Управление дескрипторными системами: анизотропийный подход

А.А. Белов, О.Г. Андрианова, $\boxed{\text{А.П. Курдюков}}$

Лаборатория №1 Динамических информационно-управляющих систем

ИПУ РАН, г. Москва

Благодарность

Александр Петрович Курдюков

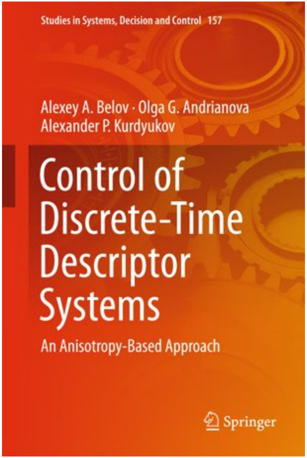
- Является одним из создателей теории анизотропийного управления.
- Автор более 100 работ, среди которых 5 монографий, более 50 журнальных статей (Scopus, WoS), посвященных анизотропийной теории.
- В 2008 году предложил обобщение анизотропийной теории на класс дескрипторных систем.
- Были защищены 7 кандидатских и 1 докторская диссертации.

План доклада

- Введение
  - Основные публикации по теме исследования
  - Анизотропийная теория в контексте понижения влияния внешних возмущений
- Теория дескрипторных систем
  - Предпосылки обобщения анизотропийной теории на дескрипторные системы
  - Основы теории дескрипторных систем
- Теория анизотропийного управления дескрипторными системами
  - Анизотропийный анализ дескрипторных систем
  - Задачи оптимального анизотропийного управления
  - Задачи субоптимального анизотропийного управления
  - Задачи робастного анизотропийного анализа и управления
- Перспективы развития анизотропийной теории

Публикации по теме исследования

- 2 Монографии (2015, 2018).
- 9 Журнальных статей (Scopus, WoS).
- 12 Докладов на конференциях Scopus, WoS.
- 10 Докладов на всероссийских конференциях РИНЦ.
- 2 кандидатские диссертации.



Задача управления линейной системой

Тип задачи

Понижение влияния внешних возмущений.

Оптимизационный критерий

Анизотропийная норма системы.

Объект управления

Линейная дескрипторная система (НОВЫЙ ТИП ОБЪЕКТОВ)

Понижение влияния внешних возмущений: обзор

- Теория инвариантности. Предложена Г.В. Щипановым и Н.Н. Лузиным в 1930х гг. Заключается в полном подавлении внешнего возмущающего воздействия на систему. Развитие идей инвариантности и их применение для проектирования технических систем - Б.Н. Петров, В.С. Кулебакин, А.Г. Ивахненко, Г.М. Уланов.
- Теория ε–инвариантности. Предложена Н.Н. Лузиным и П.И. Кузнецовым в конце 1950х гг. Принцип заключается в приближении регулируемой величины к нулю с наперед заданной точностью ε.
- Минимизация нормы оператора от возмущения к управляющему выходу. Начала развиваться с 1960х годов.

Минимизация нормы оператора: обзор

- Минимизация влияния возмущений с квадратичным критерием качества. Решена в 1960х годах Р. Калманом и А.М. Летовым. Внешнее возмущение предполагается гауссовским белым шумом. Критерий задачи LQG/$\mathscr{H}_2$ оптимизации — минимизация дисперсии управляемого выхода. Недостаток — отсутствие робастности.
- Минимаксный подход, минимизация $\mathscr{H}_\infty$ нормы замкнутой системы. Предложена Д. Зеймсом в 1981 году. Регуляторы рассчитаны на наихудший случай входного возмущения, которое имеет конечную энергию. В случае стохастических сигналов регуляторы проявляют избыточные энергозатраты.
- Подход, основанный на учете спектральной плотности входного возмущения. Предложен в 1994 г. И.Г. Владимировым, А.П. Курдюковым, А.В. Семеновым. В рамках данного подхода $\mathscr{H}_2$ и $\mathscr{H}_\infty$ выступают в качестве частных случаев. Теория получила название анизотропийной теории.

Ключевые понятия анизотропийной теории

Анизотропия случайного вектора w

Это минимальное информационное уклонение Кульбака-Лейблера распределения вектора w от семейства гауссовских распределений с нулевым средним и скалярными ковариационными матрицами.

