

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК



На правах рукописи

УДК 517.977

Лысенко Павел Владимирович

**ТРАЕКТОРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ РИСКА
ОБНАРУЖЕНИЯ ПОДВИЖНЫХ ОБЪЕКТОВ В
ЗАДАЧЕ УКЛОНЕНИЯ**

Специальность 05.13.01 —

«Системный анализ, управление и обработка информации (в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, чл.-корр. РАН
Галяев Андрей Алексеевич

Москва — 2022

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Задачи планирования траектории и методы их решения	13
1.1 Развитие постановок задач планирования траектории движения УПО	13
1.2 Беспилотные УПО	16
1.3 Развитие постановок задач уклонения УПО от обнаружения . . .	19
1.4 Численные алгоритмы планирования траекторий	27
1.5 Выводы по Главе 1	32
Глава 2. Задачи планирования траектории УПО при уклонении от одиночного обнаружителя с учетом ограничений на длину и кривизну траектории	33
2.1 Математическая модель обнаружителя	33
2.1.1 Особенности приема широкополосных сигналов антенными решетками	33
2.1.2 Вероятность необнаружения при пассивном наблюдении .	36
2.1.3 Вероятность необнаружения при пассивном наблюдении в случае малого отношения сигнал/шум	40
2.1.4 Общая постановка задачи планирования траектории при уклонении от обнаружителя	45
2.2 Задача планирования траектории УПО при уклонении от обнаружения при наличии ограничения на длину траектории . .	47
2.2.1 Постановка задачи	47
2.2.2 Оптимизация движения УПО на постоянной скорости . . .	47
2.2.3 Случай симметричных граничных условий.	55
2.2.4 Случай несимметричных граничных условий.	57
2.3 Задача планирования траектории УПО при уклонении от обнаружения при наличии ограничения на кривизну траектории .	59

2.3.1	Принцип максимума в задаче планирования маршрута движения УПО	59
2.3.2	Задача уклонения от обнаружения для УПО с динамикой машины Дубинса	61
2.4	Выводы по Главе 2	70
Глава 3. Задача планирования траекторий УПО, обладающего неоднородной индикатрисой излучения		
3.1	О функционале риска	71
3.2	Математическая постановка задачи	73
3.2.1	Преобразование координат	74
3.3	Необходимые условия экстремума	76
3.4	Достаточные условия оптимальности	80
3.5	Вырождение уравнений Эйлера-Лагранжа и нулевой гессиан	83
3.6	Двузвенные траектории	86
3.7	Примеры и иллюстрация результатов	99
3.7.1	Логарифмическая спираль	99
3.7.2	Двузвенная оптимальная траектория	101
3.7.3	Случай нулевого гессиана.	104
3.7.4	Случай нескольких экстремальных значений функции риска	106
3.7.5	Независимость значений оптимальных углов β_1^* и β_2^* от β_0	108
3.8	Выводы по Главе 3	112
Основные результаты и заключение		113
Список сокращений и условных обозначений		115
Словарь терминов		116
Список литературы		117
Список рисунков		131
Приложение А. Акт о внедрении		133

Введение

Актуальность темы исследования

Задачи планирования маршрута подвижных объектов обычно связаны с задачами планирования пути (path planning, сокращенно РР) и планирования траектории (trajectory planning, сокращенно ТР). Задача планирования пути состоит в определении точек пространства, через которые должен пройти управляемый подвижный объект (УПО), чтобы достичь заданного пункта назначения из начальной позиции, в то время как описание движения подвижного объекта во времени считается задачей планирования траектории. Эти задачи возникают при планировании траекторий уклонения от обнаружения, например, беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) или автономных необитаемых подводных аппаратов (АНПА), а также управляемых, в том числе пилотируемых, подвижных объектов и групп таких объектов.

Совершенствование возможностей разнообразных беспилотных УПО в последние десятилетия привело к развитию новой математической области исследований, посвященной задачам управления как подкласса задач поиска-уклонения, получивших в англоязычной литературе название «Path Planning in Threat Environment». [1–9] В русскоязычной литературе эта область науки получила название теории планирования траектории УПО в конфликтной среде. [10–14]

Под конфликтной средой здесь понимается наличие в области движения УПО одного или нескольких объектов, оказывающих негативное воздействие на УПО. Целью такого воздействия может считаться, например, обнаружение объекта. В свою очередь цель управления УПО при движении в конфликтной среде состоит в минимизации негативного воздействия, создаваемого конфликтующими объектами. В качестве критерия оптимизации в задачах уклонения от обнаружения используется риск обнаружения, зависящий от методов и алгоритмов поиска, определяемый через вероятность обнаружения и являющийся функционалом от траектории движения УПО [6–9; 12; 15].

Развитие морской робототехники [16] приводит к повышению эффективности использования специальных систем и образцов вооружения военно-морских сил, расширению их функциональных возможностей, обеспечению безопасности жизнедеятельности экипажей подводных лодок, надводных кораблей и

вспомогательных судов, а также летательных аппаратов морской авиации при выполнении боевых задачи и задач обеспечения, включая специальные, подводно-технические и аварийно-спасательные работы. Что невозможно без совершенствования систем управления робототехническими системами и УПО, их интеллектуализации и информационной поддержки принимаемых решений.

Общемировой тенденцией развития морской робототехники военного назначения является акцент на повышении автономности действий подводных и надводных аппаратов, что связано с их возможностями по сверхпродолжительному (от недель до года) пребыванию в морской среде, и соответственно с возможностями системы интеллектуального управления, в том числе движением УПО, с обоснованным выбором целеуказания, обеспечивающей комплексное и эффективное решение типовых задач в автономном режиме в неопределенной и конфликтной средах. Поэтому решение конкретных РР/ТР задач зависит от эффективности работы бортовых алгоритмов УПО.

Исследуемые в диссертационной работе задачи и весь класс подобных ТР-задач чрезвычайно актуален для современных военных приложений, а рассматриваемые в постановках УПО могут быть моделями АНПА или БПЛА для практических применений. Полученные решения могут быть полезны при разработке алгоритмов реального времени для бортовых модулей планирования маршрутов этих объектов, а решение данных ТР-задач может существенно снизить величину риска обнаружения и обеспечить большую безопасность АНПА на найденном оптимальном маршруте в задаче уклонения от обнаружения.

Таким образом, с учетом вышесказанного, проблема поиска оптимальных траекторий УПО в задачах уклонения от обнаружения, исследуемая в работе, является актуальной.

Степень научной разработанности темы

Задача об оптимизации закона уклонения УПО от одиночного стационарного обнаружителя в случае движения объекта на постоянной скорости рассмотрена во многих статьях [11–13; 17; 18]. В некоторых работах [17–19] предлагается постановка задачи с расширенным критерием оптимизации, который включает дополнительный регуляризирующий функционал. Отдельные авторы [8] рассматривали задачу уклонения от обнаружения при наличии энергетического ограничения на движение УПО. Постановка с переменной скоростью тоже исследована в ряде статей [11; 20]. Для задач, в которых количество сенсоров

больше одного, аналитическое решение получить не удаётся, однако может быть приведен численный алгоритм для произвольного числа одинаковых сенсоров, независимо принимающих излучаемый УПО сигнал [4]. В основе предложенного подхода лежит алгоритм Дейкстры [21] для графа, построенном на квадратной сетке на плоскости. Также такой подход используется в других статьях [20; 22]. Галяевым А.А. [23] предложена замена переменных для исследуемых задач оптимизации траектории УПО при уклонении от обнаружения, которая отождествляет вещественные координаты объекта с комплексными. Достаточно полный обзор алгоритмов планирования пути для беспилотных аппаратов, находящихся оптимальный или субоптимальный маршрут между начальной и конечной точкой в морской среде, приведен в различных обзорах [24–26]. Эти алгоритмы включают алгоритм кратчайшего пути на основе графа, известный как A^* , алгоритм искусственного потенциального поля, последовательное квадратичное программирование и так далее. Также часто используется подход, основанный на поведении муравьиной колонии [27; 28]. В последние годы, благодаря прогрессу нейронных сетей, все более популярными становятся подходы глубокого обучения и, в частности, глубокого обучения с подкреплением [29; 30]. В литературе преобладают методы решения в виде численных алгоритмов, тогда как аналитический вывод результатов часто затруднен для многих постановок.

Объектом исследования являются оптимальные траектории управляемых подвижных объектов.

Предметом исследования являются аналитические методы и алгоритмы поиска оптимальных траекторий управляемых подвижных объектов.

Целью диссертационного исследования является повышение эффективности управления подвижными объектами в задачах уклонения от обнаружения путем оптимизации траекторий движения и скоростных режимов методами оптимального управления и вариационного исчисления.

Для достижения данной цели были **поставлены и решены следующие задачи**:

1. Задача планирования траектории УПО при уклонении от одиночного обнаружителя с учётом ограничения на длину траектории.
2. Задача планирования траектории УПО при уклонении от одиночного обнаружителя с учётом ограничения на кривизну траектории.

3. Задача планирования траекторий УПО при уклонении от одиночного обнаружителя при наличии у объекта неоднородной индикатрисы излучения.

Область исследования

Работа выполнена в соответствии со следующими пунктами паспорта специальности 05.13.01 "Системный анализ, управление и обработка информации (в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)":

- п.1. Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.
- п.2. Формализация и постановка задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.
- п.3. Разработка критериев и моделей описания и оценки эффективности решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.
- п.4. Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.

Методологическую основу работы составили методы вариационного исчисления, методы оптимального управления, а также методы компьютерного моделирования.

Достоверность полученных в диссертационной работе результатов подтверждается корректностью и полнотой исходных положений, достоверностью, воспроизводимостью и непротиворечивостью математических выкладок. Результаты теоретических исследований подтверждены средствами компьютерного моделирования.

Положения, выносимые на защиту:

1. Модель обнаружителя с формализацией функционала риска обнаружения для случая малого отношения сигнал/шум как критерия оптимизации для задач планирования траектории (соответствует п.1, п.2, п.3 паспорта специальности 05.13.01).
2. Метод построения оптимальной траектории на основе аналитического решения задачи планирования траектории УПО при уклонении от одиночного обнаружителя с учётом ограничения на длину траектории (соответствует п.2, п.4 паспорта специальности 05.13.01).

3. Метод построения оптимальной траектории на основе аналитического решения задачи планирования траектории УПО при уклонении от одиночного обнаружителя с учётом ограничения на кривизну траектории (соответствует п.2, п.4 паспорта специальности 05.13.01).
4. Метод построения оптимальной траектории на основе аналитического решения задачи планирования траекторий УПО при уклонении от одиночного обнаружителя при наличии у объекта неоднородной индикатрисы излучения для случая выполнения достаточных условий оптимальности траекторий (соответствует п.2, п.4 паспорта специальности 05.13.01).
5. Метод и алгоритм построения двухзвенной оптимальной траектории на основе аналитического решения задачи планирования траекторий УПО при уклонении от одиночного обнаружителя при наличии у объекта неоднородной индикатрисы излучения для случая невыполнения достаточных условий оптимальности траекторий (соответствует п.2, п.4 паспорта специальности 05.13.01).

Научная новизна диссертации заключается в следующем:

1. Новизна постановки задачи планирования траектории УПО при уклонении от одиночного обнаружителя с учётом ограничения на кривизну траектории заключается в том, что в качестве УПО рассмотрен объект, обладающий динамикой машины Дубинса, которая действует в условиях обнаружения и решает задачу уклонения по критерию риска обнаружения. Произведено сравнение с решением известной задачи быстрогодействия для машины Дубинса.
2. Новизна постановки задачи планирования траекторий УПО при уклонении от одиночного обнаружителя при наличии у объекта неоднородной индикатрисы излучения заключается в формализации критерия риска обнаружения с введением в него мультипликативной составляющей, зависящей от направленности излучения объекта. В отличие от известных задач для изотропных индикатрис излучения, рассмотренная постановка позволяет находить аналитические решения для более широкого класса задач уклонения, аналитически строить траектории уклонения с оптимальным скоростным режимом.

3. Научная новизна заключается в разработке методов решения предложенных постановок задач на основе их полного аналитического решения, анализе и классификации получаемых решений. Предложен метод определения вида оптимальной траектории в задаче планирования траекторий УПО при уклонении от одиночного обнаружителя при наличии у объекта неоднородной индикатрисы излучения, основанный на положительности гессиана индикатрисы излучения. При невыполнении условия положительности гессиана индикатрисы излучения предложен метод построения двухзвенных оптимальных траекторий УПО.

Теоретическая значимость работы заключается в развитии математической теории планирования траектории УПО в конфликтных средах (задачах уклонения от обнаружения) и рассмотрении новых для данной области науки постановок, связанных с наличием фазовых, интегральных и динамических ограничений на движение объекта.

Практическая значимость работы заключается в том, что полученные научные результаты могут использоваться в создании оперативно-советующих систем стратегически важных подвижных объектов и бортовых планировщиков миссий беспилотных летательных и подводных аппаратов, а именно в алгоритмах получения опорных траекторий для этих управляемых объектов.

Апробация работы.

Результаты диссертационной работы неоднократно докладывались на научном семинаре ИПУ РАН «Управление по неполным данным» под руководством чл.-корр. РАН, д.т.н. Галяева А.А., а также на ведущих отечественных и зарубежных конференциях: Мультиконференции по проблемам управления (МКПУ-2018, МКПУ-2020), Всероссийском совещании по проблемам управления (ВСПУ XIII), 7th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT), Международной конференции «Оптимальное управление и дифференциальные игры», посвященной 110-летию со дня рождения Льва Семеновича Понтрягина.

Реализация и внедрение результатов работы

Результаты использовались для выполнения работ при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-38-90215, а также в разработке системы поддержки принятия решений в рамках ОКР «Странник», выполненной по гособоронзаказу. Подтверждением практической ценности полученных

результатов служит акт внедрения результатов работы, выданный АО «Морские неакустические комплексы и системы» и приведенный в приложении А.

Публикации.

Результаты диссертационной работы отражены в 13 публикациях, в том числе в 3 статьях в журналах из списка ВАК, 3 статьях в журналах, входящем в Russian Science Citation Index, 7 статьях, входящих в Science Citation Index Expanded Web of Science, из них 3 статьи в журналах Q1, и 7 статьях, индексируемых наукометрической базой Scopus, а также 6 докладах на конференциях, опубликованных в материалах этих конференций.

1. Galyaev A.A., Lysenko P.V., Yakhno V.P. Algorithm for Optimal Two-Link Trajectory Planning in Evasion from Detection Problem of Mobile Vehicle with Non-Uniform Radiation Pattern // *Advances in Systems Science and Applications*, 2021, 21(2), P. 71-82. (Scopus Q3)
2. Galyaev A.A., Lysenko P.V., Yakhno V.P. 2D Optimal Trajectory Planning Problem in Threat Environment for UUV with Non-Uniform Radiation Pattern // *Sensors*. 2021. Volume 21, Issue 2. 396. P. 1-24.
DOI: 10.3390/s21020396 (WoS Q1, IF 3.576)
3. Galyaev A.A., Lysenko P.V., Dobrovidov A.V., Shaikin M.E., Yakhno V.P. Path Planning in Threat Environment for UUV with Non-Uniform Radiation Pattern // *Sensors*. 2020. Volume 20, Issue 7. 2076. P. 1-21.
DOI: 10.3390/S20072076 (WoS Q1, IF 3.275)
4. Галяев А.А., Лысенко П.В., Яхно В.П. Условия оптимальности подвижного объекта, обладающего неоднородной индикатрисой излучения // Доклады Российской Академии Наук. М.: Российская Академия наук, 2020. Т. 493. № 1. С. 95-98.
Galyaev A.A., Lysenko P.V., Yakhno V.P. Trajectory Optimality Conditions for Moving Object with Nonuniform Radiation Pattern // *Doklady Mathematics*. M.: Pleades Publishing, Ltd, Springer, 2020. Vol. 102. No. 1. P. 342–345. (Scopus Q2, WoS Q4, RSCI, IF 0.548)
5. Галяев А.А., Лысенко П.В., Яхно В.П. Уклонение подвижного объекта от одиночного обнаружителя на заданной скорости // *Проблемы управления*. 2020. № 1. С. 83-91.

- Galyaev A.A., Lysenko P.V., Yakhno V.P. Evading a Single Detector by an Object Moving at a Given Speed // Automation and Remote Control. 2021. Vol. 82. No. 7. P. 1281–1291. (Scopus Q2, WoS Q4, RSCI, IF 0.520)
6. Галяев А.А., Лысенко П.В., Яхно В.П. Задача планирования оптимального движения объекта через район случайного поиска // Проблемы управления. 2017. №5. С. 88-94.
- Galyaev A.A., Lysenko P.V., Yakhno V.P. Optimal Path Planning for an Object in a Random Search Region // Automation and Remote Control. 2018. V. 79 No11. P. 2080-2089. (Scopus Q2, WoS Q4, RSCI, IF 0.520)
7. Galyaev A.A., Lysenko P.V., Rubinovich E.Y. Optimal Stochastic Control in the Interception Problem of a Randomly Tacking Vehicle // Mathematics. 2021. 9. 2386.
DOI: 10.3390/math9192386 (WoS Q1, IF 2.258)

Материалы конференций.

1. Галяев А.А., Лысенко П.В. Задача планирования маршрута подвижного объекта при ограничении на модуль скорости // Материалы 11-й Российской мультikonференции по проблемам управления (РМКПУ-2018, Санкт-Петербург). С-Петербург: АО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор 2018. Материалы конференции «Управление в аэрокосмических системах» (УАС-2018) . С. 40-47.
2. Галяев А.А., Лысенко П.В., Яхно В.П. Об оптимальных траекториях подвижного объекта с неравномерной индикатрисой излучения // Труды 13-й Мультikonференции по проблемам управления (МКПУ-2020). Санкт-Петербург, 6-8 октября 2020 г. СПб.: АО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор 2020. С. 31-34.
3. Галяев А.А., Лысенко П.В. Оптимизация движения подвижного объекта с ограничением на разворот при уклонении от одиночного сенсора // Труды 13-го Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ XIII, Москва, 2019). М.: ИПУ РАН, 2019. С. 1400-1403.
4. Галяев А.А., Лысенко П.В. Path planning of a controlled object in a problem of increasing the stealth with constraints on length and curvature of trajectory // Материалы Международной конференции "Оптимальное управление и дифференциальные игры посвященной 110-летию со дня рождения Льва Семеновича Понтрягина (Москва, 2018). М.: Мате-

- матический институт имени В.А. Стеклова Российской академии наук, 2018. С. 99-102.
5. Galyaev A.A., Lysenko P.V., Yakhno V.P. Evasion from Detection of the Moving Object with Non-Uniform Radiation Pattern // Proceedings of the 2020 7th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT). Прага: IEEE, 2020. С. 463-468. (Scopus)
 6. Галяев А.А., Лысенко П.В., Яхно В.П. Об одной задаче оптимизации маршрута движения объекта через район случайного поиска // Актуальные проблемы военной науки и политехнического образования ВМФ (Межведомственная научно-техническая конференция. Рецензируемый сборник статей и докладов). Пушкин: ВМПИ, 2017. 1 (20). С. 62-68. (RSCI)

Личный вклад автора. Все результаты исследования, изложенные в диссертационной работе, получены автором лично. Постановки задач исследования осуществлялись совместно с научным руководителем.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, библиографического списка, содержания и одного приложения.

Полный объём диссертации составляет 133 страницы с 35 рисунками. Список литературы содержит 116 наименований.

Глава 1. Задачи планирования траектории и методы их решения

1.1 Развитие постановок задач планирования траектории движения УПО

Задачи планирования траектории привлекают пристальное внимание исследователей с 1970-х годов, и в последнее время они стали все чаще использоваться для решения задач в самых различных областях, от простого планирования пространственного маршрута до выбора автономным мобильным роботом соответствующей последовательности действий, необходимой для достижения заданной цели.

История возникновения задач планирования траектории движения УПО восходит к 1887 г., когда А.А. Марков в статье [31] впервые рассмотрел несколько математических задач, связанных с прокладкой железнодорожных путей. Первой и самой простой в постановке была задача о построении траектории с ограничением на угол разворота: между двумя точками A и B на плоскости требовалось провести кратчайшую кривую линию при заданном ограничении на ее кривизну и с заданным направлением касательной к этой кривой в точке A . Данная задача имела практический интерес, поскольку требовалось прокладывать железнодорожные пути между двумя населенными пунктами с наикратчайшей длиной, а ограничения на кривизну траектории естественным образом следовали из железнодорожной специфики такой задачи. Марков показал, что оптимальными траекториями будут кривые, составленные из дуг окружностей минимально возможного радиуса и отрезков прямых, либо из двух гладко сопряженных дуг окружностей. Кроме того, Марковым были поставлены еще три задачи оптимизации с ограничением на ускорение поезда и с заданным направлением траектории в обоих краевых точках маршрута.

В середине прошлого века Руфусом Айзексом в отчете для Rand Corporation [32] было положено начало теории дифференциальных игр и была предложена постановка задачи о «шофере-убийце» - задача о преследовании убегающего «пешехода» E (Evader) «автомобилем»-преследователем P (Pursuer). Скорость убегающего была ограничена по модулю, а на движение

преследователя с постоянной по величине линейной скоростью дополнительно накладывалось ограничение на маневренность в виде ограниченного радиуса поворота (например, в такой постановке можно рассматривать движение торпеды и катера). В задаче требовалось найти множества достижимости, в которых преследователь гарантированно догонит убегающего. В подклассе задач теории дифференциальных игр, называемом играми преследования-уклонения (pursuit-evasion games) [33], рассматриваются различные модификации этой простейшей задачи. Эти постановки включают разные ограничения на управление, критерии или цели, а так же разные динамические модели и стратегии уклоняющегося и преследователя. Часто игры преследования-уклонения применяются для исследования сценариев воздушных боев. Но кроме того, теория игр [34] оказалась очень эффективна для моделирования и решения некоторых из практических задач, связанных с морской средой.

