Проксимальная гладкость множеств и проекционные алгоритмы

Максим Балашов[1]

[1]Лаборатория 7
Институт проблем управления РАН, Москва

28 января 2019

План

1. Проксимально гладкие множества
2. Мотивация
3. Метрическая проекция точки на множество, устойчивость по точке и множеству
4. Результаты по условию Липшица для метрической проекции (Балашов)
5. Метод проекции градиента (Балашов)

Проксимально гладкие множества (слабо выпуклые множества)

Замкнутое множество $A \subset \mathbb{R}^d$ ($A \subset E$) называется проксимально гладким с константой $R > 0$, если функция расстояния $\varrho_A(x) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|$ непрерывно дифференцируема на множестве

$$U_A(R) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid 0 < \varrho_A(x) < R\}.$$

$$\varrho'_A(x) = \frac{x - P_A x}{\varrho_A(x)}, \qquad \forall x \in U_A(R).$$

Проксимально гладкие множества (слабо выпуклые множества)

Пример 1.
Пусть $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^1$, $g \in C^1$. Множество $S = \{x \mid g(x) = 0\}$ проксимально гладкое с константой R тогда и только тогда, когда непрерывная единичная нормаль к поверхности S удовлетворяет условию Липшица по точке:

$$\|n(x_1) - n(x_2)\| \leq R^{-1}\|x_1 - x_2\|, \qquad \forall x_1, x_2 \in S.$$

При некоторых естественных предположениях $\{x \mid g(x) = 0\}$ также проксимально гладкое для $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$, $g \in C^1$.

Проксимально гладкие множества (слабо выпуклые множества)

Пример 2.
Пусть есть нелинейная управляемая система

$$x' = f(t, x, u),\ x(0) \in X \subset \mathbb{R}^d,\ u \in U(t) \subset \mathbb{R}^m,\ t \geq 0.$$

На небольшом интервале времени множество достижимости системы (при гладкости f) будет проксимально гладким (и в общем случае невыпуклым) множеством.

Проксимально гладкие множества (слабо выпуклые множества). Мотивация

А. Д. Александров, Ю. Г. Решетняк (Матем. сб., 1956, 40(82):3, 381–398), J.-Ph. Vial (Math. of Oper. Res., 8:2 (1983), 231-259), С. Б. Стечкин (множества с чебышевским слоем), М. И. Карлов, А. Р. Алимов (в C(X)), Р. Т. Рокафеллар, Ф. Кларк (проксимальный анализ), Борвейн, Тибо, Воленский, Ледяев, ...
М. В. Балашов, Г. Е. Иванов (связь разных типов выпуклости)

Метрическая проекция точки на множество

Пусть $A \subset \mathbb{R}^d$ выпуклое замкнутое множество, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^d$. Тогда (фольклор)

$$\|P_A x_0 - P_A x_1\| \le \|x_0 - x_1\|.$$

Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^d$ выпуклые замкнутые ограниченные множества из $B_R(0)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Тогда (Daniel, 1976)

$$\|P_A x - P_B x\| \le C\sqrt{h(A,B)}, \quad C = 2\sqrt{2R},$$

$h(A, B)$ — расстояние в метрике Хаусдорфа между множествами A и B.

Условие Липшица для метрической проекции

Пусть $A \subset \mathbb{R}^d$ $(A \subset H)$ выпуклое замкнутое множество, $C \in (0,1)$ и для всех $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^d \backslash (U_A(r) \cup A)$. Тогда

$$\|P_A x_0 - P_A x_1\| \leq C \|x_0 - x_1\|$$

в том и только том случае, когда множество A может быть представлено как пересечение замкнутых шаров радиуса $R = \frac{Cr}{1-C}$.
(JMAA, 2012)
Аналогичный результат получен про самые далекие точки множества (JCA, 2015).

Условие Липшица для метрической проекции

Пусть $A \subset \mathbb{R}^d$ $(A \subset E)$ замкнутое множество, $C \geq 1$, и для всех $x_0, x_1 \in U_A(r)$

$$\|P_A x_0 - P_A x_1\| \leq C\|x_0 - x_1\|.$$

Тогда A есть проксимально гладкое множество множество с константой $R = \frac{Cr}{C-1}$.
(JMAA, 2013)

Условие Липшица для метрической проекции

Метрика Плиша $\varrho(A, B) = \sup\limits_{\|p\|=1} h(A(p), B(p))$ для выпуклых замкнутых ограниченных подмножеств A, B вещественного гильбертова пространства.

Показано, что в гильбертовом пространстве ряд экстремальных задач $\min\limits_{x \in A_i} f(x)$, $i = 0, 1$, устойчивы по Липшицу в метрике Плиша:

$$\|a_0 - a_1\| \leq C\varrho(A, B).$$

(Матем. сб, 2019; JCA 2019 или 2020)

Метод проекции градиента (МПГ)

Пусть $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ и $A \subset \mathbb{R}^d$.

$$x_0 \in A, \qquad x_{k+1} = P_A(x_k - \alpha_k f'(x_k)).$$

Получены условия сходимости МПГ для невыпуклой функции с непрерывным по Липшицу градиентом и проксимально гладкого множества. Невыпуклы ни функция ни множество. Получены некоторые алгоритмы.
Статьи подготовлены и в процессе подачи.

МПГ, проекционные алгоритмы. Перспективы

1. Численные эксперименты.
2. Условия, обеспечивающие сходимость. В невыпуклом случае это условия типа Поляка-Лоясевича, оценки ошибки, квадратичного роста и т.п. При их выполнении можно доказать сходимость проекционных методов.
3. Сопряжение МПГ с быстро сходящимися (со сверхлинейной скоростью) методами оптимизации, напр. методом Ньютона.
4. Исследование и нахождение новых алгоритмов поиска проекции точки на проксимально гладкое множество.

Спасибо!