Средняя анизотропия последовательности W

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N\to+\infty} \frac{\mathrm{A}(W_{0:N-1})}{N} = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\det \frac{mS(\omega)}{\|G\|_2^2} d\omega = \overline{\mathbf{A}}(G) \tag{1}$$

где $S(\omega) = \widehat{G}(\omega)\widehat{G}^*(\omega)\,(-\pi \leq \omega \leq \pi)$, $\widehat{G}(\omega) = \lim_{l\to 1} G(l\mathrm{e}^{i\omega})$ граничное значение передаточной функции G, а $W_{0:N-1} = \begin{bmatrix} w(0); & \ldots; & w(N-1) \end{bmatrix}^\top$.

Смысл средней анизотропии

Средняя анизотропия является скалярной и характеризует «цветность» случайного сигнала (спектральную плотность).

Определение анизотропийной нормы системы

Определение

Для заданной величины $a \geqslant 0$ a-анизотропийной нормой системы F называют

$$|||F|||_a = \sup_{\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a} \frac{\|Y\|_{\mathscr{P}}}{\|W\|_{\mathscr{P}}}, \qquad (2)$$

где $\|Y\|_{\mathscr{P}} = \sqrt{\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} \mathbf{E}|y(k)|^2}$.

Физический смысл

Анизотропийная норма определяет меру усиления случайного возмущения с ограниченной спектральной плотностью.

Свойства

- $|||F|||_a\big|_{a=0} = \frac{\|F\|_2}{\sqrt{m}}$ где $m = \dim w(k)$.
- $|||F|||_a\big|_{a\to\infty} = \|F\|_\infty$.

Определение дескрипторной системы

Неформальное определение

Дескрипторная система - система, состоящая из переменных, имеющих физический смысл.

Преимущества

- Удобство при составлении математической модели.
- Переменные состояния имеют физический смысл.
- Можно описать больше объектов.
- Избыточность в описании.

Недостатки

- Физические законы бывают алгебраическими, это приводит к вырожденности модели.
- Сложности в построении численных решений уравнений.
- Нарушение принципа причинности.
- Нетривиальные обобщения существующих теорий.

Применение дескрипторных систем

- Химия и биология (модели химических реакций, модель пищевой цепи).
- Экономика (Леонтьевская модель многоотраслевой экономики).
- Механика (механические системы с ограничениями).
- Робототехника.
- Электроника (электрические цепи).
- Дискретизованные уравнения в частных производных.

Примеры дескрипторных систем

Механические системы с ограничениями

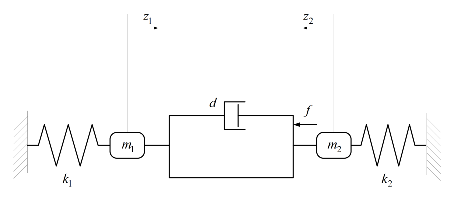


Рис.: Двухзвенный осциллятор

Ограничение
$z_1(t) + z_2(t) = 0.$

Примеры дескрипторных систем

Механические системы с ограничениями

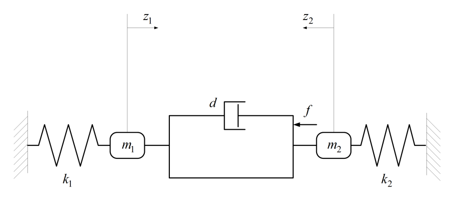


Рис.: Двухзвенный осциллятор

Ограничение
$z_1(t) + z_2(t) = 0.$

Соединенные системы высокого порядка

Рассмотрим два конденсатора с емкостями C_1 и C_2 соответственно. Изменение напряжения на обоих конденсаторах по отдельности

$$\dot{v}_1(t) = i_1(t)/C_1,\ \dot{v}_2(t) = i_2(t)/C_2.$$

Если эти две системы соединены между собой параллельно, то получим следующие ограничения:

$$0 = i_1(t) + i_2(t),\ 0 = v_1(t) - v_2(t).$$

Решение LQG/$\mathscr{H}_2$ и $\mathscr{H}_\infty$ задач для дескрипторных систем

LQG/$\mathscr{H}_2$ задачи

- Л. Дай, 1989 г., решение LQG задачи на основе преобразования к эквивалентной форме.
- Т. Катайама, 1996 г., решение в терминах обобщенных алгебраических уравнений Риккати.
- С.Ф. Тьюдор, К. Оара, 2014 г., решение в частотной области в терминах передаточных функций.

$\mathscr{H}_\infty$ задачи

- С. Ксю, Дж. Лям, 2006 г., решение по состоянию в терминах нелинейных матричных неравенств.
- М. Чадли, М. Даруа, 2012 г., билинейные матричные неравенства.
- Ю. Фенг, М. Ягуби, 2013 г., линейные матричные неравенства, численно эффективный метод.

