликативными некоррелированными шумами. // XXI конференция молодых ученых “Навигация и управление движением”. 19–22 марта 2019 г. ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». С. 60–62.

7. И.Р. Белов, А.В. Юрченков. Анизотропийный анализ дискретной нестационарной системы на конечном горизонте с некоррелированными мультипликативными шумами. // XIII Всероссийское совещание по проблемам управления. 17–20 июня 2019 года. ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН. С. 817–822.

8. И.Р. Белов. Синтез анизотропийных оценивателей для линейных дискретных нестационарных стохастических систем специального вида. // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Материалы XV Международной конференции (3–5 июня 2020 г., Москва) / [Ред. В.Н. Тхай]. — М.: ИПУ РАН, 2020. С. 102–105.

Личный вклад

Все представленные в диссертационной работе результаты получены лично автором. В работах [3], [7], выполненных в соавторстве, автор внес значительный вклад в решении задач анизотропийного анализа для систем с мультипликативными шумами, в проведении необходимых преобразований и получении конечного результата в виде достаточных условий ограниченности анизотропийной нормы.

Научное издание

Белов Иван Романович

АНИЗОТРОПИЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ШУМАМИ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт проблем управления имени

В.А. Трапезникова

Российской академии наук

117997

ул. Профсоюзная, д.65

Россия, Москва

www.ipu.ru