С теоретической точки зрения, оптимальные стратегии агентов определяются решением нелинейного дифференциального уравнения, известного как уравнение Гамильтона-Якоби-Айзекса (НЈ). Однако на практике эта проблема далека от решения, поскольку решения уравнений НЈ в общем случае недоступны. В [35–39] использованы различные численные подходы для решения этих управляющих уравнений планирования. Алгоритмы поиска на графах для решения подобных задач применены, например, в [40]. Такие подходы применяются на борту реальных морских транспортных средств [38] и используются для решения задач «преследования-уклонения». Уклоняющийся может применять дополнительные средства для дезинформации и отвлечения сил и средств конфликтующих сторон, например, мобильные ложные цели, которые могут отвлечь преследователя и дать возможность уклоняющемуся скрыться и избежать поимки. Такие постановки рассмотрены в [41–44].

Л. Дубинс в [45] ввел динамическую модель подвижного объекта, имеющего ограничение на радиус разворота. Данная модель сохранила имя автора и стала называться «машиной Дубинса» или «автомобилем Дубинса»:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= v \cos \varphi, \\ \dot{y}(t) &= v \sin \varphi, \\ \dot{\varphi}(t) &= u, |u| \leq 1,\end{aligned}\tag{1.1}$$

где v – управление, отвечающее за линейную скорость УПО, а ω – за угловую. Дубинс геометрически нашел оптимальные решения задачи быстродействия для такого УПО и классифицировал их. Позднее эта задача оптимального управления была решена с использованием принципа максимума Понтрягина в [46; 47]. В дальнейшем возникли более сложные модели, отвечающие более реалистичному поведению подвижных объектов (управляемое колесо, велосипед, автомобиль с двумя шасси, автомобиль с прицепом). Оптимизационные задачи, связанные с этими более сложными моделями, являются чрезвычайно трудными для аналитического решения [9]. Эти модели очень удобны для описания движения колесных роботов и часто используются в статьях, посвященных их управлению. В зависимости от конфигурации управляющих параметров (линейной и угловой скорости) и ограничений, наложенных на них, выделяют модификации модели (1.1): машина Риддса-Шеппа, машина Риддса-Шеппа с выпуклыми управлениями, управляемый автомобиль и машина с дифференциальным приводом, как показано на рисунке 1.1. Постановки задач для таких моделей рассмотрены в [48; 49].

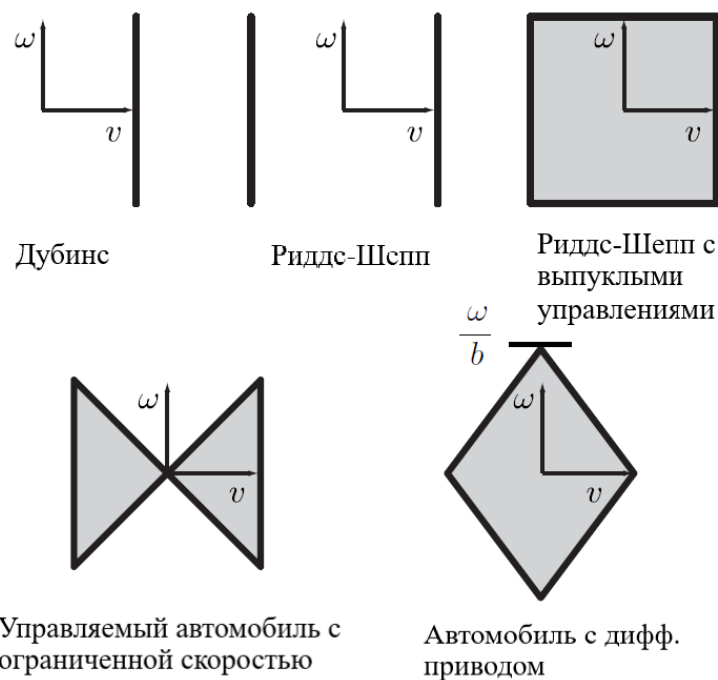


Рисунок 1.1 — Модификации модели Дубинса

Подобные задачи и модели УПО находят свое приложение в управлении пилотируемыми и беспилотными летательными аппаратами; в управлении роботами при наличии препятствий; в управлении морскими судами и подводными аппаратами, а также других областях и актуальных задачах техники.

1.2 Беспилотные УПО

В последние годы благодаря техническому прогрессу и увеличению мощностей бортовых вычислителей беспилотные УПО становятся все более популярны и входят во все сферы жизнедеятельности человека. Для летательных аппаратов применяется термин «беспилотный», в то время как для морских автономных объектов чаще используются слова «необитаемый» и «безэкипажный». В России терминология в области подводных обитаемых аппаратов закреплена ГОСТами. Как указано в [16], этому способствовало то, что исторически подводные дистанционно управляемые аппараты начали активно развиваться и внедряться (главным образом для осмотровых глубоководных работ и работ по разминированию) раньше надводных безэкипажных аппаратов или сухопутных систем.

В России действует ГОСТ Р 56960-2016 «Аппараты обитаемые подводные», который вводит следующие определения:

- «необитаемый подводный аппарат (НПА): Подводный аппарат, дистанционно управляемый по кабель-тросу оператором, находящимся на носителе или на берегу (телеуправляемый НПА), или работающий самостоятельно по программе (автономный НПА).
- телеуправляемый НПА (ТНПА): Необитаемый подводный аппарат, связанный с носителем (судном, подводной лодкой, подводным аппаратом) посредством кабель-троса, по которому передается электропитание и/или сигналы управления, а также происходит обмен информацией.
- автономный НПА (АНПА): Необитаемый подводный аппарат, не связанный с носителем кабель-тросом, способный перемещаться, погружаться и всплывать самостоятельно по заданной программе или по командам телеметрии.»

К АНПА относятся самоходные НПА с автономной системой энергообеспечения и, как правило, беспроводным каналом телеуправления и связи. В английском языке ТНПА называется *remotely operated underwater vehicle (ROV)*, а АНПА — *autonomous underwater vehicle (AUV)*, однако применительно к АНПА военного назначения исторически сложилось употребление англоязычного термина

unmanned undersea vehicle (UUV), которое широко встречается в литературе [50; 51]. В России аббревиатуры UUV и AUV принято считать тождественными и переводить как НПА.

С точки зрения информационной автономности все НПА можно условно разделить на три поколения:

1. в первом поколении АНПА функционируют по заранее заданной, жесткой, неизменяемой программе; ТНПА управляются по разомкнутому контуру: в этих простейших устройствах команды управления подаются непосредственно в движительный комплекс без использования автоматических обратных связей;
2. во втором поколении АНПА имеют разветвленную сенсорную систему; ТНПА располагают автоматическими обратными связями по координатам состояния объекта управления: высоте над дном, глубине погружения, скорости, угловым координатам и т.п., эти очередные координаты сравниваются в автопилоте с заданными, определяемыми оператором;
3. в третьем поколении АНПА обладают элементами искусственного интеллекта: возможностью самостоятельного принятия несложных решений в рамках общей поставленной перед ними задачи, элементами искусственного зрения с возможностью автоматического распознавания простых образов, возможностью элементарного самообучения с пополнением собственной базы знаний; ТНПА управляются оператором в интерактивном режиме: система супервизионного управления предполагает уже некую иерархию, состоящую из верхнего уровня, реализуемого в ЭВМ судна-носителя, и нижнего уровня, реализуемого на борту подводного модуля.

Морские роботы могут использоваться для решения самых разных задач. В частности, командования ВМС многих стран считают, что морские роботы могут быть полезны для разведки, картографирования дна, поиска мин, патрулирования входов в морские базы, обнаружения и сопровождения кораблей, охоты на подводные лодки, ретрансляции сигналов, дозаправки самолетов и нанесения ударов по наземным и морским целям. Для выполнения таких заданий сегодня разрабатываются сразу несколько классов морских роботов.

Патрульными роботами-катерами уже на протяжении последних пяти лет пользуются ВМС Израиля, а подводные НПА входят в состав нескольких де-

саятков ВМС, включая Россию, США, Швецию, Нидерланды, Китай и Японию. Подводные роботы пока наиболее распространены, поскольку их разработка, производство и эксплуатация относительно просты по сравнению с морскими роботами других классов, поскольку подводные НПА в большинстве своем «привязаны» к носителю тросом, кабелем управления и энергоснабжения и не могут уходить на большие расстояния.

Подводные роботы появились на флоте первыми, практически сразу после начала их использования в исследовательских целях. В 1957 году ученые из Лаборатории прикладной физики Вашингтонского университета впервые использовали подводного робота SPURV для исследования распространения звуков под водой и записи шумов подводных лодок. В 1960х годах в СССР подводных роботов стали использовать для исследования дна. Приблизительно в те же годы НПА начали поступать на флот. Первые такие роботы имели несколько двигателей для перемещения под водой, простые манипуляторы и телевизионные камеры.

Сегодня подводные роботы используются военными в самых разнообразных операциях: для разведки, поиска и обезвреживания мин, поиска подводных лодок, проверки подводных конструкций, картографирования дна, обеспечения связи между кораблями и подводными лодками и доставки грузов.

Роботизация и интеллектуализация робототехнических комплексов [52—54] являются важнейшими направлениями развития перспективной системы вооружения ВМС развитых в военном отношении государств мира. Морские робототехнические комплексы (МРТК) в силу главенства принципа модульности в их построении обладают большим потенциалом использования не только в военных, но и в гражданских целях, будучи высокотехнологичным средством двойного назначения. Применение МРТК военного и гражданского назначения на основе необитаемых подводных и безэкипажных надводных аппаратов позволяет вывести человека из зоны повышенного риска, а также обеспечить наиболее полное и всестороннее освещение обстановки в интересах эффективного выполнения боевых задач и задач обеспечения в военной области, равно как и подводных и надводных специальных работ в гражданском секторе [55—58].

Очевидно, что осуществление УПО таких миссий может сопровождаться противодействием со стороны неприятеля, поэтому РР/ТР задачи должны быть решены в условиях противодействия и неполноты информации, что на эта-

пе анализа математических моделей приводит к широкому спектру различных постановок задач [59—64], результатом решения которых должны стать опорные траектории и маршрутные рекомендации для УПО, на основе которых он должен принять решение о выборе наиболее оптимального маршрута.

1.3 Развитие постановок задач уклонения УПО от обнаружения

Различные приложения военной и гражданской техники, связанные с поиском оптимальных траекторий для космических, воздушных, морских и наземных аппаратов, охватывают задачи управления с различными целевыми функциями, ресурсами и ограничениями на управление. Несмотря на большое разнообразие управляемых мобильных средств, связанные с ними задачи управления имеют общие черты. Прежде всего, это традиционные задачи планирования миссии, которые включают в себя задание безопасного курса с учетом естественных и искусственных ограничений (рельеф местности, гидрология, погодные условия), а также поддержание устойчивости на заданном курсе. Кроме того, типичными, как правило, являются задачи оптимального маневрирования в нештатных ситуациях (резко меняющиеся погодные условия и т.д.). Успешность выполнения миссии оценивается значением некоторой функции (критерия оптимизации), минимизация которой является основной задачей системы управления. Классические критерии оптимизации связаны с минимизацией энергетических затрат, времени (задача быстрогодействия) или критерия промаха.

Как указано в Главе 1, под конфликтной средой понимается наличие в области движения УПО одного или нескольких объектов, оказывающих негативное воздействие на УПО. В диссертационной работе рассматриваются случаи, когда это негативное воздействие связано с обнаружением объекта сенсором конфликтующей стороны. Поэтому задача УПО формулируется как задача уклонения от обнаружения поисковой системой. Приложениями таких задач являются, например, минимизация риска обнаружения БПЛА авиационными радарными или минимизация риска обнаружения АНПА датчиками через различные физические поля под водой [6].

На данный момент существует множество статей и монографий, посвященных управлению движением УПО в конфликтных средах ([1; 4; 5; 10; 14; 17–20; 52; 65; 66]). Основной вклад в исследование данной тематики внесли Забаранкин М. (Zabarankin M.), Урясев С. (Uryasev S.) [4; 5], Пардалос П. (Pardalos P.), Пачтер М. (Pachter M.) [8; 43; 44], Уошбурн А. (Washburn A.), Кассета Л. (Cacceta L.) [1; 2].

В Институте проблем управления им. В.А. Трапезников Российской Академии Наук, начиная с 2000х годов, развивались методы обработки информации при обнаружении УПО по различным типам физических полей и порождаемых ими информационных сигналов, совершенствовались постановки и формализации задач обнаружения, с учетом координатных, фазовых ограничений и алгоритмов поиска разнородными силами и средствами, проектировались системы интеллектуальной поддержки систем принятия решений для автономных и пилотируемых УПО. Значительный вклад в указанные научные направления внесли такие ученые, как академик РАН Васильев С.Н. [52–54], чл.-корр. РАН Галяев А.А. [11–13; 17–19; 23; 67], Добровидов А.В. [61–63], Лебедев В.Г. [59; 60], Кулида Е.Л. [59–63], Маслов Е.П. [14; 20; 22; 64; 68–70], Рубинович Е.Я. [41; 42], Сысоев Л.П. [71], Шайкин М.Е. [72].

Так же важный вклад в развитие этой области науки внесли такие выдающиеся отечественные ученые, как академик РАН Якушенко Е.И. [52–54], Гурьев Ю.В [52; 54; 62; 73–75] и, конечно, Миллер Б.М. [76–82].

Математические постановки задач уклонения УПО от обнаружения выражаются в терминах задач вариационного исчисления или оптимального управления, а решение этих задач оптимизации опирается на интегрирование уравнений Эйлера-Лагранжа или сопряженных уравнений с учетом условия максимума функции Понтрягина.

Постановки задач уклонения от обнаружения отличаются предположениями о характеристиках физических полей, по которым происходит обнаружение, ограничениях, накладываемых на возможные траектории объекта, классами допустимых законов управления, видом критериев качества, количеством обнаружителей, объемом и характером информации, доступной конфликтующим сторонам.

Основным критерием в таких задачах является вероятность обнаружения объекта на траектории, т.е. требуется найти маршрут и закон изменения ско-

рости объекта, доставляющие минимум этой вероятности [23; 71; 72]. Основная особенность решаемых задач уклонения УПО от обнаружения состоит в том, что уровень сигнала, излучаемого объектом управления, зависит от величины текущей скорости объекта, а уровень сигнала, поступающего на вход наблюдателя (систем наблюдателей), – от текущей дистанции до объекта и особенностей среды распространения сигнала. Для описания такой зависимости в литературе применяется степенная модель

$$S \sim \frac{v^m}{r^k}$$

Величина показателя степени k является характеристикой физического поля, в котором осуществляется обнаружение [11; 12]. Величина показателя степени m характеризует зависимость уровня интенсивности излучаемого сигнала от скорости движения объекта. Такая зависимость имеет место, например, для сигналов первичного гидроакустического поля [50].

Первой задачей, которая была рассмотрена исследователями в литературе [4], была задача об оптимизации пути УПО при уклонении от обнаружения.

Задача 1.1. *Найти маршрут l из точки A в точку B , который минимизирует функционал*

$$R(l) = \int_l \frac{dl}{r^2}, \quad (1.2)$$

где r – дистанция между обнаружителем и УПО.

При этом аналитическое решение получено лишь только для случая уклонения от одиночного стационарного обнаружителя на плоскости. Для задачи с несколькими обнаружителями предложены численные алгоритмы решения. (Здесь и далее термин «стационарный обнаружитель» означает, что все его характеристики, в том числе положение в пространстве, не изменяются во времени в течение прохождения УПО по маршруту от начальной до конечной точки.) Задача об оптимизации закона уклонения УПО от одиночного стационарного обнаружителя в случае движения объекта на постоянной скорости аналитически решена в [11–13; 17; 18].

Логичным развитием рассматриваемой постановки стала задача

Задача 1.2. *Найти траекторию $(r^*(t), \varphi^*(t))$, которая минимизирует функционал*

$$R(r(\cdot), \varphi(\cdot)) = \int_0^T \frac{v^2}{r^2} dt, \quad (1.3)$$

где v – скорость УПО, r – дистанция. Граничные условия

$$r(0) = r_A, r(T) = r_B, \varphi(0) = \varphi_A, \varphi(T) = \varphi_B.$$

Время T движения по траектории из точки A в точку B задано.

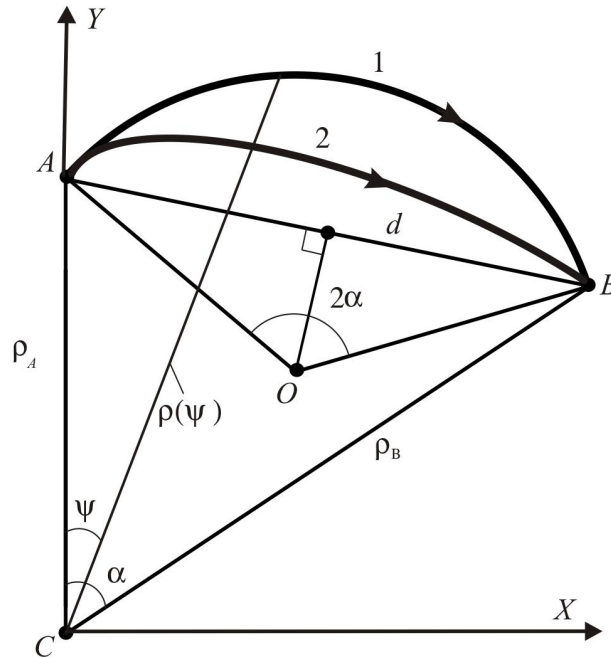


Рисунок 1.2 — Решение задач 1.1 и 1.2

В работах [4; 13; 17] получен и описан важный для практики результат, что при условии обнаружения УПО в пассивном режиме и сферическом законе распространения излучаемого объектом сигнала оптимальной траекторией является дуга окружности, описанной около треугольника, построенного на крайних точках задачи и начале координат, в котором расположен обнаружитель (см. 1.2; центр окружности лежит на срединном перпендикуляре к AB ; положение центра совпадает с вершиной равнобедренного треугольника; величина угла при этой вершине – 2α ; положение обнаружителя – точка C ; центр окружности – точка O .)

В [17–19] предложена постановка задачи с расширенным критерием оптимизации, который включает дополнительный регуляризирующий функционал. В [8] рассмотрена задача уклонения от обнаружения при наличии энергетического ограничения на движение УПО.

Дальнейшее развитие постановки обсуждаемой задачи состоит в рассмотрении движения УПО с переменной, нефиксированной скоростью, т.е. теперь

должна быть оптимизирована не только траектория уклонения, но и закон изменения скорости объекта. Задача в такой постановке исследована в [11; 20]. В [11] произведено сравнение оптимальных значений риска обнаружения для решений на постоянной и переменной скоростях для случая зависимости излучаемого УПО сигнала от первой степени скорости. Получено, что возможность оптимизации скоростного режима УПО позволяет сформировать на входе обнаружителя мгновенный уровень сигнала меньший, чем в случае постоянной скорости при одном и том же интегральном уровне принятого сигнала.

В [23] предложена замена переменных для исследуемых задач оптимизации траектории УПО при уклонении от обнаружения, которая отождествляет вещественные координаты объекта с комплексными. При такой замене задача оптимизации исходного функционала сводится к задаче поиска геодезической в комплексном пространстве, а обратное преобразование позволяет получить траекторию на декартовой плоскости.

Отдельным подклассом рассматриваемых задач являются задачи с различными траекторными ограничениями, представляющими собой препятствия, расположенные непосредственно на плоскости движения УПО. В [17], например, рассмотрена и решена задача уклонения от обнаружения УПО для случая, когда допустимая область движения объекта ограничена прямой линией.

Помимо неподвижных обнаружителей, могут также рассматриваться и движущиеся средства поиска. Подобная задача решалась в [69], где обнаружитель движется прямолинейно с постоянной скоростью. Кроме того, закон движения поискового средства может быть стохастическим, как в [83]. Одной из моделей, описывающей поиск подвижного объекта в заданном районе, является модель случайного поиска [66; 84].

Отдельные постановки рассматривают разные типы обнаружителей: сенсоры и детекторы. В таких задачах требуется минимизировать риск обнаружения сенсором при наличии запретной круговой зоны - зоны действия детектора, попадание в которую гарантированно приводит к мгновенному обнаружению УПО. Задача для одного сенсора и одного детектора рассмотрена в [20]. Развитие этой постановки для группы детекторов исследовано в статье [19]. В статье [69] поисковая система состоит из сенсора и подвижных поисковых средств. В работе [70] зона обнаружения детектора вращается, что представляет дополнительную трудность.

Для задач, в которых количество сенсоров больше одного, аналитическое решение получить не удастся, однако в статье [4] приведен численный алгоритм для произвольного числа одинаковых сенсоров, независимо принимающих излучаемый сигнал УПО. В основе предложенного подхода лежит алгоритм Дейкстры [21] для графа, построенном на квадратной сетке на плоскости. Веса ребер графа связаны с критерием оптимизации задачи, то есть риском обнаружения, накопленным УПО при прохождении соответствующего ребра (см. 1.3). Также такой подход используется в [20; 22].