Основы теории дескрипторных систем

Модель в пространстве состояний

$$
\begin{aligned}
Ex(k+1) &= Ax(k) + Bf(k), \\
y(k) &= Cx(k) + Df(k).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Матрица E является вырожденной, $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $y(k) \in \mathbb{R}^p$, $f(k) \in \mathbb{R}^m$.

Отличия от обыкновенных систем

- Система может иметь бесконечное множество решений или не иметь их (регулярность).
- Решение системы может зависеть от будущих значений входного сигнала f (непричинность).
- Система состоит из двух подсистем: алгебраической и динамической.
- Понятие устойчивости распространяется только для динамической подсистемы.

Основы теории дескрипторных систем

Регулярность (критерий)

Система (3) регулярна, если $\exists\lambda : \det(\lambda E - A) \neq 0$.

Устойчивость (определение)

Система (3) устойчива, если

$$\rho(E,A) = \max|\lambda|_{\lambda\in\{z|\det(zE-A)=0\}} < 1$$

Причинность (критерий)

Система (3) причинна, если

$$\deg\det(\lambda E - A) = \operatorname{rank} E$$

Допустимость (определение)

Система (3) является допустимой, если она регулярна, причинна и устойчива.

Основы теории дескрипторных систем

Вторая эквивалентная форма системы (3) (Л. Дай, 1989):

$$
\begin{aligned}
x_1(k+1) &= A_{11}x_1(k) + A_{12}x_2(k) + B_1 f(k), \\
0 &= A_{21}x_1(k) + A_{22}x_2(k) + B_2 f(k), \\
y(k) &= C_1 x_1(k) + C_2 x_2(k) + D f(k).
\end{aligned} \tag{4}
$$

Проблемы непричинности

Если система непричинная, то матрица A_{22} вырождена. Отсутствует методика сведения исходной алгебро-разностной системы к разностной системе пониженной размерности.

Управляемость и наблюдаемость дескрипторных систем

В дескрипторных системах различают стабилизируемость и причинную управляемость, а также наблюдаемость и причинную наблюдаемость.

Анизотропийный анализ дескрипторных систем

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= Ax(k)+Bw(k), \\ y(k) &= Cx(k)+Dw(k), \end{aligned} \qquad (5)$$

$w(k)$ – случайное возмущение с ограниченной средней анизотропией, т.е. $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$.

Задача вычисления нормы

Система является допустимой, известен уровень средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$ входного возмущения. Требуется вычислить $|||P|||_a$.

Задача оценки ограниченности нормы

Задан скаляр $\gamma > 0$, известен уровень средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$ входного возмущения, $\operatorname{rank} E = \operatorname{rank}[E \quad B]$. Необходимо проверить выполнение условий:

1. Система (5) допустима,
2. $|||P|||_a < \gamma$

Анизотропийный анализ дескрипторных систем

Задача вычисления нормы

Задача вычисления анизотропийной нормы допустимой дескрипторной системы решена в 2009 г. Решение сводится к переходу к эквивалентной форме, решению уравнения Риккати, Ляпунова и специального вида.

Задача оценки ограниченности нормы

- В 2013 г. получены условия ограниченности нормы в виде нестрогих матричных неравенств.
- В 2013 г. получены условия на основе решения обобщенного алгебраического уравнения Риккати.
- В 2015 г. получены строгие условия ограниченности нормы.

Анизотропийная норма определяется при решении задачи минимизации параметра γ на множестве переменных, удовлетворяющих выпуклым ограничениям.

Задача оптимального управления по состоянию

$$Ex(k+1) = Ax(k) + B_w w(k) + B_u u(k), \quad (6)$$
$$z(k) = Cx(k) + D_w w(k) + D_u u(k), \quad (7)$$

$w(k)$ – случайное возмущение с ограниченной средней анизотропией, т.е. $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$.

Постановка задачи

Для системы (6)–(7) требуется построить закон управления в виде $u(k) = Kx(k)$, минимизирующий a-анизотропийную норму замкнутой системы:

$$|||P_{cl}|||_a \to \inf_K . \quad (8)$$

Решение задачи

Задача имеет решение, если $\operatorname{rank} E = \operatorname{rank}[E \quad B_w] = \operatorname{rank}[E \quad C^\top]$. Решение определяется из связанных двух обобщенных алгебраических уравнений Риккати и одного уравнения Ляпунова, а также уравнения специального вида.