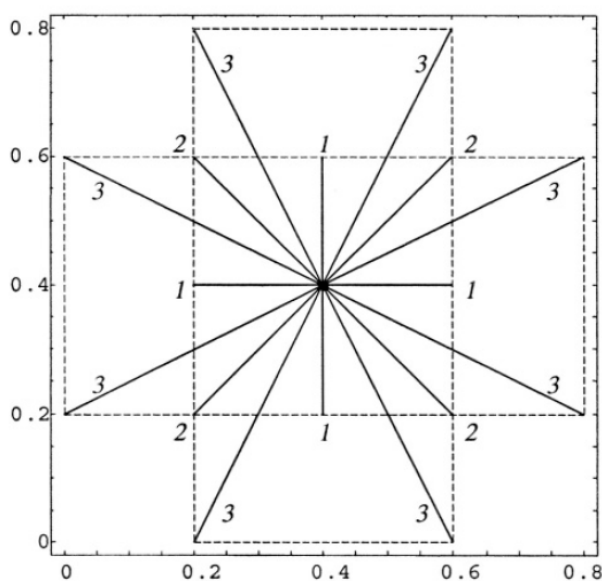


Рисунок 1.3 — Ребра графа, построенного на сетке, исходящие из каждого узла.

В общем виде этот алгоритм имеет следующий вид:

1. Вводится система координат; задаются координаты начальной и конечной точек маршрута, количество обнаружителей и их координаты; задается время движения объекта. Определяются шаг сетки и координаты узлов. Начальная и конечная точки маршрута входят в число узлов сетки.
2. По мере перемещения по сетке, для произвольного узла определяют две величины – частичная сумма (накопленное значение) и время движения от начального узла сетки до данного узла. Для начальной точки маршрута эти значения устанавливаются равными 0. В каждом узле делается шаг расчета. Вначале определяется множество возможных ребер. Возможным ребром считается ребро, ведущее в узел, из которого еще не делался шаг расчета и которое не ведет в узлы, нахо-

дящиеся вне области нахождения решения. Для каждого возможного ребра рассчитывается величина риска, который будет накоплен при переходе по этому ребру. Если ранее в этом узле уже были установлены значения указанных параметров, то сравнивается ранее установленное значение риска с новой величиной. Если новые значения меньше, то они устанавливаются для этой вершины графа.

3. Из множества узлов, для которых установлены значения параметров и из которых не делался шаг расчета, выбирается узел, которому соответствует минимальное значение риска. Если такого узла нет, т.е. время достижения узла превосходит заданное время прохождения маршрута T , то задача решения не имеет. В противном случае происходит переход к шагу 2 для нового узла.

Шаги 2 и 3 повторяются до момента достижения конечной точки маршрута.

4. Сравниваются время T_c достижения конечной точки и заданное время прохождения маршрута T . Если они различаются сильнее допустимого порога, то алгоритм перезапускается с Шага 1 с новым параметром первого интеграла задачи, отвечающего за мгновенный уровень сигнала.

Аналогичные подходы используются в статье [6], где рассматривается и решается задача автоматизированного планирования траектории боевых БПЛА в присутствии управляемых радаром ракет класса «земля-воздух». Присутствие в области движения УПО радара так же исследуется в [8].

Как уже упоминалось выше, с одной стороны, существует множество математических критериев, описывающих успешность миссий, выполняемых мобильными аппаратами: вероятность спасения, время движения по траектории, математическое ожидание интервала времени до первого обнаружения на траектории, длина пути и так далее [3; 5; 8; 12; 71; 85; 86]. С другой стороны, несмотря на такое разнообразие, существует слишком мало аналитических результатов для реализации оптимальных траекторий в задачах ТР. В работе [9] оптимальная траектория состоит из линий и круговых дуг (двумерные кривые Дубинса). В статье [5] оптимальная траектория представлена дугами окружностей или функций Лежандра, как и в [87]. Численные алгоритмы хорошо описаны в литературе [24; 25; 88].

Численные методы задают траекторию АНПА как проекцию на горизонтальную плоскость из 3D-пространства. Планирование траектории АНПА в проекции на вертикальную плоскость осуществляется с использованием, например, карты местности, на которой планировщик миссии в интерактивном режиме выбирает уровни глубины траектории, задавая опорные точки для начала и конца движения на заданной глубине. Горизонтальное движение по заданной глубине осуществляется по плоской траектории, полученной в результате решения вариационных задач, рассмотренных выше. Плавное сопряжение траекторий соседних глубин может быть выполнено полиномиальной или сплайновой аппроксимацией с учетом ограничения на кривизну. Пример бортовой реализации планировщика миссий для мобильного подводного робота описан в работе [89].

Достаточно полный обзор алгоритмов планирования пути для беспилотных аппаратов, находящих оптимальный или субоптимальный маршрут между начальной и конечной точкой в морской среде, приведен в [24–26; 88; 90–93]. Эти алгоритмы включают алгоритм кратчайшего пути на основе графа, известный как A^* , алгоритм искусственного потенциального поля, последовательное квадратичное программирование и так далее. Также часто используется подход, основанный на поведении муравьиной колонии [27; 28]. В последние годы, благодаря прогрессу нейронных сетей, все более популярными становятся подходы глубокого обучения и, в частности, глубокого обучения с подкреплением [29; 30]. Обучение с подкреплением также лежит в основе работы [94], где проблема незаконного рыболовства моделируется как игра в преследования-убегания между надзирающими автономными судами и браконьерами. Оптимальное управление преследователя достигается путем использования нечеткого алгоритма обучения «актор-критик» [95; 96]. Здесь и актер, и критик представлены нечеткими моделями для того, чтобы справиться с естественной неопределенностью постоянно меняющейся окружающей морской среды.

1.4 Численные алгоритмы планирования траекторий

Дискретная задача планирования пути с вычислительной точки зрения – это NP - трудная задача, цель которой заключается в нахождении непрерывного оптимального пути, связывающего начальное и конечное состояние системы. Дискретность задачи обусловлена дискретностью пространства, в котором происходит движение. Сложность задачи возрастает с увеличением числа степеней свободы системы.

Решение о выборе оптимального пути принимается на основе критерия оптимизации, который должен быть минимизирован, при наличии различных ограничений и условий, накладываемых на движение объекта (например, когда требуется найти кратчайший путь между конечными точками или минимальное время, за которое можно пройти путь без столкновений).

Далее перечислены основные алгоритмы, используемые в современных решениях для планирования пути в реальном времени. Новые исследования основываются на этих алгоритмах в поиске дополнительной вычислительной производительности и эффективности.

1. Алгоритм Дейкстры

Алгоритм Дейкстры [97] работает путем решения подзадач, вычисляющих кратчайший путь от источника к вершинам графа среди ближайших к источнику вершин. Он находит следующую ближайшую вершину, сохраняя новые вершины в очереди и сохраняя только одну промежуточную вершину, так что может быть найден только один кратчайший путь.

Традиционный алгоритм Дейкстры опирается на жадную стратегию планирования пути и используется для поиска кратчайшего пути в графе, веса ребер которого связаны с критерием оптимизации задачи. Существуют различные модификации алгоритма Дейкстры [98; 99], направленные на поиск альтернативных маршрутов в ситуациях, когда затраты на генерацию оптимальных кратчайших путей значительны. Эти модифицированные алгоритмы вводят различные компоненты в классический алгоритм в виде, например, вероятностей перехода на соседние ребра графа. Эта техника помогает преодолеть вычислительные

недостатки в эталонном алгоритме, поддерживая его использование в новых приложениях.

Можно обобщить, что алгоритм Дейкстры лучше всего подходит для стационарной среды и/или глобального планирования пути, так как большинство необходимых данных заранее определены для вычисления кратчайшего пути; однако существуют приложения, в которых алгоритм Дейкстры используется для динамически меняющихся сред. В этом случае среда частично или полностью неизвестна, и поэтому информация об узлах относительно препятствий вычисляется на лету. Это называется локальным планированием, а алгоритм Дейкстры запускается для оценки кратчайшего пути.

2. Алгоритм A^*

Алгоритм A^* - это популярный эвристический алгоритм планирования пути обхода графа [100; 101]. A^* работает аналогично алгоритму Дейкстры, за исключением того, что он направляет свой поиск в сторону наиболее перспективных состояний, что потенциально позволяет сэкономить значительное время вычислений. A^* наиболее широко используется для поиска субоптимального решения на графе.

Целевая функция алгоритма может быть адаптирована к конкретной задаче. A^* похож на алгоритм Дейкстры в том, что он работает на основе дерева путей с наименьшей стоимостью от начальной точки до конечной целевой точки, но в функции стоимости есть эвристическая добавка.

Алгоритм A^* широко используется в игровой индустрии, и с развитием приложений искусственного интеллекта алгоритм A^* был усовершенствован и адаптирован для них, включая планирование траектории движения роботов и городской интеллектуальный транспорт.

У A^* алгоритма существует множество вариаций и улучшений, большинство из которых связаны с конкретным выбором эвристической добавки в целевой функции. Популярными эвристическими функциями являются евклидово расстояние, манхэттенское расстояние и диагональное расстояние.

3. Алгоритм D^*

Эффективное планирование пути в частично известных и динамически меняющихся средах становится все более важным, например, для автоматизированных транспортных средств. Для решения этой проблемы применяется алгоритм D^* (или Dynamic A^*) [102; 103], который используется, например, для генерации пути без столкновений при наличии движущихся препятствий. D^* - это алгоритм инкрементального поиска, который частично восстанавливает карту уровней целевой функции по ранее рассчитанной.

Алгоритм D^* и его варианты могут быть использованы для любой задачи оптимизации пути где целевая функция, зависящая от пути, изменяется во время движения УПО к цели. D^* наиболее эффективен, когда эти изменения обнаруживаются ближе к текущему узлу в графе поиска. Алгоритм D^* имеет широкий спектр применения, включая планирование миссии планетарного ровера.

4. Алгоритм RRT

Алгоритмы типа A^* , которые обсуждались выше, являются статическими по своей природе и требуют структуру в виде графа, указанную заранее. Давайте теперь обсудим динамические алгоритмы, такие как RRT (Rapidly-Exploring Random Trees) [104; 105], которые не требуют предварительного задания структуры для поиска. В этом алгоритме дерево поиска расширяется во всех направлениях и, основываясь на весах, присвоенных каждому узлу, создает путь от начала до цели. RRT были введены для решения широких классов задач планирования пути. Они были специально разработаны для работы с неголономными ограничениями (ограничениями, которые не интегрируемы в позиционные ограничения).

RRT расширяются путем быстрой случайной выборки точек пространства, растут от начальной точки и расширяются до тех пор, пока дерево не окажется достаточно близко к конечной точке маршрута. На каждой итерации дерево расширяется до ближайшей вершины от случайно сгенерированной вершины. Эта ближайшая вершина выбирается в соответствии с метрикой расстояния, которое может быть евклидовым, манхэттенским или любым другим.

Поскольку алгоритмы RRT способны справляться с неголономными ограничениями, они могут быть применимы практически к любой колесной системе.

5. Генетический алгоритм

Дискретные алгоритмы планирования пути, такие как алгоритмы на основе сетки и потенциальных полей, требуют значительной производительности процессора и/или значительного объема памяти. Генетические алгоритмы помогают преодолеть такие ограничения [106; 107]. Например, генетические алгоритмы могут применяться с тем преимуществом, что такие алгоритмы охватывают большое пространство поиска и используют минимум памяти и ресурсов процессора. Они также способны адаптироваться к изменяющимся условиям окружающей среды.

Поскольку алгоритм также применим к динамическим средам, оптимальное решение которое находит путь между двумя точками без столкновений, должно постоянно обновляться в соответствии с изменениями окружающей обстановки. В этом случае эволюционные методы сходятся к оптимальному решению. Все возможные решения представлены в виде особей популяции, каждый ген которой представляет собой параметр. Особи популяции формируются полным набором генов.

Новое поколение формируется путем отбора лучших особей из родительского поколения и применения генетических операторов, таких как кроссовер и мутация, для поиска дополнительных решений. Каждое потомство из нового поколения тестируется с помощью фитнес-функции, соответствующей данной проблеме. Из всех потомков лучшие особи выбираются в качестве родителей следующего поколения. Фитнес-функция используется для направления симуляции в сторону оптимальных решений.

6. Алгоритм муравьиной колонии

Исследователи компьютерных наук и биологи черпали вдохновение в природе для разработки алгоритмов оптимизации планирования пути. Алгоритм оптимизации муравьиной колонии (АМК) [28], который основан на эвристическом подходе, вдохновленном коллективным поведением прокладывающих тропы муравьев для поиска кратчайшего и

свободного от столкновений пути, является одним из таких производных алгоритмов. Этот алгоритм был впервые предложен Марко Дориго в его докторской диссертации «Муравьиная система: колония сотрудничающих агентов» [108] в 1992 году для моделирования поиска пищи муравьями в теории муравьиной системы.

В соответствии с различными постановками задач, было разработано множество алгоритмов, которые являются вероятностными эвристическими алгоритмами для поиска кратчайшего пути. Когда муравьи ищут пищу, они выделяют по дороге химические вещества, называемые феромонами. Следующие муравьи выбирают подходящий маршрут в соответствии с концентрацией феромонов, оставленных предыдущими муравьями, и вероятность выбора определенного пути для всех муравьев одинакова. Когда концентрация существующего феромона выше, то вероятность того, что муравьи выберут этот путь, также становится выше. Однако концентрация феромона снижается в результате испарения. Когда количество поисков путей увеличивается, более короткий путь будет иметь более высокую концентрацию феромона потому что больше муравьев посетили этот путь, в то время как концентрация феромона на других путях будет снижаться, так как муравьи посещают его реже и происходит естественное испарение феромонов. Это означает, что муравьи могут искать в соответствии с информацией о феромонах, чтобы двигаться в направлении пути с меньшим расстоянием. Существует несколько вариантов алгоритма муравьиной колонии, которым посвящено множество исследований.

1.5 Выводы по Главе 1

В данной главе проведен обзор различных постановок задач планирования траектории движения УПО. Кратко изложена научная история развития таких постановок. Приведен анализ современных приложений рассматриваемых задач для управления БПЛА и АНПА, который показывает, что данные задачи являются актуальными в виду развития беспилотников самого разного назначения.

Приведен анализ основных наиболее распространенных в литературе постановок задач уклонения УПО от обнаружения, а так же численные алгоритмы планирования траекторий, на основании чего можно сделать вывод, что большинство статей фокусируются на численных решениях задач в виду сложности получения аналитических решений. Тем самым подтверждается важность разработки аналитических моделей и методов планирования траекторий, которые являются темой исследования данной диссертационной работы.

Глава 2. Задачи планирования траектории УПО при уклонении от одиночного обнаружителя с учетом ограничений на длину и кривизну траектории

2.1 Математическая модель обнаружителя

В данном подразделе рассматриваются особенности функционирования обнаружителей, принимающих сигнал подвижных объектов. На примере обнаружителя, функционирующего в водной среде, рассмотрена математическая модель приема сигнала гидрофонной антенной решеткой, построены статистики и описаны пороговые правила, на основании которых обнаружитель принимает решение об обнаружении подвижного объекта, а так же формализован функционал риска обнаружения, на основании которого далее исследуются задачи планирования траектории УПО, обладающего однородной (Глава 2) и неоднородной индикатрисами излучения (Глава 3). Результаты Главы 2 отражены в статьях [15; 84; 87; 109].

2.1.1 Особенности приема широкополосных сигналов антенными решетками

Антенная решетка с N_H приемными элементами представляет собой многоканальное приемное устройство с выходными сигналами $x_i(t)$, $i = 1, \dots, N_H$, вектор которых $\mathbf{x}(t)$ представлен во временной и частотной областях соотношениями

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \int_{-\infty}^t \mathbf{h}(t - \tau) \mathbf{s}(\tau) d\tau + \xi(t), \\ \mathbf{X}(\omega) &= \mathbf{M}(\omega) \mathbf{S}(\omega) + \xi(\omega).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Функция $\mathbf{h}(\cdot)$ характеризует эффекты распространения сигналов $\mathbf{s}(t)$, генерируемых источником, а также эффекты возможных искажений, вносимых приемными элементами. Фронт волны, принятой в дальней зоне, считается плоским, и тогда сигнал $\mathbf{s}(t)$ становится скалярной функцией времени. Волновой

фронт достигает принимающие элементы не одновременно, но с задержками $\tau_i = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i)/c$, где \mathbf{n} – единичный вектор направления волнового фронта, \mathbf{r}_i – координатный вектор i -ого элемента антенны и c – скорость распространения сигнала. В недисперсионной среде матрица $\mathbf{h}(\cdot)$ становится вектором с компонентами $h_i(t) = \delta(t - \tau_i)$, которые отражают только временную задержку.

В двумерной задаче векторы \mathbf{n} , \mathbf{r} расположены в одной плоскости и предполагается, что прием осуществляется на линейной эквидистантной решетке с межэлементным расстоянием d , расположенной вдоль оси Ox , а угол между \mathbf{n} и осью Oy равен θ . Сигналы от различных элементов решетки взвешиваются, вообще говоря, комплексными весами w_i , $i = 1, \dots, N_H$ и суммируются. Частотная характеристика такой антенной решетки имеет вид

$$H(j\omega, \theta) = \sum_{i=1}^{N_H} w_i e^{-j(i-1)\psi},$$

$$\psi = 2\pi(d/\lambda) \sin \theta, \quad \lambda = 2\pi c/\omega.$$

Если антенный массив настроен на частоту ω_0 принимаемого сигнала, то функция $H(j\omega_0, \theta) = A(\theta) = \sum_{i=1}^{N_H} w_i e^{-j(i-1)\psi}$ зависит от угла θ . Более того, она определяет нормированную диаграмму направленности излучения антенной решетки $G(\theta) = 10 \log(|A(\theta)|^2/N_H^2)$ (в смысле мощности). В дисперсной среде сигнал $\mathbf{s}(t)$ в уравнении (2.1) представляет собой вектор с компонентой $s_i(t)$ на входе i -го элемента антенны.

Если сигнал $s_i(t)$ имеет несущую частоту $f_i \neq f_0$, $i = 1, \dots, N_H$, то, вообще говоря, невозможно настроить решетку одновременно на каждую из этих частот сигнала. Этот факт определяет различие в методах приема узкополосных и широкополосных сигналов на антенные решетки. При широкополосном приеме сигнал $s_i(t)$, принятый i -ым антенным элементом, подается на поперечный фильтр с регулируемыми для него амплитудно-частотными и фазово-частотными характеристиками, причем для каждого канала имеется свой фильтр. Если последний синтезирован на основе многоленточной линии задержки (с задержкой Δ_i между соседними ответвителями), то выбор значения Δ_i зависит от частотного поддиапазона сигнала $s_i(t)$, который обрабатывает этот фильтр.

Рассмотрим некоторый канал массива, который обрабатывает частотно-ограниченную часть $[-F, F]$ спектра входного сигнала. Преобразование Фурье

$S(f)$ выходного сигнала такого фильтра имеет ограниченную базу. По теореме Котельникова о выборке, дискретный набор точек $s(i) := s(t_i)$, определяемый формулой

$$s(i) = \int_{-F}^F S(f) e^{j2\pi f i \Delta t} df, \quad (2.2)$$

достаточен для восстановления функции из этих точек (Δt здесь обозначает интервал между последовательными элементами выборки). А именно, достаточно положить

$$S(f) = \Delta t \sum_{i=-\infty}^{\infty} s(i) e^{-j2\pi f i \Delta t}. \quad (2.3)$$

Аналогично, функция $s(t)$ может быть восстановлена из дискретной последовательности $s(i)$ по той же теореме. В частности, если $t = k\Delta t$, то имеем $s(k\Delta t) = \Delta t s(k)2F = s(k)$. В промежуточных точках использование выражения вида $\sin t/t$ служит интерполяционной схемой, которая восстанавливает $s(t)$ по значениям $s(i)$.

Для компьютеров использование такого метода не совсем удобно. Желательно иметь несколько иную форму преобразования Фурье, в которой значения сигнала так же задаются дискретно, но пределы суммирования конечны как в прямом, так и в обратном преобразовании Фурье. Такая форма используется в теории быстрого преобразования Фурье (БПФ), где временная последовательность $s(i)$, $i = 0, 1, \dots, N_0 - 1$ и ее частотный аналог $S(k)$, $k = 0, 1, \dots, N_0 - 1$ заданы формулами

$$S(k) = \Delta t \sum_{i=0}^{N_0-1} s(i) e^{-j \frac{2\pi i k}{N_0}}, \quad s(i) = \frac{1}{N_0 \Delta t} \sum_{k=0}^{N_0-1} S(k) e^{j \frac{2\pi i k}{N_0}}, \quad (2.4)$$

где $S(k) := S(f_k)$, $f_k = \frac{k}{N_0 \Delta t}$.

Алгоритм БПФ может быть представлен в матричной нотации

$$\mathbf{S} = \mathbf{W} \mathbf{s}, \quad (2.5)$$

где \mathbf{s} – векторное представление последовательности $s(i)$, $i = 0, 1, \dots, N_0 - 1$, а \mathbf{S} – векторное представление последовательности $S(k)$, $k = 0, 1, \dots, N_0 - 1$ и \mathbf{W}

– унитарная матрица с элементами

$$W_{N_0}^{ik} = \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{N_0} ik \right\}. \quad (2.6)$$

Из этого факта следует эквивалентность результатов, полученных с использованием временного и частотного представлений данных. В частности, если \mathbf{s} - случайный вектор гауссовских временных выборок, то вектор \mathbf{S} в уравнении (2.5) частотных выборок его Фурье-образа также будет гауссовским. Пересчет ковариационных матриц из одного представления в другое упрощается благодаря унитарности матрицы перехода. В данной работе оба представления используются в равной степени. В частности, легко пересчитывается такой важный параметр в задачах обнаружения и оценки сигналов, как отношение сигнал/шум.

Наконец, последнее замечание касается индикатрисы рассеяния для объекта, излучающего сигнал. Индикатриса зависит от курсового угла объекта. Перемножая индикатрису рассеяния и диаграмму излучения приемной антенны, получаем функцию $W(\omega, \theta, \phi)$, зависящую от частоты и двух угловых переменных, которая определяет силу цели в точке приема. Можно показать, что для случая пространственной (а не только плоской) задачи, функция $W(\omega, \theta, \phi)$ может быть представлена полиномами Чебышева с коэффициентами $g_{mn}(\omega)$ в зависимости от частоты. Коэффициенты $g_{mn}(\omega)$ загружаются в виде таблиц из базы данных для всего набора рабочих частот станции мониторинга. Частный случай задачи уклонения для УПО с неоднородной аналитической индикатрисой излучения рассмотрен в Главе 3.

2.1.2 Вероятность необнаружения при пассивном наблюдении

Вероятность необнаружения УПО на выбранной траектории с заданным законом скорости может быть охарактеризована вероятностью того, что за время прохождения всего маршрута он не будет обнаружен ни в одном такте. Такая вероятность обозначается P_{nd} и будет называться вероятностью необнаружения УПО на траектории. Обозначим как T_0 время прохождения УПО

всей траектории, а продолжительность такта будет ΔT . Тогда всю траекторию можно разделить на $N = \frac{T_0}{\Delta T}$ сегментов, на каждом из которых принимается решение об отсутствии объекта и вычисляются соответствующие вероятности $P_{nd}^{(j)}, j = 1, \dots, N$. Затем, в предположении статистической независимости сигналов на каждом сегменте, один из простейших вариантов вероятностной меры на траектории определяется как произведение вероятностных мер на сегментах траектории

$$P_{nd} = \prod_{j=1}^N P_{nd}^{(j)}. \quad (2.7)$$

В случае нескольких обнаружителей, берется произведение выражений вида (2.7) по всем имеющимся обнаружителям [6; 14; 71; 72]. Таким образом, критерием в задаче формализации концепции необнаружения УПО является формула (2.7). Теперь задача заключается в построении оптимальной траектории и оптимального закона изменения скорости УПО, максимизирующих вероятность необнаружения УПО P_{nd} .

Для сигнала в случае пассивного режима элементы антенны описываются формулой

$$\mathbf{x}(t) = \delta \cdot \mathbf{s}(t) + \xi(t), \quad t = 1, \dots, N_T,$$

где $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{s}(t)$, $\xi(t)$ – входные гауссовский сигнал, сигнал объекта и шум, соответственно, а $N_T = \frac{\Delta T}{\Delta t}$ – число дискретных временных выборок. Здесь $\delta = 0$ в случае гипотезы H_0 (сигнал УПО отсутствует) и $\delta = 1$ в случае альтернативы H_1 (сигнал УПО присутствует).

Если пеленг (с углом θ) на УПО не совпадает с нормалью к линии антенны и он известен, то входной сигнал гидрофона имеет вид

$$x^{(k)}(t) = s(t - (k - 1)d \sin \theta / c) + \xi^{(k)}, \quad k = 1, \dots, N_H,$$

где d – расстояние между элементами антенны, c – скорость звука в воде и N_H – количество гидрофонов. Этот сигнал на k -м гидрофоне является функцией времени и после дискретизации по времени превращается в вектор

$$\mathbf{y}^{(k)} = (y^{(k)}(t_1), y^{(k)}(t_2), \dots, y^{(k)}(t_i), \dots, y^{(k)}(t_{N_T}))$$

размера N_T . Ковариационная матрица этого вектора равна сумме ковариационных матриц $K_s + K$ сигнала и шума соответственно, где в силу независимости временных выборок шума матрица становится диагональной, а матрица сигнала от объекта, в силу предполагаемой стационарности, является матрицей Теплица с элементами

$$k_{s,(l,k)}^t(i) = \mathbb{E}[s(t_i + l \Delta\tau)s(t_i + k \Delta\tau + i\Delta t)],$$

где пара индексов (l,k) фиксирует номера гидрофонов, а $i\Delta t$ соответствует временному сдвигу сигналов при дискретизации по времени с шагом $\Delta t = t_{i+1}$. Аналогично, $\Delta\tau = d \sin \theta / c$ означает межэлементную задержку в эквидистантном линейном массиве, когда волна падает под углом θ . Временная последовательность векторов \mathbf{Y}_t в количестве N_H штук может быть представлена в виде одного вектора-столбца

$$\mathbf{Y}_t = (\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(N_H)})^T$$

с $N_T N_H$ элементами. В современных средствах обнаружения с линейными антенными массивами входящий сигнал часто предварительно обрабатывается в приемном тракте с помощью БПФ. Рассмотрим детектор, который выполняет БПФ временной дискретизации сигналов, поступающих от гидрофонов линейной антенны. В результате мы получаем выборку гауссовских центрированных комплексных случайных векторов $\mathbf{x}(f)$, $f = 1, \dots, N_F$ размерности, равной числу гидрофонов N_H в антенне. Дальнейшая обработка принятого сигнала предполагается не во временной, а в частотной области, так как в случае широкополосного приема можно выделить частотные диапазоны, наиболее информативные для принимаемого полезного сигнала. Поэтому БПФ применяется к временным компонентам вектора \mathbf{Y}_t .

После преобразования БПФ сигнал наблюдения описывается как

$$\mathbf{Y}_f = (\mathbf{Y}^{(1)}(f), \dots, \mathbf{Y}^{(N_H)}(f))^T, \quad f = 1, \dots, N_F.$$

Детектор работает по пороговому принципу, согласно которому наблюдения, полученные за один такт, преобразуются в решающую статистику, сравниваемую с порогом. Если порог превышен, принимается решение о наличии

объекта. Ложная тревога - это когда порог превышен при отсутствии объекта. Такое событие является случайным, а порог выбирается из условия, что вероятность ложной тревоги равна заданному малому числу α ($0 < \alpha < 1$).

После предварительной обработки на каждом гидрофоне (полосовая фильтрация, сдвиг по времени входного сигнала, выборка по времени непрерывного сигнала и БПФ из них), входной сигнал для принятия решения представляет собой набор случайных векторов-столбцов $\mathbf{Y}^{(k)}(f)$, $k = 1, \dots, N_F$ с размерностью равной количеству гидрофонов N_H . Более того, $\mathbf{Y}^{(k)} = \xi^{(k)}$ в случае гипотезы и $\mathbf{Y}^{(k)} = \mathbf{S}^{(k)} + \xi^{(k)}$ в случае альтернативы. $(N_F N_H)$ -вектор $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_f$ собран из комплексных векторов $\mathbf{Y}^{(1)}, \dots, \mathbf{Y}^{(N_H)}$. Тогда отношение правдоподобия для гауссовского вектора \mathbf{Y} можно определить как [110]

$$\Lambda = \sqrt{\frac{\det K_\xi}{\det(K_s + K_\xi)}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{Y}^* [K_\xi^{-1} - (K_s + K_\xi)^{-1}] \mathbf{Y} \right\}, \quad (2.8)$$

где K_ξ – ковариационная матрица случайного вектора \mathbf{Y} частотных составляющих сигнала в случае гипотезы H_0 , и $K_s + K_\xi$ – ковариационная матрица вектора в случае альтернативы H_1 . Предполагая независимость шума на различных гидрофонах, ковариационные матрицы могут быть представлены в блочной форме

$$K_\xi = \begin{pmatrix} K & O & O & \dots & O \\ O & K & O & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & O & \dots & K \end{pmatrix}, \quad K_s = \begin{pmatrix} K_s^{11} & K_s^{12} & \dots & \dots & K_s^{1N_F} \\ K_s^{21} & K_s^{22} & \dots & \dots & K_s^{2N_F} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_s^{N_F 1} & K_s^{N_F 2} & \dots & \dots & K_s^{N_F N_F} \end{pmatrix},$$

где K – ковариационная матрица шума, одинакового на каждом из частотных каналов процессора антенной решетки, а K_s^{IJ} – ковариационная матрица Теплица векторного сигнала $\mathbf{s}(f)$ от объекта с элементами

$$k_{s,(l,k)}^f(i) = \mathbb{E}[s(f_i + l \Delta u) s(f_i + k \Delta u + i \Delta f)], \quad (2.9)$$

где $\Delta f = 1/\Delta t$, $\Delta u = 1/\Delta \tau$ и O – квадратная нулевая матрица. Для простоты предполагается, что сигнал \mathbf{s} стационарен. Тогда ковариационная матрица сигнала \mathbf{s} может быть представлена как $K_s = \sigma_s^2 R_s$, где R_s – нормированная ковариационная матрица, а σ_s^2 – дисперсия сигнала, излучаемого объектом.

2.1.3 Вероятность необнаружения при пассивном наблюдении в случае малого отношения сигнал/шум

Эрмитова форма в уравнении отношения правдоподобия (2.8) сокращается до

$$\mathbf{Y}^*[K_\xi^{-1} - (K_\sigma + K_\xi)^{-1}]\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^*(K_\xi^{-1}K_\sigma K_\xi^{-1}(I + K_\sigma K_\xi^{-1})^{-1})\mathbf{Y},$$

что позволяет в случае малого отношения сигнал/шум существенно упростить это выражение, приведя его к виду

$$Q(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}^*(K_\xi^{-1}K_\sigma K_\xi^{-1})\mathbf{Y}.$$

Тогда в дальней зоне обнаружения отношение правдоподобия аппроксимируется как функция статистики [111]

$$Q = \sum_{k=1}^{N_H} \sum_{f=1}^{N_F} \mathbf{Y}^{(k)*}(f)W(f)\mathbf{Y}^{(k)}, \quad (2.10)$$

где $W(f) = K_\xi^{-1}(f)R_s(f)K_\xi^{-1}(f)$.

В этом случае отношение правдоподобия является монотонно неубывающей функцией статистики Q и существует равномерно наиболее мощный критерий для проверки гипотезы H_0 против H_1 . Этот критерий заключается в сравнении статистики Q из уравнения (2.10) с порогом h , выбранным из условия, что вероятность ложной тревоги равна заданному числу α : $P(Q > h|H_0) = \alpha$.

В силу центральной предельной теоремы распределение вероятностей статистики в уравнении (2.10) приблизительно нормально с мат. ожиданием $E[Q|H_0]$ и дисперсией $D[Q|H_0]$ в случае гипотезы H_0 (полезного сигнала нет) и с ожиданием $E[Q|H_1]$ и дисперсией $D[Q|H_1]$ в случае альтернативы H_1 . При расчете вероятности обнаружения УПО предполагается, что пеленг на УПО известен. В этом случае вероятность того, что УПО не будет обнаружен в следующем цикле, определяется как

$$P(Q \leq h|H_1) = \Phi \left(\frac{\sqrt{D[Q|H_0]}}{\sqrt{D[Q|H_1]}} \Phi^{-1}(1 - \alpha) - \frac{E[Q|H_1] - E[Q|H_0]}{\sqrt{D[Q|H_1]}} \right), \quad (2.11)$$

где Φ – функция стандартного нормального распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt. \quad (2.12)$$

В силу уравнения (2.10) верны следующие выражения для распределения моментов статистики Q . Для математических ожиданий:

$$\mathbb{E}[Q|H_1] - \mathbb{E}[Q|H_0] = \sum_{f=1}^{N_F} \text{tr}[W(f)\sigma_s^2 R_s(f)], \quad (2.13)$$

Для дисперсий в случае гипотез H_0 и H_1 :

$$D[Q|H_0] = 2 \sum_{f=1}^{N_F} \text{tr}[W(f)K_\xi(f)]^2, \quad (2.14)$$

$$D[Q|H_1] = 2 \sum_{f=1}^{N_F} \text{tr}[W(f)(\sigma_s^2 R_s(f) + K_\xi(f))]^2. \quad (2.15)$$

С учетом уравнений (2.13) – (2.15) формула (2.11) представима в виде

$$P(Q \leq h|H_1) = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(1 - \alpha) \sqrt{\sum_{f=1}^{N_F} \text{tr}[W(f)K_\xi(f)]^2}}{\sqrt{\sum_{f=1}^{N_F} \text{tr}[W(f)(\sigma_s^2 R_s(f) + K_\xi(f))]^2}} - \frac{\sum_{f=1}^{N_F} \text{tr}[W(f)\sigma_s^2 R_s(f)]}{\sqrt{2 \sum_{f=1}^{N_F} \text{tr}[W(f)(\sigma_s^2 R_s(f) + K_\xi(f))]^2}} \right). \quad (2.16)$$

В отсутствие информации о ковариациях между гидрофонами можно считать $K_\xi(f) = \sigma_\xi^2 I$, $R_s(f) = I$ (I – единичная матрица), и тогда

$$P(Q \leq h|H_1) = \Phi \left(\frac{\sigma_\xi^2 \Phi^{-1}(1 - \alpha)}{\sigma_s^2 + \sigma_\xi^2} - \frac{\sigma_s^2 \sqrt{N_F N_H}}{(\sigma_s^2 + \sigma_\xi^2) \sqrt{2}} \right). \quad (2.17)$$

Наконец, вероятность необнаружения УПО на траектории равна (при малом отношении сигнал/шум)

$$P_{nd} = \prod_j \mathbb{P}(Q_j \leq h | H_1) = \prod_j \Phi \left(\frac{\sigma_\xi^2(j) \Phi^{-1}(1 - \alpha)}{\sigma_s^2(j) + \sigma_\xi^2(j)} - \frac{\sigma_s^2(j) \sqrt{N_F N_H}}{\sqrt{2}(\sigma_s^2(j) + \sigma_\xi^2(j))} \right). \quad (2.18)$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2.1. *На i -том цикле наблюдения вероятность необнаружения УПО при пассивном наблюдении при малом отношении сигнал/шум равна*

$$P_{nd_i} = 1 - \alpha - \Phi'(\Phi^{-1}(1 - \alpha)) \cdot \left(\Phi^{-1}(1 - \alpha) + \frac{\sqrt{N_F N_H}}{\sqrt{2}} \right) \frac{\sigma_s^2(i)}{\sigma_\xi^2(i)} + o\left(\frac{\sigma_s^2}{\sigma_\xi^2}\right).$$

Доказательство. Выберем вероятность необнаружения в виде уравнения (2.17) и рассмотрим ее при малом отношении сигнал/шум

$$P_{nd} = \Phi \left(\frac{\sigma_\xi^2 \Phi^{-1}(1 - \alpha)}{\sigma_s^2 + \sigma_\xi^2} - \frac{\sigma_s^2 \sqrt{N_F N_H}}{(\sigma_s^2 + \sigma_\xi^2) \sqrt{2}} \right) = \Phi \left(\Phi^{-1}(1 - \alpha) - \left(\Phi^{-1}(1 - \alpha) + \frac{\sqrt{N_F N_H}}{\sqrt{2}} \right) \frac{\sigma_s^2}{\sigma_\xi^2} + o\left(\frac{\sigma_s^2}{\sigma_\xi^2}\right) \right). \quad (2.19)$$

Разложение в ряд Тейлора относительно малого параметра сигнал/шум приводит уравнение (2.19) к виду

$$P_{nd} = \Phi(\Phi^{-1}(1 - \alpha)) - \Phi'(\Phi^{-1}(1 - \alpha)) \cdot \left(\Phi^{-1}(1 - \alpha) + \frac{\sqrt{N_F N_H}}{\sqrt{2}} \right) \frac{\sigma_s^2}{\sigma_\xi^2} + o\left(\frac{\sigma_s^2}{\sigma_\xi^2}\right), \quad (2.20)$$

которое упрощается до выражения

$$P_{nd} = 1 - \alpha - \Phi'(\Phi^{-1}(1 - \alpha)) \cdot \left(\Phi^{-1}(1 - \alpha) + \frac{\sqrt{N_F N_H}}{\sqrt{2}} \right) \frac{\sigma_s^2}{\sigma_\xi^2} + o\left(\frac{\sigma_s^2}{\sigma_\xi^2}\right). \quad (2.21)$$

□

Общая вероятность обнаружения УПО формально соответствует вероятности наступления события обнаружения хотя бы один раз в серии из N наблюдений и для независимых событий (наблюдений) рассчитывается по формуле

$P_d = 1 - \prod_{i=1}^N P_{nd_i}$, или, если ввести понятие "риск обнаружения":

$$R = \sum_{i=1}^N R_i, \quad (2.22)$$

где $R_i = -\ln P_{nd_i}$ – риск на i -ом сегменте обнаружения. С учетом уравнения (2.19), для достаточно малого значения величины ложной тревоги α формула (2.22) принимает вид

$$R = \alpha N + \Phi'(\Phi^{-1}(1 - \alpha)) \cdot \left(\Phi^{-1}(1 - \alpha) + \frac{\sqrt{N_F N_H}}{\sqrt{2}} \right) \cdot \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_s^2(i)}{\sigma_\xi^2(i)}.$$

Умножая и деля последнее выражение на ΔT (продолжительность такта) и предполагая, что $T_0 = N\Delta T$ (время нахождения УПО на маршруте), получаем

$$R = \frac{\alpha T_0}{\Delta T} + \Phi'(\Phi^{-1}(1 - \alpha)) \cdot \left(\Phi^{-1}(1 - \alpha) + \frac{\sqrt{N_F N_H}}{\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{1}{\Delta T} \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_s^2(i)}{\sigma_\xi^2(i)} \Delta T. \quad (2.23)$$

Последняя сумма представляется в виде интеграла, который называется функционалом риска обнаружения

$$R = \int_0^{T_0} \frac{\sigma_s^2(t)}{\sigma_\xi^2(t)} dt. \quad (2.24)$$

Этот вывод совпадает с результатом, приведенным в [71] в случае одного гидролокатора для

$$\sigma_s^2 = \frac{\sigma_0^2 (v_j/v_0)^\mu r_0^2}{r^2} \gamma \text{ и } \sigma_\xi^2(t) = \text{const}. \quad (2.25)$$

с вероятностью необнаружения в форме

$$P_{nd} = \prod_j F_n \left(\frac{\chi_{1-\alpha, \xi}^2}{1 + \frac{\sigma_0^2 (v_j/v_0)^\mu r_0^2}{\sigma_\xi^2 r_j^2} \gamma} \right), \quad (2.26)$$

где χ^2 – распределение вероятности с n степенями свободы, α – вероятность ложной тревоги, γ – коэффициент затухания, r_j – расстояние от УПО до гид-

ролокатора на j такте, начиная с момента появления УПО на траектории, а v_j - постоянная скорость УПО в данном такте, $\sigma_0, \sigma_\xi, \mu, r_0, v_0$ - некоторые параметры модели. Число элементов в произведении равно числу N тактов при движении УПО по траектории.

Чтобы использовать формулу (2.23) для вычислений, необходимо убедиться в малости первого члена и оценить значение множителя, стоящего перед знаком суммы во втором члене. Зависимость $G(\alpha) = \Phi'(\Phi^{-1}(1 - \alpha)) \cdot \left(\Phi^{-1}(1 - \alpha) + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ этого множителя от вероятности ложной тревоги показана на рисунке 2.1, из которого следует, что для достаточно малых значений вероятности ложной тревоги $G(\alpha)$ также мало.

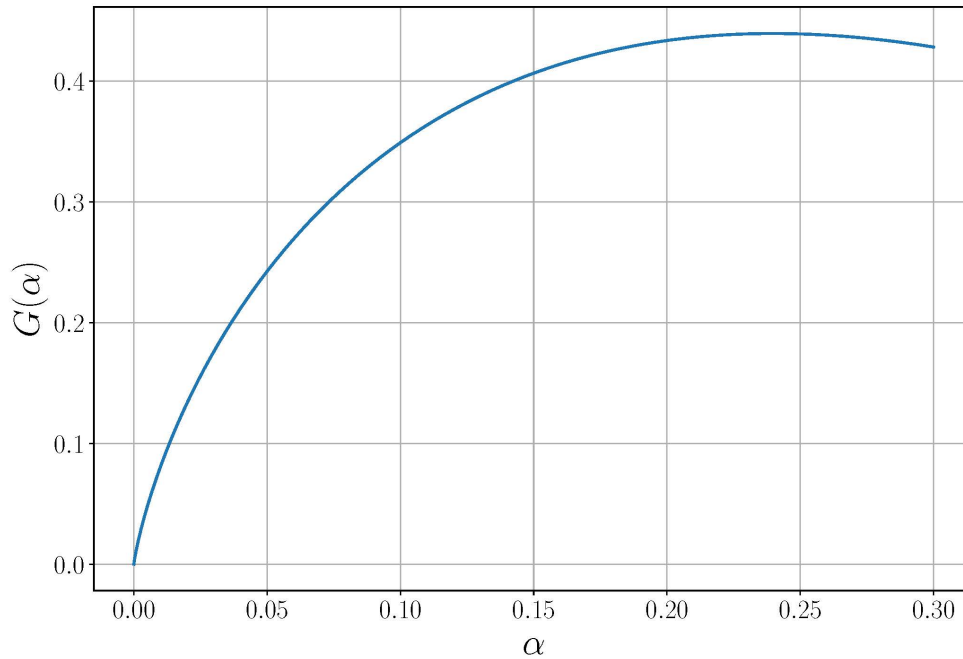


Рисунок 2.1 — Зависимость $G(\alpha)$.

Более того, для задачи планирования траектории не требуется знать точные значения параметров обработки информации, входящих в выражение (2.23), поскольку они не входят в уравнение (2.24).

Таким образом, кратко методика формирования критерия для рассматриваемых далее задач, а так же иерархия этих задач и алгоритмов их решения может быть представлена в виде такой последовательности действий:

1. Наблюдение и измерение физического сигнала.
2. Исследование статистических свойств сигналов.