Задача оптимального управления по выходу

$$
\begin{aligned}
Ex(k+1) &= Ax(k)+B_1w(k)+B_2u(k), \\
z(k) &= C_1x(k)+D_{11}w(k)+D_{12}u(k), \\
y(k) &= C_2x(k)+D_{21}w(k),
\end{aligned}
$$

$w(k)$ – случайное возмущение с ограниченной средней анизотропией, т.е. $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$.

Постановка задачи

Для системы требуется построить закон управления по выходу, минимизирующий a-анизотропийную норму замкнутой системы:

$$
|||P_{cl}|||_a \to \inf_K .
$$

Решение задачи оптимального управления по выходу

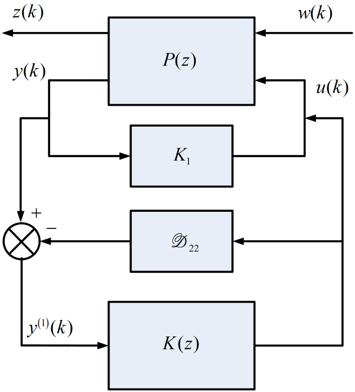


Рис.: Структурная схема замкнутой системы

Решение задачи состоит из нескольких этапов:

1. Каузализация системы. Вводится контур обратной связи, который делает систему причинной.
2. Приведение к стандартной форме. На данном этапе вводится дополнительное слагаемое, обеспечивающее выполнение условия $D_{22} = 0$ для эквивалентной системы.
3. Синтез оптимального регулятора для эквивалентной системы.

Задача анизотропийного субоптимального управления

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= Ax(k)+B_w w(k)+B_u u(k), \\ y(k) &= Cx(k)+D_w w(k)+D_u u(k), \end{aligned}$$

$w(k)$ – случайное возмущение с ограниченной средней анизотропией, т.е. $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$.
Пусть задан скалярный параметр $\gamma > 0$.

Постановка задачи

Для системы требуется построить закон управления в форме $u(k) = Kx(k)$, для которого выполнены условия:

$$|||P_{cl}|||_a < \gamma,$$

где $P_{cl}(z) = (C+D_u K)(zE-(A+B_u K))^{-1}(B_w)+(D_w)$.

Решение задачи анизотропийного субоптимального управления

Риккати-подход

Пусть выполнено условие $\operatorname{rank} E = \operatorname{rank}[E, B_w,]$, тогда решение задачи сводится к поиску решения обобщенного алгебраического уравнения Риккати с проверкой выполнения матричных неравенств.

Подход на основе выпуклой оптимизации

Предполагается, что $D_u = 0$, а также

$$\operatorname{rank} E^{\mathrm{T}} = \operatorname{rank}\left[E^{\mathrm{T}}, C^{\mathrm{T}}\right],$$
$$\operatorname{rank} E = \operatorname{rank}[E, B_w,].$$

Решение задачи сводится к проверке выполнения матричных неравенств на множестве неизвестных параметров. Решение данной задачи также позволяет накладывать ограничение на быстродействие системы, т.е. расположить конечные собственные значения замкнутой системы внутри круга радиуса $0 < \omega < 1$.

Задачи робастного анизотропийного анализа и управления

$$
\begin{aligned}
Ex(k+1) &= A_\Delta x(k) + B_{\Delta w} w(k) + B_u u(k), \\
y(k) &= C_\Delta x(k) + D_{\Delta w} w(k)
\end{aligned}
$$

1. $A_\Delta = A + M_A \Delta N_A$, $B_{\Delta w} = B_w + M_B \Delta N_B$, $C_\Delta = C + M_C \Delta N_C$, $D_{\Delta w} = D_w + M_D \Delta N_D$.,
2. $\Delta \in \mathbb{R}^{q\times q}$ ограниченная по норме неопределенность: $\|\Delta\|_2 := \overline{\sigma}(\Delta) \leqslant 1 \Leftrightarrow \Delta^{\mathrm{T}}\Delta \leqslant I_q$ ($\|\Delta\|_2 \leqslant \|\Delta\|_F$)
3. $w(k)$ – случайное возмущение с ограниченной средней анизотропией, т.е. $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$,
4. Пусть также выполнены условия

$$
\operatorname{rank} E^{\mathrm{T}} = \operatorname{rank}\left[E^{\mathrm{T}}, C^{\mathrm{T}}, N_C^{\mathrm{T}}\right],
$$
$$
\operatorname{rank} E = \operatorname{rank}\left[E, B_w, M_B\right].
$$