3. Применение обнаружителем решающего правила для обнаружения/необнаружения объекта.
4. Формирование интегрального критерия (риска обнаружения на траектории (2.24)).
5. Разработка алгоритма планирования траектории.

2.1.4 Общая постановка задачи планирования траектории при уклонении от обнаружителя

Таким образом, задача планирования траектории движения УПО при уклонении от обнаружителя определяется как двухточечная задача вариационного исчисления для функционала риска обнаружения (2.24) или как задача оптимального управления. При этом рассматривается один неподвижный обнаружитель, расположенный в начале координат. Считаем, что начальная и конечная точка траектории A и B всегда заданы, а время движения может быть фиксировано или не фиксировано, так же как и направления векторов начальной и конечной скорости УПО.

Пусть шум σ_ξ в каждой точке траектории является постоянной величиной, не зависящей от времени. Тогда оптимизационный функционал (2.24) зависит только от мгновенного уровня сигнала $S(t)$, принимаемого гидролокатором [11]

$$\frac{\sigma_s^2(t)}{\sigma_\xi^2(t)} \sim S(t).$$

Следовательно, оптимизационная задача состоит в минимизации вдоль траектории риска обнаружения, который имеет вид

$$R = \int_0^T S(t) dt. \quad (2.27)$$

Функция $S(t)$ в общем случае зависит от многих как постоянных характеристик обнаружителя и УПО, так и мгновенных параметров движения УПО. Обнаружитель считается стационарным и неподвижным, т.е. его постоянные характеристики и положение в пространстве не меняются в процессе движения

УПО. К мгновенным параметрам движения УПО обычно относятся скорость объекта v и расстояние до обнаружителя r , которые могут входить в функцию $S(t)$ в виде дроби $\left(\frac{v^m}{r^k}\right)$ и отвечать за физические особенности излучаемого УПО сигнала, определяемые степенями m и k .

Величина показателя степени k характеризует физическое поле, по признакам которого осуществляется обнаружение [5]. Значения $k = 1, 2, 3, 4$ могут быть интерпретированы в рамках соответствующих физических моделей. Значение $k = 1$ описывает процесс затухания волн на поверхности жидкости и соответствует убыванию уровня интенсивности первичного гидроакустического поля в мелком море. Убывание уровня интенсивности первичного гидроакустического поля в глубоком море, отвечающее пассивному режиму обнаружения, а также убывание уровня интенсивности теплового поля и первичного электромагнитного поля при их распространении соответствует значению $k = 2$. Значение $k = 3$ описывает убывание уровня напряженности магнитного поля. Значение $k = 4$ соответствует убыванию уровня интенсивности вторичного электромагнитного и гидроакустического полей (активный режим обнаружения). Показатель степени m , находящийся в числителе дроби, определяет зависимость уровня интенсивности излучаемого сигнала от скорости движения объекта. Подобная зависимость присуща сигналам отвечающим первичному гидроакустическому полю [50].

На движение УПО могут быть наложены различные ограничения: ограничения на скорость движения, на длину траектории, на радиус разворота и т.д.

Рассматриваемые далее в исследовании постановки являются модификациями описанной в данном подразделе общей задачи.

2.2 Задача планирования траектории УПО при уклонении от обнаружения при наличии ограничения на длину траектории

2.2.1 Постановка задачи

Общая постановка задачи описана в подразделе 2.1.4. Пусть выполнено $k = 2$, $m = 2$, что соответствует наблюдению за УПО, например, по сигналам электромагнитного поля. Координаты начальной и конечной точек маршрута заданы в неподвижной декартовой системе координат, начало которой совпадает с позицией обнаружителя.

Задача 2.1. *Найти траекторию движения УПО и закон изменения ориентации его вектора скорости, доставляющие минимум функционалу [11]*

$$R = \int_0^T \left(\frac{v}{r} \right)^2 dt. \quad (2.28)$$

Здесь v – скорость УПО, а r – расстояние между УПО и обнаружителем. Граничные условия заданы в виде

$$x(0) = x_A, \quad x(T) = x_B, \quad y(0) = y_A, \quad y(T) = y_A,$$

где $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ – начальная и конечная точки маршрута.

Время движения T по траектории фиксировано, на модуль скорости v наложено ограничение $v = v_0 = \text{const}$, т.е. фиксирована максимальная длина траектории.

2.2.2 Оптимизация движения УПО на постоянной скорости

Предположим, что движение объекта происходит от точки A к точке B по некоторой траектории l . Тогда вместо (2.28) исследованию подвергаем функ-

ционал

$$R = \int_l \frac{v}{r^2} dl \quad (2.29)$$

при ограничении на длину траектории

$$\int_l dl \leq vT, \quad (2.30)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – радиус вектор, $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$ – элемент длины траектории.

В задаче (2.29)-(2.30) в отличие от задачи (2.28) ищется оптимальная траектория l как функция полярных координат (r, φ) , в которой зависимость от текущего времени отсутствует.

В полярных координатах функционал (2.29) и задача оптимизации принимают вид

$$R = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \frac{v}{r^2} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi \rightarrow \min_l, \quad (2.31)$$

где r' – производная r по φ . Получили задачу вариационного исчисления с ограничением

$$\int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi \leq vT.$$

Совершим замену переменной $\rho = \ln r$, $\rho \in (-\infty, +\infty)$, т.к. $r \in (0, +\infty)$. Тогда функционал (2.31) перепишется в виде

$$R(\rho(\cdot)) = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \exp(-\rho) \sqrt{1 + \rho'^2} d\varphi \quad (2.32)$$

при ограничении

$$\int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \exp(\rho) \sqrt{1 + \rho'^2} d\varphi \leq vT.$$

Подынтегральные выражения в (2.32) являются непрерывными функциями и имеют непрерывные частные производные по своим аргументам (ρ, ρ') . Поэтому для задачи вариационного исчисления вида (2.31) необходимо выполнены уравнения Эйлера, которые запишем в переменных (ρ, φ) ,

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho)) \rho'}{\sqrt{1 + \rho'^2}} \right) - \frac{d}{d\rho} \left((\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho)) \sqrt{1 + \rho'^2} \right) = 0, \quad (2.33)$$

где $\lambda \geq 0$ некоторая константа.

Поскольку функционал задачи явно не зависит от переменной φ , то для уравнений Эйлера существует первый интеграл вида

$$\begin{aligned} C_1 &= -\rho' \left(\frac{(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))\rho'}{\sqrt{1 + \rho'^2}} \right) + \left((\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))\sqrt{1 + \rho'^2} \right) = \\ &= \frac{\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho)}{\sqrt{1 + \rho'^2}}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где $C_1 > 0$ – константа.

Обозначим $C = 1/C_1$. Интегрирование уравнения (2.34) дает квадратуру

$$\varphi - \varphi_A = \int_{\rho_A}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{C^2(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))^2 - 1}}. \quad (2.35)$$

Уравнение (2.35) задает зависимость $\varphi(\rho)$ и определяет траекторию движения УПО, вышедшую из точки A . Из (2.35) и активного ограничения в (2.32) следует, что для определения констант C и λ нужно разрешить систему уравнений

$$\begin{cases} \int_{\rho_A}^{\rho_B} \frac{1}{\sqrt{C^2(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))^2 - 1}} d\rho = \varphi_B - \varphi_A, \\ \int_{\rho_A}^{\rho_B} \frac{\exp(\rho)(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))}{\sqrt{C^2(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))^2 - 1}} d\rho = \frac{vT}{C}. \end{cases} \quad (2.36)$$

Однако эта система справедлива только до выполнения условия

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = 0, \quad (2.37)$$

т.е. пока функция $\rho(\varphi)$ монотонна. Поэтому расширим систему (2.36), сделав следующие предположения. Пусть для некоторой точки Q с координатами (φ_Q, ρ_Q) выполнено условие (2.37), тогда от точки A до точки Q УПО движется в течение интервала времени T_1 , а от точки Q до точки B – в течение интервала

времени T_2

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\rho_A}^{\rho_Q} \frac{1}{\sqrt{C^2(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))^2 - 1}} d\rho = \varphi_Q - \varphi_A, \\ \int_{\rho_B}^{\rho_Q} \frac{1}{\sqrt{C^2(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))^2 - 1}} d\rho = \varphi_B - \varphi_Q, \\ C(\exp(-\rho_Q) + \lambda \exp(\rho_Q)) = 1, \\ \int_{\rho_A}^{\rho_Q} \frac{\exp(\rho)(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))}{\sqrt{C^2(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))^2 - 1}} d\rho = \frac{vT_1}{C}, \\ \int_{\rho_B}^{\rho_Q} \frac{\exp(\rho)(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))}{\sqrt{C^2(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))^2 - 1}} d\rho = \frac{vT_2}{C}, \\ T_1 + T_2 = T. \end{array} \right. \quad (2.38)$$

В системе (2.38) первое и второе уравнения отвечают граничным условиям при движении ПО от точки A к точке Q и от точки Q к точке B соответственно, третье уравнение определяет условие (2.37), выполненное в точке Q , четвертое и пятое уравнения определяют ограничения на длину траектории при движении ПО от точки A к точке Q и от точки Q к точке B соответственно, и последнее шестое уравнение определяет условие на полное время движения. Складывая первое и второе, четвертое и пятое уравнения с учетом шестого из (2.38), получаем редуцированную систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\rho_A}^{\rho_Q} \frac{1}{\sqrt{C^2(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))^2 - 1}} d\rho + \int_{\rho_B}^{\rho_Q} \frac{1}{\sqrt{C^2(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))^2 - 1}} d\rho = \varphi_B - \varphi_A, \\ C(\exp(-\rho_Q) + \lambda \exp(\rho_Q)) = 1, \\ \int_{\rho_A}^{\rho_Q} \frac{\exp(\rho)(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))}{\sqrt{C^2(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))^2 - 1}} d\rho + \int_{\rho_B}^{\rho_Q} \frac{\exp(\rho)(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))}{\sqrt{C^2(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))^2 - 1}} d\rho = \frac{vT}{C}. \end{array} \right. \quad (2.39)$$

Систему (2.39) можно упростить в случае равенства $r_A = r_B$ или, что тоже самое $\rho_A = \rho_B$. В этом случае выполнено равенство $\varphi_Q = \frac{\varphi_B + \varphi_A}{2}$. Тогда получаем систему уравнений следующего вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\rho_A}^{\rho_Q} \frac{1}{\sqrt{C^2(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))^2 - 1}} d\rho = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{2}, \\ C(\exp(-\rho_Q) + \lambda \exp(\rho_Q)) = 1, \\ \int_{\rho_A}^{\rho_Q} \frac{\exp(\rho)(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))}{\sqrt{C^2(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))^2 - 1}} d\rho = \frac{vT}{2C}. \end{array} \right. \quad (2.40)$$

Теперь требуется найти тройку (λ, C, ρ_Q) , которая является решением системы алгебро-интегральных уравнений (2.40). Заметим, что несобственные интегралы в системе (2.40) сходятся. Действительно, первый интеграл является эллиптическим интегралом Лежандра первого рода, а второй суммой двух эллиптических интегралов Лежандра первого и второго рода. Данный факт устанавливают следующие леммы.

Лемма 2.2. *Левая часть первого интеграла в (2.40) равна*

$$\int_{\rho_A}^{\rho_Q} \frac{1}{\sqrt{C^2(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))^2 - 1}} d\rho = \frac{\tilde{F}(1, k) - \tilde{F}(\xi_A, k)}{aC}, \quad (2.41)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\xi_A, k) &= \int_0^{\xi_A} \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2\xi^2)}}, \\ k &= \frac{1 - 2\lambda C^2 - \sqrt{1 - 4\lambda C^2}}{2\lambda C^2}, \\ a &= \sqrt{\frac{\lambda}{k}}, \\ \xi_A &= ar_A. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Здесь $\tilde{F}(\xi, k)$ – нормальный эллиптический интеграл Лежандра первого рода.

Доказательство. Известно, что нормальный эллиптический интеграл первого рода задается первым выражением в (2.42). Совершив линейную замену $\xi = a\eta$, приведем интеграл к виду

$$\int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2\xi^2)}} = a \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{(1 - a^2\eta^2)(1 - k^2a^2\eta^2)}}. \quad (2.43)$$

Первый интеграл в (2.40) при интегрировании по координате r принимает следующий вид

$$\int_{\rho_A}^{\rho_Q} \frac{d\rho}{\sqrt{C^2(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))^2 - 1}} = \int_{r_A}^{r_Q} \frac{dr}{\sqrt{C^2(1 + \lambda r^2)^2 - r^2}}. \quad (2.44)$$

Сравнивая знаменатели в правых частях (2.43) и (2.44), получаем систему для нахождения пары (a, k)

$$\begin{cases} k^2 a^4 = \lambda^2, \\ a^2(1 + k^2) = \frac{1}{C^2} - 2\lambda. \end{cases} \quad (2.45)$$

Поскольку λ и k положительны, то выразив a^2 из первого уравнения (2.45) и подставив во второе, получаем квадратное уравнение относительно k вида

$$\lambda k^2 - \left(\frac{1}{C^2} - 2\lambda \right) k + \lambda = 0.$$

Заметим, что $0 < k < 1$, и выберем наименьший положительный корень этого уравнения, равный

$$k = \frac{1 - 2\lambda C^2 - \sqrt{1 - 4\lambda C^2}}{2\lambda C^2}.$$

Далее находим выражение для a , а также, сравнивая постоянные множители, стоящие под интегралами в правых частях (2.43) и (2.44), определяем равенство $\eta = r$ и выражаем ξ через r . В заключение заметим, что в точке Q вследствие равенства нулю знаменателя в правой части (2.43) и (2.44) выполнено $\xi_Q = 1$. \square

Следствие 2.1. Пусть $\lambda C^2 = \theta$, тогда θ является решением уравнения

$$k = \frac{1 - 2\theta - \sqrt{1 - 4\theta}}{2\theta}, \Rightarrow \theta = \frac{k}{(k + 1)^2}, \quad (2.46)$$

где k является решением

$$\tilde{F}(1, k) - \tilde{F}(\xi_A, k) = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{2(k + 1)}. \quad (2.47)$$

Лемма 2.3. Левая часть второго интеграла в (2.40) равна

$$\begin{aligned} \int_{\rho_A}^{\rho_Q} \frac{\exp(\rho)(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))}{\sqrt{C^2(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))^2 - 1}} d\rho = \\ = \left(1 + \frac{\lambda}{k^2 a^2} \right) \frac{\tilde{F}(1, k) - \tilde{F}(\xi_A, k)}{aC} - \frac{\lambda}{k^2 a^2} \frac{\tilde{E}(1, k) - \tilde{E}(\xi_A, k)}{aC}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{E}(\xi, k) &= \int_0^\xi \frac{\sqrt{1 - k^2 \xi^2}}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi, \\ k &= \frac{1 - 2\lambda C^2 - \sqrt{1 - 4\lambda C^2}}{2\lambda C^2}, \\ a &= \sqrt{\frac{\lambda}{k}}, \\ \xi_A &= ar_A.\end{aligned}\tag{2.49}$$

Здесь $\tilde{E}(\xi, k)$ – нормальный эллиптический интеграл Лежандра второго рода.

Доказательство аналогично Лемме 2.2.

Следствие 2.2. Пусть $\lambda C^2 = \theta$, тогда θ является решением уравнения

$$k = \frac{1 - 2\theta - \sqrt{1 - 4\theta}}{2\theta},\tag{2.50}$$

где k в свою очередь есть решение

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right) (\tilde{F}(1, k) - \tilde{F}(\xi_A, k)) - \frac{1}{k} (\tilde{E}(1, k) - \tilde{E}(\xi_A, k)) = \sqrt{\frac{\lambda}{k}} \frac{v\Gamma}{2}.\tag{2.51}$$

Следствия 2.1 и 2.2, а также систему (2.40) можно записать совместно.

Следствие 2.3. Чтобы найти набор $(\lambda, \theta, \xi_A, k)$, являющийся решением (2.40), нужно решить систему уравнений

$$\left\{\begin{aligned}\tilde{F}(1, k) - \tilde{F}(\xi_A, k) &= \frac{\varphi_B - \varphi_A}{2(k+1)}, \\ \left(1 + \frac{1}{k}\right) (\tilde{F}(1, k) - \tilde{F}(\xi_A, k)) - \frac{1}{k} (\tilde{E}(1, k) - \tilde{E}(\xi_A, k)) &= \sqrt{\frac{\lambda}{k}} \frac{v\Gamma}{2}, \\ \theta &= \frac{k}{(k+1)^2}, \\ \sqrt{\frac{\lambda}{k}} r_A &= \xi_A.\end{aligned}\right.\tag{2.52}$$

Следствие 2.4. Чтобы найти набор $(\lambda, \theta, \xi_A, \xi_B, k)$, являющийся решением (2.39), нужно решить систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\tilde{F}(1,k) - \tilde{F}(\xi_A,k) - \tilde{F}(\xi_B,k) = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{k+1}, \\ \left(1 + \frac{1}{k}\right) (2\tilde{F}(1,k) - \tilde{F}(\xi_A,k) - \tilde{F}(\xi_B,k)) - \\ - \frac{1}{k} (2\tilde{E}(1,k) - \tilde{E}(\xi_A,k) - \tilde{E}(\xi_B,k)) = \sqrt{\frac{\lambda}{k}} vT, \\ \theta = \frac{k}{(k+1)^2}, \\ \sqrt{\frac{\lambda}{k}} r_A = \xi_A, \\ \sqrt{\frac{\lambda}{k}} r_B = \xi_B. \end{array} \right. \quad (2.53)$$

Следствие 2.5. Пусть $r_B > r_A$, тогда чтобы найти набор $(\lambda, \theta, \xi_A, \xi_B, k)$, являющийся решением (2.36), нужно решить систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{F}(\xi_B,k) - \tilde{F}(\xi_A,k) = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{k+1}, \\ \left(1 + \frac{1}{k}\right) (\tilde{F}(\xi_B,k) - \tilde{F}(\xi_A,k)) - \frac{1}{k} (\tilde{E}(\xi_B,k) - \tilde{E}(\xi_A,k)) = \sqrt{\frac{\lambda}{k}} vT, \\ \theta = \frac{k}{(k+1)^2}, \\ \sqrt{\frac{\lambda}{k}} r_A = \xi_A, \\ \sqrt{\frac{\lambda}{k}} r_B = \xi_B. \end{array} \right. \quad (2.54)$$

Следствия 2.3–2.5 описывают все возможные ситуации, возникающие при построении оптимальной траектории движения, кроме случая неактивного ограничения на длину траектории, когда оптимальной траекторией движения является дуга окружности, описанной вокруг треугольника OAB , где точка O – начало координат (см. [12]). Решения систем (2.52) – (2.54) определяют оптимальные значения (λ, C) , требующиеся для подстановки в уравнение движения (2.36). Действительно, в следствиях 2.3–2.4 рассмотрены симметричный и несимметричный случаи краевых условий, когда стартуя из точки A объект движется до точки B , где по траектории выполняется условие $\frac{d\rho}{d\varphi} = 0$. Далее объект движется от точки Q до точки B . Следствие 2.5 позволяет найти оп-

тимальные параметры траектории движения объекта при отсутствии точки Q на ней. Оптимальный закон изменения скорости определяется касательной к траектории движения и имеет вид

$$\begin{cases} v_x(\varphi) = \frac{\rho'(\varphi) \cos(\varphi) - \sin \varphi}{\sqrt{\rho'(\varphi)^2 + 1}} v, \\ v_y(\varphi) = \frac{\rho'(\varphi) \sin(\varphi) + \cos \varphi}{\sqrt{\rho'(\varphi)^2 + 1}} v. \end{cases} \quad (2.55)$$

2.2.3 Случай симметричных граничных условий.

В данном подразделе приводятся результаты компьютерного моделирования, подтверждающие справедливость аналитических выкладок, в случае симметричных граничных условий. Средствами языка Python был разработан программный модуль, позволяющий перебором по (λ, k) для заданных граничных условий находить набор (λ, C, ξ_A, k) , строить оптимальную траекторию и вычислять значение функционала.

На рисунке 2.2 показаны траектории движения подвижного объекта на плоскости из точки A в точку B , которые являются решениями (2.40) для случая симметричных граничных условий. Пунктирной линией показан отрезок AB . Толстой линией показаны траектории движения, на которых отмечена точка Q . На рисунке 2.2 начальной точке маршрута движения подвижного объекта соответствуют координаты $\varphi_A = 0^\circ$, $r_A = 2.5$, конечной точке – $\varphi_B = 90^\circ$, $r_B = 2.5$. На рисунке 2.2а длина траектории траектории равна $L = vT = 4$, оптимальные параметры равны $C = 1.386$, $\lambda = 0.1293$, $\theta = 0.2484$, $k = 0.8514$, $\xi_A = \xi_B = 0.9743$, на рисунке 2.2б справа – $L = vT = 5$, $C = 2.8593$, $\lambda = 0.0126$, $\theta = 0.1032$, $k = 0.1322$, $\xi_A = \xi_B = 0.7722$.

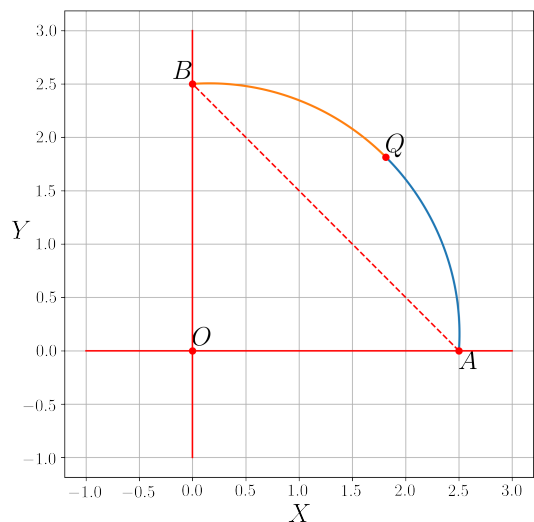
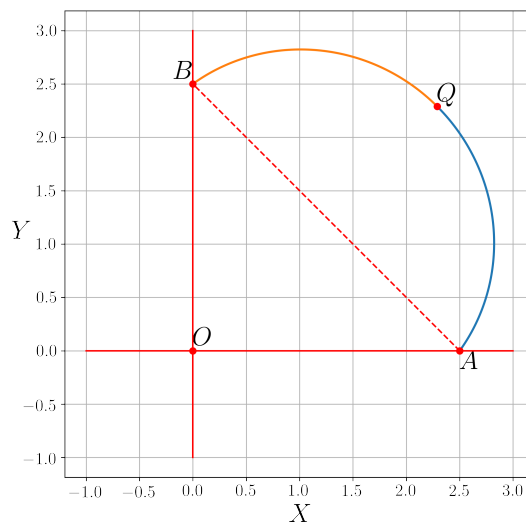
а) $vT = 4$ б) $vT = 5$

Рисунок 2.2 — Траектории движения УПО

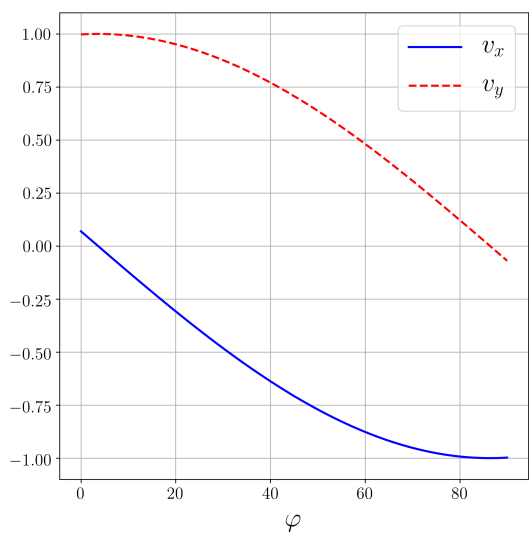
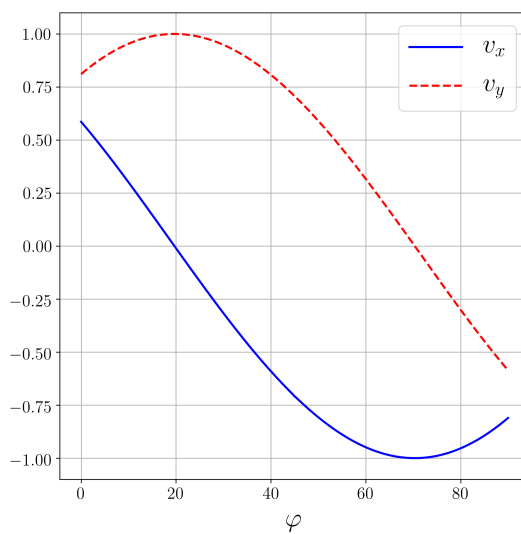
а) $vT = 4$ б) $vT = 5$

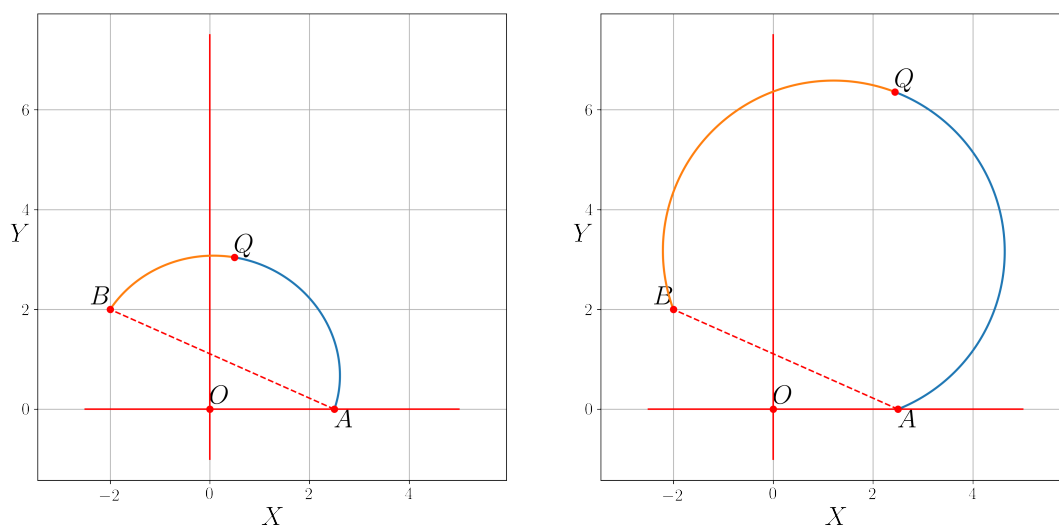
Рисунок 2.3 — Оптимальные значения проекций скорости УПО

Значение критерия качества равны на оптимальной траектории слева $R_{opt} = 0.6179$, справа $R_{opt} = 0.5687$. При отсутствии ограничения на длину траектории $R_{opt} = \frac{d_{AB}}{r_{ArB}} = \frac{\sqrt{2}}{2.5} = 0.5657$, см. [11]. Здесь d_{AB} – расстояние между точками A и B . В этом случае ограничение на длину траектории становится неактивным, если $vT > \frac{2.5\pi\sqrt{2}}{2} \cong 5.5536$. Ухудшение значения критерия при наличии ограничения происходит менее чем на 10%.

Оптимальные скоростные режимы приводятся на рисунке 2.3.

2.2.4 Случай несимметричных граничных условий.

В данном подразделе приводятся результаты компьютерного моделирования, подтверждающие справедливость аналитических выкладок, в случае несимметричных граничных условий. Средствами языка Python был разработан программный модуль, позволяющий перебором по (λ, k) для заданных граничных условий находить набор (λ, C, ξ_A, k) , строить оптимальную траекторию и вычислять значение функционала.



а) $vT = 7$

б) $vT = 16$

Рисунок 2.4 — Траектории движения УПО

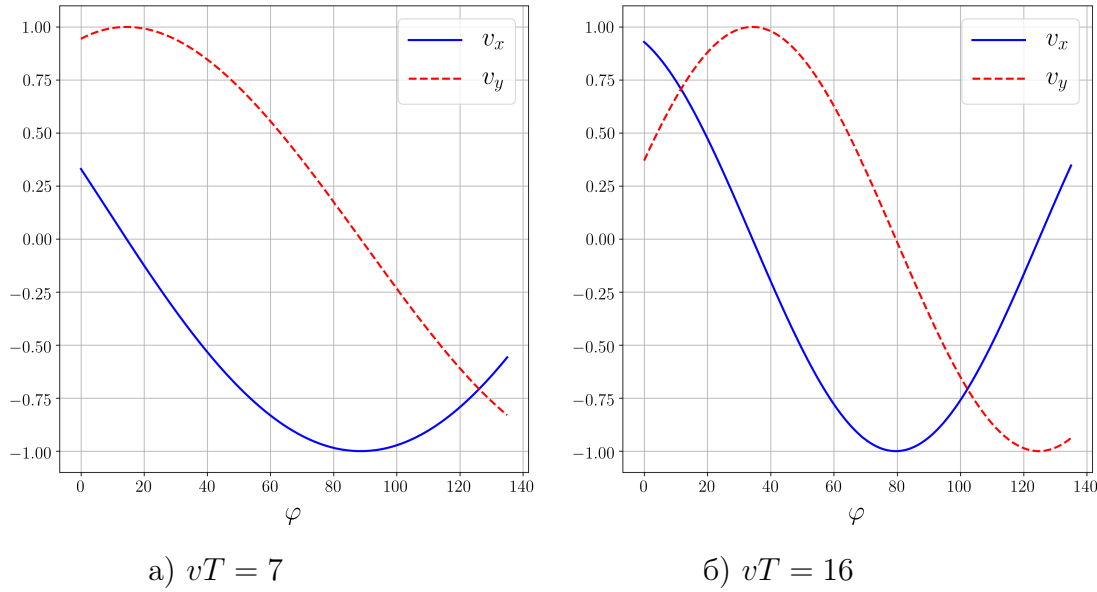


Рисунок 2.5 — Оптимальные значения проекций скорости УПО

На рисунке 2.4 показаны траектории движения подвижного объекта на плоскости из точки A в точку B , которые являются решениями (2.39). Программный модуль, разработанный для симметричных граничных условий, был преобразован для случая несимметричных условий. На рисунке 2.4 начальной точке маршрута движения подвижного объекта соответствуют координаты $\varphi_A = 0^\circ$, $r_A = 2.5$, конечной точке — $\varphi_B = 135^\circ$, $r_B = 2\sqrt{2}$. На рисунке 2.4а длина траектории траектории равна $L = vT = 7$, оптимальные параметры равны $C = 1.8154$, $\lambda = 0.0735$, $\theta = 0.2421$, $k = 0.6984$, $\xi_A = 0.8108$, $\xi_B = 0.9174$, на рисунке 2.4б — $L = vT = 16$, $C = 6.755$, $\lambda = 0.0002$, $\theta = 0.0079$, $k = 0.0081$, $\xi_A = 0.3671$, $\xi_B = 0.4154$.

Значение критерия качества равны на оптимальной траектории слева $R_{opt} = 0.8151$, справа $R_{opt} = 0.6964$. При отсутствии ограничения на длину траектории $R_{opt} = \frac{d_{AB}}{r_A r_B} = 0.696$. Ухудшение значения критерия при наличии ограничения происходит менее чем на 20%. В этом случае ограничение на длину траектории становится неактивным, если $vT > 16.04$. Оптимальной траекторией в этом случае является окружность, описанная вокруг треугольника OAB . Примеры показывают, что длина траектории является существенным фактором, который может быть учтен в постановке и соответственно в решении задачи планирования траектории подвижного объекта. В примерах проиллюстрировано, что оптимизация траектории с учетом ограничения на ее длину приводит

к незначительному увеличению критерия при том, что длина его траектории движения может быть существенно уменьшена, что в свою очередь приводит к экономии энергетических ресурсов при выполнении миссии.

Оптимальные скоростные режимы приводятся на рисунке 2.5.

2.3 Задача планирования траектории УПО при уклонении от обнаружения при наличии ограничения на кривизну траектории

2.3.1 Принцип максимума в задаче планирования маршрута движения УПО

В данном разделе рассматривается задача планирования траектории УПО 2.1.4 при ограничении на длину траектории и радиус разворота с целью минимизации накопленного вдоль траектории риска обнаружения как задача оптимального управления с заданой динамикой у УПО.

Задача 2.2. *Найти траекторию $\mathbf{r}(s)$, $\alpha(s)$ и управление $k(s)$ такие, что*

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{n}(s), \quad \mathbf{n}(s) = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s))^T \quad (2.56)$$

с граничными условиями

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_A, \quad (2.57)$$

$$\Phi(\mathbf{r}(S)) = \Phi(\mathbf{r}_B) = 0, \quad (2.58)$$

которые минимизируют интегральный функционал

$$R(\mathbf{r}(\cdot), \alpha(\cdot), k(\cdot)) = \int_0^S f(\mathbf{r}(s)) ds \rightarrow \min_{\mathbf{r}(\cdot), \alpha(\cdot), k(\cdot)}, \quad (2.59)$$

при ограничении

$$S = \int_0^S 1 ds, \quad (2.60)$$

заданной длине траектории движения УО, и ограничении на кривизну траектории:

$$\frac{d\alpha}{ds} = k(s), \quad |k(s)| \leq K. \quad (2.61)$$

Здесь $\mathbf{r}(s) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) \in \mathbb{R}^1$, $\mathbf{r}(s) \in \mathcal{C}^1(0,S)$. В качестве допустимых управлений выберем $k(s) \in \mathcal{L}^1(0,S)$.

Здесь $f(\mathbf{r}(s))$ – дважды непрерывно дифференцируемая по совокупности аргументов функция уровней риска. Критерий – криволинейный интеграл вдоль всей траектории движения УПО (ds – элемент длины траектории). В качестве терминальных могут быть выбраны, например, следующие условия, $\mathbf{r}(S) = \mathbf{r}_B$ – радиус-вектор заданной терминальной точки, или $\Phi(\mathbf{r}_B) = 0$ – уравнение границы заданного терминального множества.

Теорема 2.1. *Принцип максимума для задачи 2.2.*

Пусть выполнены условия задачи 2.2 и $\mathbf{r}^0(s)$, $\alpha^0(s)$, $k^0(s)$ являются решением задачи. Тогда найдутся $\Psi(s) = (\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s))$ и константа $\lambda \geq 0$ не равные нулю одновременно, а также константа C такие, что

$$\dot{\psi}_{1,2}(s) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}};$$

$$\dot{\psi}_3(s) = -\frac{\partial H}{\partial \alpha};$$

$$H(\mathbf{r}^0, \alpha^0, k^0, \Psi) = C \quad \text{для п.в. } s \in [0, S];$$

$$H(\mathbf{r}^0, \alpha^0, k, \Psi) \leq C \quad \forall k(s) \in [-K, K] \quad \text{и } \forall s \in [0, S];$$

где

$$H(\mathbf{r}, \alpha, k, \Psi) = (\Psi(s), (\mathbf{n}(s), k(s))^T) - \lambda - f(\mathbf{r}(s)),$$

а вектор $\Psi(S)$ – трансверсален поверхности $\Phi(\mathbf{r}(S)) = 0$.

Теорема 2.1 является модификацией Принципа максимума Понтрягина [112], сформулированного для задачи 2.2.

Для решения задачи оптимального управления 2.2 необходимо решить дополнительную задачу нахождения оптимальной траектории уклонения с ограничением на длину траектории, которая была решена выше в разделе 2.2.

2.3.2 Задача уклонения от обнаружения для УПО с динамикой машины Дубинса

Запишем Задачу 2.2 в более удобном для решения виде.

Задача 2.3. Динамика УПО имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos \theta, \\ \dot{x}_2 = \sin \theta, \\ \dot{\theta} = u, \end{cases} \quad (2.62)$$

где x_1, x_2 - координаты на плоскости, а θ - угол поворота вектора скорости.

Система координат нормирована так, что линейная скорость постоянна и равна единице, $v = 1$.

На управление наложено ограничение, связанное с максимально возможной кривизной траектории

$$|u| \leq K. \quad (2.63)$$

Объект требуется перевести из одной точки в другую, при этом в обеих заданы направления вектора скорости:

$$x_1(0) = x_{1A}, x_2(0) = x_{2A}, x_1(T) = x_{1B}, x_2(T) = x_{2B}, \theta(0) = \theta_A, \theta(T) = \theta_B. \quad (2.64)$$

Конечное время T движения нефиксировано. Движение происходит в зоне действия обнаружителя, расположенного в начале координат. Критерием оптимизации служит интегральный риск обнаружения на траектории от A до B , который с учетом условия $v = 1$, равен

$$R = \int_A^B \frac{ds}{x_1^2 + x_2^2} = \int_0^T \frac{dt}{x_1^2 + x_2^2}. \quad (2.65)$$

Применение принципа максимума непосредственно к Задаче 2.3 невозможно в виду наличия особенности у подынтегральной функции критерия оптимизации (2.65) в точке $(0,0)$. Однако с помощью замены переменных можно избавиться от этой особенности.

Задача 2.4. *Динамика УПО:*

$$\begin{cases} \dot{\rho} = e^{-\rho} \cos(\theta - \varphi), \\ \dot{\varphi} = e^{-\rho} \sin(\theta - \varphi), \\ \dot{\theta} = u, \end{cases} \quad (2.66)$$

где $\rho = \ln r$, (r, φ) - полярные координаты, θ - угол поворота вектора скорости.

Ограничение на управление:

$$|u| \leq K. \quad (2.67)$$

Краевые условия:

$$\rho(0) = \rho_A, \varphi(0) = \varphi_A, \rho(T) = \rho_B, \varphi(T) = \varphi_B, \theta_1 = \theta_A, \theta_2 = \theta_B. \quad (2.68)$$

Критерий оптимизации:

$$R = \int_0^T e^{-2\rho} dt \quad (2.69)$$

Время T нефиксировано.

Лемма 2.4. *Переход в полярные координаты (r, φ) и дальнейшая замена переменных $\rho = \ln r$ позволяет привести Задачу 2.3 к виду Задачи 2.4.*

Доказательство. В новых координатах (ρ, φ) можно записать

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (e^\rho \cos \varphi)'_t = e^\rho (\dot{\rho} \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \varphi), \\ \dot{x}_2 = (e^\rho \sin \varphi)'_t = e^\rho (\dot{\rho} \sin \varphi + \dot{\varphi} \cos \varphi). \end{cases} \quad (2.70)$$

Подставляя полученные выражения в уравнения динамики задачи (2.62), можно получить

$$\begin{cases} \dot{\rho} \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \varphi = e^{-\rho} \cos \theta, \\ \dot{\rho} \sin \varphi + \dot{\varphi} \cos \varphi = e^{-\rho} \sin \theta. \end{cases} \quad (2.71)$$

Откуда следует система для новых фазовых координат задачи ρ и φ

$$\begin{cases} \dot{\rho} = e^{-\rho} \cos(\theta - \varphi), \\ \dot{\varphi} = e^{-\rho} \sin(\theta - \varphi) \end{cases} \quad (2.72)$$

Линейная скорость объекта v после преобразования координат записывается как

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2} = e^\rho \sqrt{\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2} = 1 \quad (2.73)$$

Функционал (2.65) в новых координатах записывается как

$$R = \int_A^B \frac{ds}{r^2} = \int_0^T e^{-2\rho} dt \quad (2.74)$$

Кривизна траектории $\frac{d\theta}{ds}$, связанная с управлением u , после замены координат с учетом (2.73) не поменяла вид

$$\dot{\theta} = u. \quad (2.75)$$

□

Таким образом, переход в координатную плоскость (ρ, φ, θ) позволяет переписать постановку Задачи 2.3. Постановка 2.4 лишена недостатков первоначальной задачи, поскольку подынтегральная функция не имеет особенностей на всей области определения, бесконечное число раз непрерывно дифференцируема, а значит, можно применить принцип максимума Понтрягина.

Замечание 2.1. Функция Понтрягина Задачи 2.4 имеет вид

$$H(\rho, \varphi, \theta, u, \psi_1, \psi_2, \psi_3) = \psi_1 e^{-\rho} \cos(\theta - \varphi) + \psi_2 e^{-\rho} \sin(\theta - \varphi) + \psi_3 u - e^{-2\rho}. \quad (2.76)$$

Лемма 2.5. Функция Понтрягина для Задачи 2.3 имеет вид

$$H(x_1, x_2, \theta, u, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) = \Psi_1 \cos \theta + \Psi_2 \sin \theta + \Psi_3 u - \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}. \quad (2.77)$$

Доказательство. Замена

$$\begin{aligned} \psi_1 &= e^\rho (\Psi_1 \cos \varphi + \Psi_2 \sin \varphi), \\ \psi_2 &= e^\rho (\Psi_2 \cos \varphi - \Psi_1 \sin \varphi), \\ \psi_3 &= \Psi_3, \end{aligned} \quad (2.78)$$

приводит уравнение (2.76) к виду

$$H(\rho, \varphi, \theta, u, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) = \Psi_1 \cos \theta + \Psi_2 \sin \theta + \Psi_3 u - e^{-2\rho}. \quad (2.79)$$

Перейдя обратно к переменным (x_1, x_2) , легко получить уравнение (2.77) и утверждение леммы. □

Леммы 2.4 и 2.5 устанавливают эквивалентность необходимых условий оптимальности для двух постановок задачи, а значит, дальнейшее исследование Задачи 1.1 с функцией Понтрягина (2.77) обоснованно.

Определение 2.1. *Особым режимом в задаче оптимального управления называется такой оптимальный процесс, который удовлетворяет принципу максимума и условию $\frac{\partial H}{\partial u}(x(t), u(t), \Psi(t)) = 0$ во всех точках интервала времени ненулевой меры $[t_1, t_2]$. Управление в этом режиме называется особым управлением, а $[t_1, t_2]$ - интервалом особого управления.*

Лемма 2.6. *Оптимальный закон управления u_o^* в особом режиме для Задачи 2.3 удовлетворяет уравнению*

$$u_o^* = \frac{2(x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1)}{r^2}, \quad (2.80)$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ - модуль радиус-вектора УПО.

Доказательство. Согласно принципу максимума

$$\max_{u \in [-K, K]} H(x^*, u, \Psi) = H(x^*, u^*, \Psi). \quad (2.81)$$

Согласно виду функции Понтрягина из Леммы 2.5 с учетом ограничения на управление (2.63) и условия (2.81) получаем закон оптимального управления

$$u^* = \text{sign}(\Psi_3) = \begin{cases} K, & \Psi_3 > 0, \\ u_o^*(t), |u_o^*(t)| < K, & \Psi_3 = 0, \\ -K, & \Psi_3 < 0. \end{cases} \quad (2.82)$$

Здесь $u_o^*(t)$ - управление в случае особого режима, который и будет рассмотрен далее. В случае $\Psi_3 \neq 0$ оптимальное управление принимает крайнее значение

своего допустимого множества, то есть УПО движется по окружности максимально возможной кривизны (минимального радиуса).