Задачи робастного анизотропийного анализа и управления

Задача робастного анализа

Пусть $B_u = 0$. Выход $y(k)$ предполагается измеряемым выходом. Обозначим через P_Δ оператор, связывающий измеряемый выход $y(k)$ и возмущение $w(k)$. Пусть также известны значения $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$. Задача анализа заключается в проверке допустимости системы (причинности и внутренней устойчивости) для всех возможных значений неопределенности Δ и заданного множества, т.е.

$$|||P_\Delta|||_a < \gamma.$$

Задача робастного синтеза

Требуется найти закон управления в виде $u(k) = Fx(k)$, делающий систему допустимой и ограничивающий ее анизотропийную норму заданным числом $\gamma > 0$ для всех возможных Δ из заданного множества, т.е.

$$|||P_\Delta^{cl}|||_a < \gamma.$$

Примеры робастного анализа и синтеза

$$
\begin{aligned}
Eq(k+1) &= A_\Delta q(k) + B_u u(k) + B_\xi \xi(k),\\
y(k) &= Cq(k) + D_\eta \eta(k),
\end{aligned}
$$

$q(k)$ – объем емкостей, $u(k)$ – подача насоса, $\xi(k)$ – шум объекта, $\eta(k)$ – шум измерения. Шум $w(k) = [\xi(k),\ \eta(k)]^\top$.

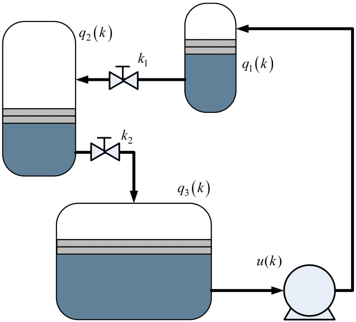


Рис.: Гидравлическая система

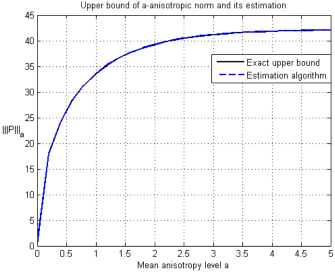


Рис.: Оценка анизотропийной нормы системы

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2.02 & 0.99 & 3 & 3 \\ 0.02 & 0.97 & 0.5 & 1 \\ 1.04 & 1.95 & -1 & -1 \\ -1.94 & 2.89 & 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 5.9 \\ 2.3 \\ 1.15 \\ 4.05 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.1 \\ -0.2 & 0 \\ 0 & 0.33 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_w = \begin{bmatrix} 0.03 & 0.07 \\ 0.09 & 0.12 \end{bmatrix},$$

Матрица A_Δ предполагается неопределенной с $\Delta \in [-1;\ 1]$ и

$$M_A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad N_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Примеры робастного анализа и синтеза

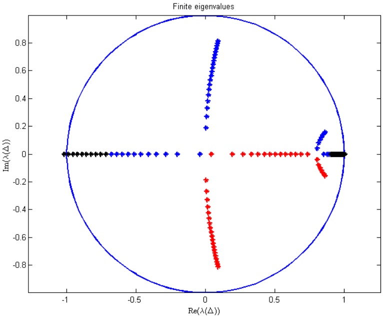


Рис.: Конечные собственные числа для управления, рассчитанного для номинальной системы

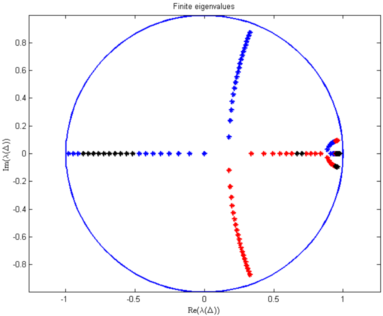


Рис.: Конечные собственные числа для управления, рассчитанного для системы с учетом неопределнностей

Перспективы развития анизотропийной теории управления

1. Решение задач робастного анализа и синтеза для систем с политопическими неопределенностями (Белов А.А., Андрианова О.Г.)
2. Решение задач анизотропийной фильтрации для дескрипторных систем (Андрианова О.Г.)
3. Решение задач синтеза отказоустойчивых систем с применением анизотропийного подхода (Белов А.А.)
4. Решение задач робастного синтеза для систем с мультипликативными неопределенностями (Кустов А.Ю., Юрченков А.В.)
5. Решение задач робастного анализа и синтеза для систем со случайными параметрами (Кустов А.Ю., Юрченков А.В., Белов И.Р.)

Спасибо за внимание!