Сопряженная система согласно Теореме 2.1 имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\Psi}_1 = -\frac{2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \\ \dot{\Psi}_2 = -\frac{2x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \\ \dot{\Psi}_3 = \Psi_1 \sin \theta - \Psi_2 \cos \theta = 0. \end{cases} \quad (2.83)$$

Рассмотрим вектора $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, 0)$ и $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, 0)$. Векторное произведение

$$[\Psi, \dot{x}] = \Psi_1 \sin \theta - \Psi_2 \cos \theta = \dot{\Psi}_3 \quad (2.84)$$

Таким образом $[\Psi, \dot{x}] = 0$, следовательно вектор Ψ коллинеарен вектору \dot{x} , т.е.

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \lambda(s)(\dot{x}_1, \dot{x}_2). \quad (2.85)$$

Продифференцируем последнее равенство:

$$\begin{cases} \dot{\Psi}_1 = \dot{\lambda}\dot{x}_1 + \lambda\ddot{x}_1, \\ \dot{\Psi}_2 = \dot{\lambda}\dot{x}_2 + \lambda\ddot{x}_2. \end{cases} \quad (2.86)$$

С учетом условия (2.85), получим

$$\begin{cases} \dot{\lambda}\dot{x}_1 + \lambda\ddot{x}_1 = -\frac{2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \\ \dot{\lambda}\dot{x}_2 + \lambda\ddot{x}_2 = -\frac{2x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}. \end{cases} \quad (2.87)$$

Так же известно, что на оптимальной траектории $H = const$. При особом режиме управления из (2.82) получаем

$$\Psi_1 \cos \theta + \Psi_2 \sin \theta - \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} = C. \quad (2.88)$$

Объединим уравнение (2.88) и третье уравнение системы для сопряженных переменных (2.83) в систему:

$$\begin{cases} \Psi_1 \sin \theta - \Psi_2 \cos \theta = 0, \\ \Psi_1 \cos \theta + \Psi_2 \sin \theta - \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} = C. \end{cases} \quad (2.89)$$

Получаем цепочку равенств, из которой находим сопряженные переменные Ψ_1 и Ψ_2 :

$$\begin{cases} \Psi_1 = \frac{\Psi_2 \cos \theta}{\sin \theta}, \\ \frac{\Psi_2}{\sin \theta} - \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} = C. \end{cases} \quad (2.90)$$

$$\begin{cases} \Psi_2 = (C + \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}) \sin \theta, \\ \Psi_1 = (C + \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}) \cos \theta. \end{cases} \quad (2.91)$$

Кроме того, можно записать еще одно уравнение, связывающее $\dot{\Psi}_1$, $\dot{\Psi}_2$ и θ , а именно тождественное равенство $\ddot{\Psi}_3 = 0$:

$$\dot{\Psi}_1 \sin \theta - \dot{\Psi}_2 \cos \theta + \dot{\theta} \Psi_1 \cos \theta + \dot{\theta} \Psi_2 \sin \theta = 0. \quad (2.92)$$

Подставляя уравнения системы (2.91) в уравнение (2.92), получаем:

$$-\frac{2x_1\dot{x}_2}{r^4} + \frac{2x_2\dot{x}_1}{r^4} + (C + \frac{1}{r^2})u^* = 0. \quad (2.93)$$

Таким образом, оптимальное управление в особом режиме имеет вид

$$u_o^* = \frac{2(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1)}{r^2(Cr^2 + 1)}. \quad (2.94)$$

Поскольку в Задаче 2.3 полное время движения T нефиксировано, константа C , равная значению функции Понтрягина на оптимальной траектории (2.88), равна нулю:

$$C = 0. \quad (2.95)$$

Поэтому оптимальное управление в особом режиме в Задаче 2.3 удовлетворяет уравнению (2.80). \square

Замечание 2.2. Вид оптимальной траектории, соответствующей интервалу особого управления в решении Задачи 2.3 совпадает с видом оптимальной траектории из решения аналогичной задачи без ограничения на кривизну траектории.

В работах [11—13] доказано, что решением задачи без ограничений на кривизну является дуга окружности $r = r_0 \sin(\alpha - \alpha_0)$, где α - полярный угол УПО. Это не что иное, как окружность радиуса r_0 , которая описана вокруг треугольника, построенного на краевых точках задачи A и B и начале координат O (см. [12]). Координаты x_1 и x_2 в этом случае равны

$$\begin{cases} x_1 = r_0 \sin(\alpha - \alpha_0) \cos \alpha, \\ x_2 = r_0 \sin(\alpha - \alpha_0) \sin \alpha. \end{cases} \quad (2.96)$$

Их производные имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r_0 \dot{\alpha} \cos(2\alpha - \alpha_0), \\ \dot{x}_2 = r_0 \dot{\alpha} \sin(2\alpha - \alpha_0). \end{cases} \quad (2.97)$$

Если подставить (2.97) в полученный закон оптимального управления в особом режиме (2.80), получим

$$u_o^* = \frac{2r_0^2 \dot{\alpha} \sin(\alpha - \alpha_0) (\sin \alpha \cos(2\alpha - \alpha_0) - \cos \alpha \sin(2\alpha - \alpha_0))}{r_0^2 \sin(\alpha - \alpha_0)^2} = 2\dot{\alpha}. \quad (2.98)$$

Сравнивая две системы уравнений для производных \dot{x}_1 , \dot{x}_2 (2.62) и (2.97), получаем связь между угловыми переменными α и θ :

$$\begin{cases} 1 = r_0 \dot{\alpha}, \\ \theta = 2\alpha - \alpha_0. \end{cases} \quad (2.99)$$

То есть имеем, что

$$\dot{\theta} = 2\dot{\alpha} = \frac{2}{r_0}. \quad (2.100)$$

Видно, что уравнения (2.100) и (2.98) идентичны, а значит полученное оптимальное решение задачи 2.3 является верным.

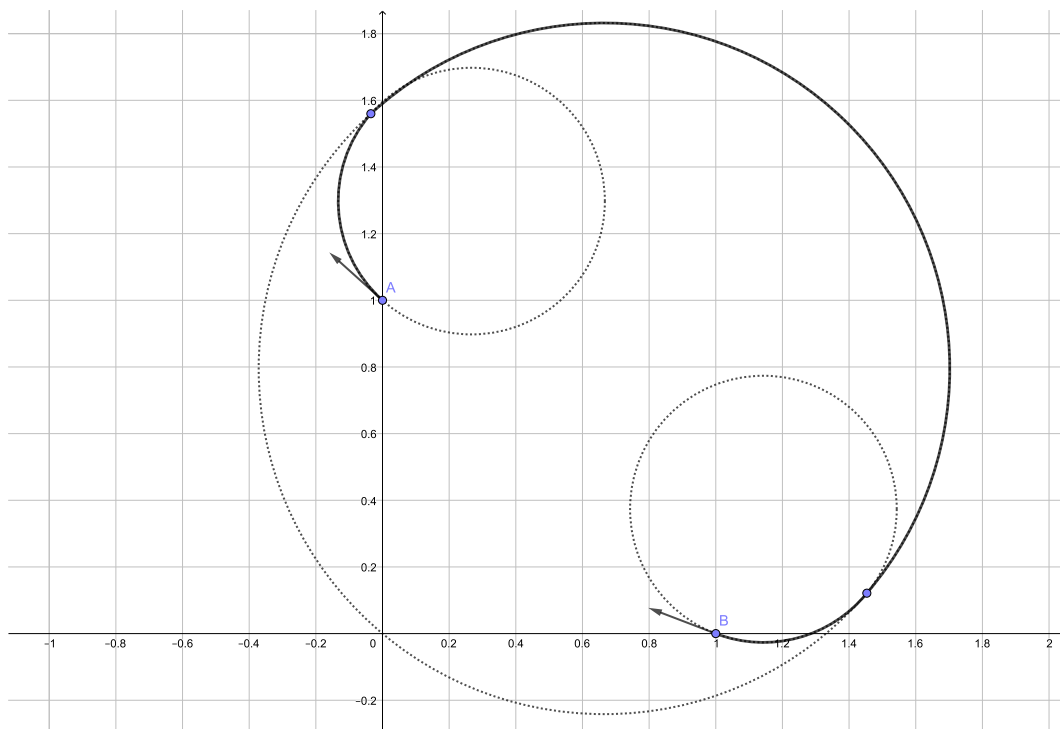


Рисунок 2.6 — Пример оптимальной траектории, содержащей дугу с особым режимом управления

По аналогии с решением задачи быстродействия для машины Дубинса результат представляет собой траекторию с тремя интервалами управления: начальным и конечным с предельным значением $u = K$ и интервалом с особым управлением между ними. Но в отличие от решения классической задачи [46], траектория УПО при особом управлении представляет собой дугу окружности, проходящую через начало координат, что совпадает с решением аналогичной задачи при отсутствии ограничения на кривизну траектории, полученным в [11–13]. На рисунке 2.6 продемонстрирован полученный результат.

Если теперь в постановку Задачи 2.3, решение которой проиллюстрировано на рисунке 2.6, ввести ограничение на длину искомой траектории, то получим объединение ограничений двух задач, решенных в подразделах 2.2 и 2.3. Такая постановка в общем виде описана в Задаче 2.2. Этот пример показан на Рисунке 2.7.

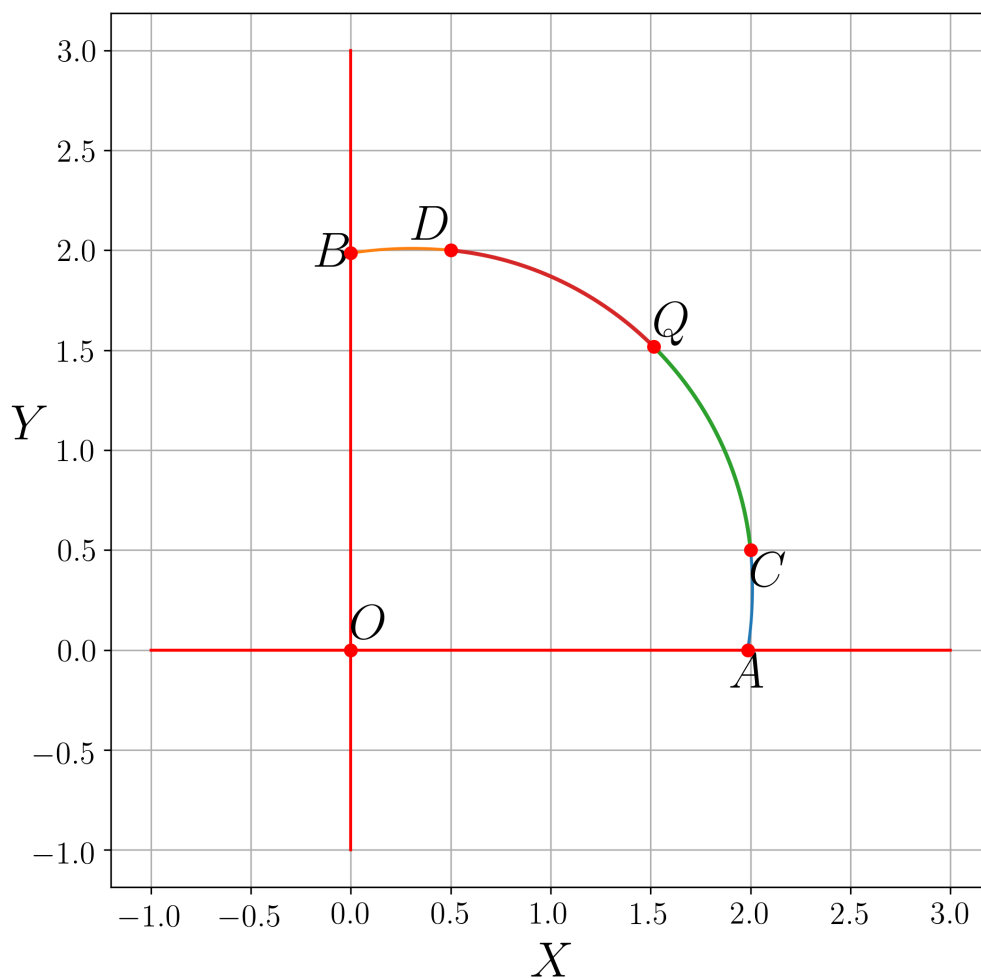


Рисунок 2.7 — Траектория подвижного объекта для $L = 3.5$

Оптимальная траектория для Задачи 2.2, как и оптимальная траектория для задачи быстродействия для машины Дубинса, состоит из интервалов поворота с максимальной кривизной (AC и DB) и специального интервала (CD), где действует ограничение на длину траектории. Оптимальные параметры для этого интервала являются результатом решения алгебро-интегральных уравнений, включающих нормальные полиномы Лежандра первого и второго рода, основанных на решении задачи оптимального управления из подраздела 2.2.

2.4 Выводы по Главе 2

В данной главе рассмотрены модификации задачи (2.1.4) при наличии ограничений на длину и кривизну искомой оптимальной траектории, а так же формализовано понятие риска обнаружения, который используется как критерий оптимизации для этих задач. Аналитические решения обоснованы рядом лемм и теорем, которые сформулированы и доказаны. Результаты решения снабжены примерами и иллюстрациями.

1. В подразделе 2.1 предложена математическая модель обнаружения на конкретном примере гидроакустического обнаружителя, состоящего из решетки гидрофонов.
2. На основе обработки излучаемых УПО сигналов сформированы статистики, применено пороговое правило и выведен интегральный функционал для случая малого отношения сигнал/шум, называемый риском обнаружения, который используется далее в каждой задаче исследования как критерий оптимизации.
3. В подразделе 2.2 разработан метод построения оптимальной траектории на основе аналитического решения задачи планирования траектории УПО при уклонении от одиночного обнаружителя при наличии ограничения на длину траектории. Двухточечная вариационная задача сведена к решению системы алгебро-интегральных уравнений, в которые входят нормальные эллиптические интегралы Лежандра первого и второго рода, а для ее численного решения разработаны программные модули, позволяющие находить решения для различных начальных и конечных условий, а также произвольных ограничениях на длину траектории. Полученные решения сравнены с известными решениями при отсутствии ограничений на длину маршрута.
4. В подразделе 2.3 предложен подход к планированию оптимальной траектории движения УПО с ограничением на радиус разворота в задаче уклонения от одиночного обнаружителя. Исходная задача планирования маршрута движения решена при помощи принципа максимума Понтрягина, исследованы условия возникновения режима особого управления, получена оптимальная траектория.

Глава 3. Задача планирования траекторий УПО, обладающего неоднородной индикатрисой излучения

В данной главе рассматривается задача планирования траектории подвижного объекта (2.1.4) при наличии у него неоднородной индикатрисы излучения и при уклонении на плоскости от одиночного стационарного обнаружителя. Результаты Главы 3 отражены в статьях [15; 113–115].

Рассматривается задача нахождения оптимальных траекторий объекта как задача классического вариационного исчисления с критерием оптимизации в виде риска обнаружения объекта [5; 15].

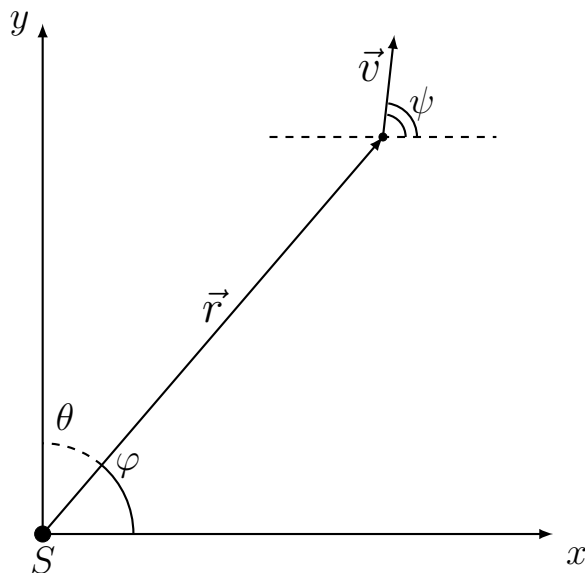


Рисунок 3.1 — УПО в декартовой системе координат с обнаружителем S .

Геометрия взаимного расположения УПО, его вектора скорости и обнаружителя представлена на рис. 3.1. Физический смысл углов, представленных на этом рисунке, будет пояснен далее.

3.1 О функционале риска

Как было установлено в Главе 2, риск зависит от уровня физического сигнала $S(t)$, принимаемого обнаружителем после того, как этот сигнал был излучен подвижным объектом. Этот уровень сигнала зависит от различных

постоянных характеристик подвижного объекта и обнаружителя, а так же от мгновенного значения скорости объекта и расстояния до обнаружителя

$$S = \left(\frac{v}{r}\right)^\mu G(\varphi)\gamma(r,\varphi)g(\beta), \quad (3.1)$$

где множитель $G(\varphi)$ отвечает за диаграмму принимающей антенны обнаружителя, $g(\beta)$ – это индикатриса излучения подвижного объекта относительно направления на обнаружитель, образующая угол $\pi - \beta$ с вектором скорости, r – это текущее расстояние между обнаружителем и объектом, v – мгновенная скорость объекта, $\gamma(r,\varphi)$ – коэффициент затухания сигнала в среде.

Геометрический смысл углов ψ и φ следующий. Здесь ψ - угол поворота вектора скорости объекта, а φ - угол поворота радиус-вектора, как показано на рисунке 3.1. Угол $\psi - \varphi = \beta$ - это угол в треугольнике, построенный из радиальной v_r и трансверсальной v_φ скоростей объекта, например, угол между вектором скорости УПО и его проекцией на радиус-вектор, как показано на рисунке 3.2.

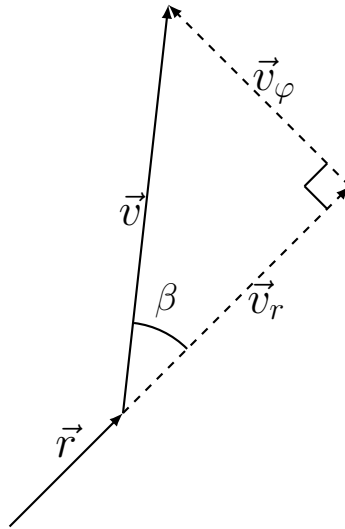


Рисунок 3.2 — Прямоугольный треугольник векторов скоростей \vec{v} , \vec{v}_r и \vec{v}_φ .

Величина μ характеризует физическое поле, по которому ведется обнаружение. В зависимости от значения μ это может быть магнитное, тепловое, акустическое или электромагнитное поле. Далее в главе будет рассмотрен случай, когда $\mu > 1$.

Таким образом критерий оптимизации задачи - риск обнаружения R как интегральный функционал сигнала $S(t)$ (3.1) имеет вид:

$$R = \int_0^T \left(\frac{v}{r}\right)^\mu G(\varphi)\gamma(r,\varphi)g(\beta)dt. \quad (3.2)$$

Для простоты будем считать, что диаграмма принимающей антенны равномерна, т.е. $G(\varphi) \equiv 1$, и сигнал в среде не затухает, т.е. $\gamma(r, \varphi) \equiv 1$.

Таким образом, риск как критерий оптимизации является функцией фазовых координат объекта и его относительного расположения по отношению к обнаружителю:

$$R = \int_0^T \left(\frac{v}{r}\right)^\mu g(\beta)dt. \quad (3.3)$$

Пример индикатрисы излучения представлен на рисунке 3.3. Оси X и Y ориентированы относительно объекта таким образом, что Y указывает на верхнюю сторону объекта, X - на правую, а угол β отсчитывается против часовой стрелки от оси X . Сама функция $g(\beta)$ является длиной радиус-вектора для каждого β , поэтому $g(\beta) > 0$.

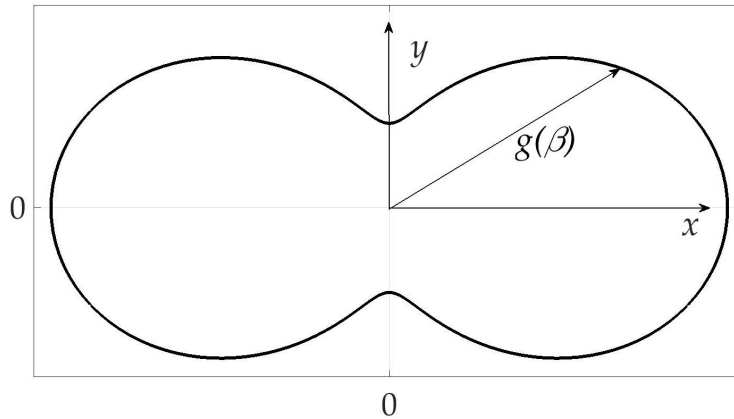


Рисунок 3.3 — Пример индикатрисы излучения объекта

3.2 Математическая постановка задачи

Задача подвижного объекта - перейти из начальной точки A до конечной точки B с минимально возможным риском на траектории. Поэтому можно сформулировать задачу оптимального планирования траектории как двухто-

чечную вариационную задачу. Здесь и далее для простоты решения используется полярная система координат (r, φ) .

Задача 3.1. *Найти такую траекторию $(r^*(t), \varphi^*(t))$, которая минимизирует функционал*

$$R = \int_0^T \left(\frac{v}{r}\right)^\mu g(\beta) dt, \quad (3.4)$$

где v – скорость подвижного объекта, r – расстояние между обнаружителем и объектом, β – угол поворота объекта относительно направления на обнаружитель, а $g(\beta)$ – функция индикатрисы излучения. Краевые условия

$$r(0) = r_A, r(T) = r_B, \varphi(0) = \varphi_A, \varphi(T) = \varphi_B.$$

Время T движения по маршруту от точки A к точке B фиксировано.

3.2.1 Преобразование координат

Как упоминалось в Главе 1, в [23] было доказано, что для задач такого рода существует преобразование координат, которое приводит функционал к удобной для последующего исследования форме и к такой системе координат, в которой оптимальные траектории являются геодезическими, т.е. представлены в виде прямых линий. Для рассматриваемой задачи (3.4) такое преобразование также существует, и следующая лемма предъясвляет явный вид замены переменных в функционале.

Лемма 3.1. *Замена переменной $\rho = \ln r$ приводит функционал (3.4) к виду*

$$R(\rho(\cdot), \varphi(\cdot)) = \int_0^T (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2)^{\mu/2} g\left(\arctan \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}}\right) dt. \quad (3.5)$$

Доказательство. В полярных координатах (r, φ) радиальная и трансверсальная проекции скорости равны

$$\begin{cases} v_r = \frac{dr}{dt}, \\ v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Тогда угол β может быть выражен через его тангенс как

$$\tan \beta = \frac{v_\varphi}{v_r} = r \frac{d\varphi}{dr}. \quad (3.7)$$

После подстановки новой переменной $\rho = \ln r$ уравнение (3.7) принимает вид

$$\tan \beta = \frac{d\varphi}{d\rho}.$$

Таким образом угол β выражается как

$$\beta = \arctan \left(\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}} \right). \quad (3.8)$$

Первая часть подынтегрального выражения в уравнении (3.4) с учетом системы (3.6) в полярных координатах имеет вид

$$\left(\frac{v}{r} \right)^\mu = \left(\frac{v_r^2 + v_\varphi^2}{r^2} \right)^{\mu/2} = \left(\frac{\dot{r}^2}{r^2} + \dot{\varphi}^2 \right)^{\mu/2}. \quad (3.9)$$

С учетом новой переменной ρ , последняя формула становится

$$\left(\frac{v}{r} \right)^\mu = (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2)^{\mu/2}.$$

После подстановки уравнений (3.9) и (3.8) в уравнение (3.4) функционал риска принимает вид (3.5). \square

Согласно Лемме 3.1 ранее сформулированная Задача 3.1 эквивалента новой Задаче с оптимизационным функционалом (3.5).

Задача 3.2. *Найти траекторию $(\rho^*(t), \varphi^*(t))$, которая минимизирует функционал*

$$R(\rho(\cdot), \varphi(\cdot)) = \int_0^T S(\rho, \dot{\rho}, \varphi, \dot{\varphi}, t) dt = \int_0^T (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2)^{\mu/2} g \left(\arctan \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}} \right) dt \quad (3.10)$$

с краевыми условиями

$$\rho(0) = \rho_A, \rho(T) = \rho_B, \varphi(0) = \varphi_A, \varphi(T) = \varphi_B.$$

Записанная в таком виде, исходная Задача более удобна для аналитического решения, так как функционал оптимизации зависит только от производных координат по времени.

3.3 Необходимые условия экстремума

Прежде всего, следует рассмотреть необходимые условия для экстремальной траектории, т.е. найти кандидатов в оптимальные траектории. В силу формы уравнения (3.10) этот функционал имеет несколько первых интегралов. Справедлива следующая лемма.

Лемма 3.2. *Если $g(\beta)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, тогда лагранжиан $S(\rho, \dot{\rho}, \varphi, \dot{\varphi}, t)$ имеет постоянное значение S^* вдоль экстремальной траектории $(\rho^*(t), \varphi^*(t))$.*

Доказательство. Действительно, функция $S(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, t) = (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2)^{\mu/2} g(\beta)$ не зависит явно от переменной t . Поэтому значение обобщенной энергии $H = \dot{\rho} \frac{\partial S}{\partial \dot{\rho}} + \dot{\varphi} \frac{\partial S}{\partial \dot{\varphi}} - S$ постоянно вдоль экстремальной траектории $(\rho^*(t), \varphi^*(t))$. Вычисление последнего выражения приводит к цепочке равенств

$$\begin{aligned} H &= \mu \dot{\rho}^2 (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2)^{\frac{\mu}{2}-1} g(\beta) - \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}} \frac{1}{1 + \left(\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}}\right)^2} g'(\beta) (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2)^{\frac{\mu}{2}} + \\ & \mu \dot{\varphi}^2 (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2)^{\frac{\mu}{2}-1} g(\beta) + \frac{\dot{\rho}}{\dot{\varphi}} \frac{1}{1 + \left(\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}}\right)^2} g'(\beta) (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2)^{\frac{\mu}{2}} - \\ & (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2)^{\frac{\mu}{2}} g(\beta) = (\mu - 1)S = (\mu - 1)S^*. \end{aligned}$$

В случае $\mu = 1$ задача вырождается и требует дополнительного исследования. Но, как указано выше, предполагается, что $\mu > 1$. \square

Следующая теорема определяет необходимое условие экстремума для траектории, которая может быть решением Задачи 3.2.

Теорема 3.1. *Пусть $0 < g_1 < g(\beta) < g_2$ для всех $\beta \in [0, 2\pi]$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция угла β , где g_1, g_2 – некоторые константы, а $\ddot{\rho}(t), \ddot{\varphi}(t)$ существуют и являются непрерывными функциями времени t .*

Тогда экстремальная траектория удовлетворяет следующей системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{\rho} = const, \\ \dot{\varphi} = const. \end{cases} \quad (3.11)$$

Доказательство. Уравнения Эйлера-Лагранжа для вариационной задачи, представленной уравнением (3.10) имеют вид

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial \dot{\rho}}(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, t) + \frac{\partial S}{\partial \rho}(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, t) = 0, \\ -\frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial \dot{\varphi}}(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, t) + \frac{\partial S}{\partial \varphi}(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, t) = 0, \end{cases} \quad (3.12)$$

где $S(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, t) = (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2)^{\mu/2} g\left(\arctan \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}}\right)$.

После подстановки функционала S в систему уравнений (3.12) и в силу $\frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial \rho} = 0$, получаем

$$\begin{cases} \mu \dot{\rho} (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2)^{\frac{\mu}{2}-1} g(\beta) - \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2} g'(\beta) (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2)^{\frac{\mu}{2}} = C_1, \\ \mu \dot{\varphi} (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2)^{\frac{\mu}{2}-1} g(\beta) + \frac{\dot{\rho}}{\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2} g'(\beta) (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2)^{\frac{\mu}{2}} = C_2. \end{cases} \quad (3.13)$$

Условие теоремы $g(\beta) > g_1 > 0$ и подстановка выражения для S^* из Леммы 3.2 дает

$$\begin{cases} \mu \frac{\dot{\rho}}{\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2} S^* - \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2} (\ln g(\beta))' S^* = C_1, \\ \mu \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2} S^* + \frac{\dot{\rho}}{\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2} (\ln g(\beta))' S^* = C_2. \end{cases} \quad (3.14)$$

Здесь использовано выражение $\frac{g'(\beta)}{g(\beta)} = (\ln g(\beta))'$, C_1, C_2 – некоторые постоянные, которые являются первыми интегралами системы уравнений (3.12), так же, как и S^* . Преобразуем уравнения системы (3.14). Умножим первое уравнение на $\dot{\rho}$, а второе – на $\dot{\varphi}$ и сложим их. Затем умножим первое уравнение на $-\dot{\varphi}$, а второе – на $\dot{\rho}$ и сложим их. Получим новую систему

$$\begin{cases} C_1 \dot{\rho} + C_2 \dot{\varphi} = \mu S^*, \\ C_2 \dot{\rho} - C_1 \dot{\varphi} = S^* (\ln g(\beta))'. \end{cases} \quad (3.15)$$

Разделив второе уравнение из системы уравнений (3.15) на первое, можно получить

$$(\ln g(\beta))' = \mu \frac{C_2 \dot{\rho} - C_1 \dot{\varphi}}{C_1 \dot{\rho} + C_2 \dot{\varphi}} = \mu \tan(\gamma - \beta), \quad (3.16)$$

где $\tan \gamma = \frac{C_2}{C_1}$.

Это означает, что левая и правая части уравнения (3.16) равны друг другу в некоторых фиксированных точках β^* . Из линейности по C_1, C_2 системы уравнений (3.15) следует ее разрешимость при любой правой части. В силу фиксированного значения β^* и левой части уравнений (3.15) следует утверждение Теоремы. \square

Следствие 3.1. Из Теоремы (3.1) следует, что экстремальная траектория является логарифмической спиралью, уравнение которой в полярных координатах имеет вид

$$r(\varphi) = r_A \exp\left(\frac{\varphi - \varphi_A}{\varphi_B - \varphi_A} \ln \frac{r_B}{r_A}\right). \quad (3.17)$$

Доказательство. Если объект движется по экстремальной траектории, то согласно Теореме 3.1

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \text{const} = \frac{\rho_B - \rho_A}{T}, \\ \dot{\varphi} = \text{const} = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{T}. \end{cases} \quad (3.18)$$

Интегрирование каждого из уравнений этой системы дает

$$\begin{cases} \rho(t) = \rho_A + \frac{\rho_B - \rho_A}{T}t, \\ \varphi(t) = \varphi_B + \frac{\varphi_B - \varphi_A}{T}t. \end{cases} \quad (3.19)$$

Переходя от переменной ρ обратно к переменной r , получаем

$$\begin{cases} r(t) = r_A \exp\left(\frac{t}{T} \ln \frac{r_B}{r_A}\right), \\ \varphi(t) = \varphi_A + \frac{\varphi_B - \varphi_A}{T}t. \end{cases} \quad (3.20)$$

Откуда уже легко получить уравнение (3.17). \square

Следующие две леммы определяют скоростной режим подвижного объекта на экстремальной траектории и величину риска на ней.

Лемма 3.3. Закон изменения скорости на экстремальной траектории, удовлетворяющей уравнению (3.17), имеет вид

$$v(t) = \frac{r_A}{T} \exp\left(\frac{t}{T} \ln \frac{r_B}{r_A}\right) \sqrt{\ln^2 \frac{r_B}{r_A} + (\varphi_B - \varphi_A)^2}. \quad (3.21)$$

Доказательство. Чтобы получить закон изменения скорости в зависимости от времени нужно подставить уравнение (3.20) в уравнение (3.6):

$$\begin{cases} v_r(t) = \frac{r_A}{T} \ln\left(\frac{r_B}{r_A}\right) \exp\left(\frac{t}{T} \ln \frac{r_B}{r_A}\right), \\ v_\varphi(t) = \frac{r_A}{T} (\varphi_B - \varphi_A) \exp\left(\frac{t}{T} \ln \frac{r_B}{r_A}\right). \end{cases}$$

Поэтому полная скорость движущегося объекта при движении по экстремальной траектории изменяется по закону

$$v(t) = \frac{r_A}{T} \exp\left(\frac{t}{T} \ln \frac{r_B}{r_A}\right) \sqrt{\ln^2 \frac{r_B}{r_A} + (\varphi_B - \varphi_A)^2}.$$

□

Лемма 3.4. Значение функционала (3.5) на экстремальной траектории (3.17) равняется

$$R^* = \frac{\left((\rho_B - \rho_A)^2 + (\varphi_B - \varphi_A)^2\right)^{\mu/2}}{T^{\mu-1}} g(\beta^*) = \frac{L^\mu}{T^{\mu-1}} g(\beta^*), \quad (3.22)$$

где $\beta^* = \arctan \frac{\varphi_B - \varphi_A}{\rho_B - \rho_A}$, и зависит только от краевых условий и

$L = \sqrt{(\rho_B - \rho_A)^2 + (\varphi_B - \varphi_A)^2}$ – длина прямолинейного сегмента между точками A и B в пространстве (ρ, φ) .

Доказательство. Если объект движется по экстремальной траектории, то согласно Теореме 3.1, справедливы выражения

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \text{const} = \frac{\rho_B - \rho_A}{T} \\ \dot{\varphi} = \text{const} = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{T} \\ \beta^* = \arctan\left(\frac{\varphi_B - \varphi_A}{\rho_B - \rho_A}\right). \end{cases} \quad (3.23)$$

Тогда постоянный уровень излучаемого сигнала S^* из Леммы 3.2 равен

$$S^* = \frac{\left((\rho_B - \rho_A)^2 + (\varphi_B - \varphi_A)^2 \right)^{\frac{\mu}{2}}}{T^\mu} g(\beta^*) \quad (3.24)$$

Полный риск на траектории равен

$$R^* = S^* T = \frac{\left((\rho_B - \rho_A)^2 + (\varphi_B - \varphi_A)^2 \right)^{\frac{\mu}{2}}}{T^{\mu-1}} g(\beta^*). \quad (3.25)$$

После введения переменной $L = \sqrt{(\rho_B - \rho_A)^2 + (\varphi_B - \varphi_A)^2}$, уравнение (3.25) можно переписать как уравнение (3.22). L является ни чем иным, как длиной прямолинейного сегмента между точками A и B в пространстве (ρ, φ) . \square

3.4 Достаточные условия оптимальности

Теперь докажем, что полученная выше экстремальная траектория, заданная уравнением (3.17), является оптимальным решением задачи 3.2, т.е. она приводит к сильному минимуму функционал (3.5). Для этого необходимо исследовать матрицу Гессе.

Лемма 3.5. Пусть $S(\rho, \dot{\rho}, \varphi, \dot{\varphi}, t) = (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2)^{\mu/2} g(\beta)$, $g(\beta)$ – трижды непрерывно дифференцируемая функция β , тогда матрица Гессе \mathbf{H} равна

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}$$

где

$$\begin{aligned} H_{11} &= \frac{\partial^2 S}{\partial \dot{\rho}^2} = (-2\dot{\varphi}\dot{\rho}(\mu-1)g'(\beta) + \mu(\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2(\mu-1))g(\beta) + g''(\beta)\dot{\varphi}^2)(\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2)^{\frac{\mu}{2}-2}, \\ H_{12} &= \frac{\partial^2 S}{\partial \dot{\rho}\partial \dot{\varphi}} = ((\dot{\rho}^2 - \dot{\varphi}^2)(\mu-1)g'(\beta) + \dot{\rho}\dot{\varphi}((\mu^2 - 2\mu)g(\beta) - g''(\beta)))(\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2)^{\frac{\mu}{2}-2}, \\ H_{21} &= \frac{\partial^2 S}{\partial \dot{\varphi}\partial \dot{\rho}} = ((\dot{\rho}^2 - \dot{\varphi}^2)(\mu-1)g'(\beta) + \dot{\rho}\dot{\varphi}((\mu^2 - 2\mu)g(\beta) - g''(\beta)))(\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2)^{\frac{\mu}{2}-2}, \\ H_{22} &= \frac{\partial^2 S}{\partial \dot{\varphi}^2} = (2\dot{\varphi}\dot{\rho}(\mu-1)g'(\beta) + \mu(\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2(\mu-1))g(\beta) + g''(\beta)\dot{\rho}^2)(\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2)^{\frac{\mu}{2}-2}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

а сам гессиан как определитель этой матрицы равен

$$\det \mathbf{H} = (\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2)^{\mu-2} (\mu - 1) (g^2(\beta)\mu^2 + g(\beta)g''(\beta)\mu - g'^2(\beta)(\mu - 1)). \quad (3.27)$$

Доказательство. Вычислив первые частные производные S по $\dot{\rho}$, $\dot{\varphi}$, используя равенство $\beta = \arctan\left(\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}}\right)$, можно получить

$$\begin{aligned} S_{\dot{\rho}} &= (g(\beta)\mu\dot{\rho} - g'(\beta)\dot{\varphi})(\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2)^{\frac{\mu}{2}-1}, \\ S_{\dot{\varphi}} &= (g(\beta)\mu\dot{\varphi} + g'(\beta)\dot{\rho})(\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2)^{\frac{\mu}{2}-1}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Вычисление частных производных второго порядка от S по $\dot{\rho}$, $\dot{\varphi}$ приводит к системе уравнений (3.26). Вычисление детерминанта матрицы Гессе дает выражение (3.27). \square

Следующая теорема дает достаточное условие оптимальности экстремальной траектории.

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия Теоремы 3.1, Лемм 3.2 и 3.5, и $\det \mathbf{H} > 0$ для всех значений β . Тогда оптимальная траектория, удовлетворяющая уравнению (3.11), доставляет сильный минимум функционалу риска (3.5).

Доказательство. Прежде всего, необходимо проверить условия Лежандра. Это означает, что матрица Гессе должна быть положительно определена. Действительно, минор второго порядка совпадает с $\det \mathbf{H}$, который строго положителен. Среди миноров первого порядка \mathbf{H}_{11} и \mathbf{H}_{22} из уравнения (3.26) хотя бы один положителен, так как оба значения фиксированы на оптимальной траектории и их сумма равна

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{11} + \mathbf{H}_{22} &= (\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2)^{\frac{\mu}{2}-1} (g(\beta)\mu^2 + g''(\beta)) = \\ &= \frac{\det H}{\mu(\mu - 1)(\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2)^{\frac{\mu}{2}-1}} + (\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2)^{\frac{\mu}{2}-1} \left(g'^2(\beta) \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) + (\mu^2 - \mu)g^2(\beta) \right) \\ &= \frac{\det H}{g(\beta)} > 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Принимая во внимание, что $\mu > 1$, легко видеть, что обе величины \mathbf{H}_{11} и \mathbf{H}_{22} так же строго положительны.

Условия Якоби имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{H}_{11}\dot{\rho} + \mathbf{H}_{12}\dot{\varphi}) &= 0, \\ \frac{d}{dt} (\mathbf{H}_{21}\dot{\rho} + \mathbf{H}_{22}\dot{\varphi}) &= 0, \end{aligned} \quad (3.30)$$

поскольку $S_{\rho\rho} = 0$, $S_{\varphi\rho} = 0$, $S_{\rho\varphi} = 0$, $S_{\varphi\varphi} = 0$.

Используя миноры матрицы Гессе из уравнения (3.26), могут быть найдены слагаемые из уравнений (3.30)

$$\mathbf{H}_{11}\dot{\rho} = (-2\dot{\varphi}\dot{\rho}^2(\mu-1)g'(\beta) + \mu\dot{\rho}(\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2(\mu-1))g(\beta) + g''(\beta)\dot{\rho}\dot{\varphi}^2)(\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2)^{\frac{\mu}{2}-2}, \quad (3.31)$$

$$\mathbf{H}_{12}\dot{\varphi} = (\dot{\varphi}(\dot{\rho}^2 - \dot{\varphi}^2)(\mu-1)g'(\beta) + \dot{\rho}\dot{\varphi}^2((\mu^2 - 2\mu)g(\beta) - g''(\beta)))(\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2)^{\frac{\mu}{2}-2}, \quad (3.32)$$

$$\mathbf{H}_{21}\dot{\rho} = (\dot{\rho}(\dot{\rho}^2 - \dot{\varphi}^2)(\mu-1)g'(\beta) + \dot{\rho}^2\dot{\varphi}((\mu^2 - 2\mu)g(\beta) - g''(\beta)))(\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2)^{\frac{\mu}{2}-2}, \quad (3.33)$$

$$\mathbf{H}_{22}\dot{\varphi} = (2\dot{\varphi}^2\dot{\rho}(\mu-1)g'(\beta) + \mu\dot{\varphi}(\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2(\mu-1))g(\beta) + g''(\beta)\dot{\rho}^2\dot{\varphi})(\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2)^{\frac{\mu}{2}-2}. \quad (3.34)$$

Подставляя уравнения (3.31), (3.32), (3.33), (3.34) в уравнение (3.30), можно получить

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{12}\dot{\varphi} + \mathbf{H}_{11}\dot{\rho} &= ((\mu-1)g'(\beta)(\dot{\rho}^2\dot{\varphi} - \dot{\varphi}^3 - 2\dot{\varphi}\dot{\rho}^2) + g(\beta)\mu\dot{\rho}(\dot{\varphi}^2(\mu-2) + \dot{\varphi}^2 + \\ &\dot{\rho}^2(\mu-1)) + g''(\beta)(-\dot{\rho}\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}\dot{\varphi}^2))(\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2)^{\frac{\mu}{2}-2} = (-\mu-1)g'(\beta)\dot{\varphi}(\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2) + \\ &+ g(\beta)\mu\dot{\rho}(\mu-1)(\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2)(\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2)^{\frac{\mu}{2}-2} = (-g'(\beta)\dot{\varphi} + g(\beta)\mu\dot{\rho})(\mu-1)(\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2)^{\frac{\mu}{2}-1} = \\ &= (\mu-1)S_{\dot{\rho}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{22}\dot{\varphi} + \mathbf{H}_{21}\dot{\rho} &= (\dot{\rho}(\mu-1)g'(\beta)(\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2) + \mu g(\beta)\dot{\varphi}(\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2(\mu-1) + \dot{\rho}^2(\mu-2))) \cdot \\ &\cdot (\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2)^{\frac{\mu}{2}-2} = (\dot{\rho}g'(\beta) + \mu g(\beta)\dot{\varphi})(\mu-1)(\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2)^{\frac{\mu}{2}-1} = (\mu-1)S_{\dot{\varphi}}. \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (3.30) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S_{\dot{\rho}} &= 0, \\ \frac{d}{dt} S_{\dot{\varphi}} &= 0, \end{aligned}$$

что совпадает с явной формой уравнения (3.12).

Это означает, что достаточные условия сильного минимума функционала риска (3.10) выполнены. \square

Таким образом, положительность определителя матрицы Гессе гарантирует, что логарифмическая спираль является оптимальным решением задачи. Теорема 3.2 позволяет для любой функции $g(\beta)$ ответить, является ли экстремальная траектория (3.17) оптимальной или нет. Действительно, знак гессиана (3.27) зависит от знака третьего множителя, который зависит только от функции $g(\beta)$. Если достаточные условия не выполняются, то оптимальная траектория имеет более сложную форму и состоит из нескольких логарифмических спиралей. Эти случаи обсуждаются далее в текущей главе.

3.5 Вырождение уравнений Эйлера-Лагранжа и нулевой гессиан

Прежде всего, следует рассмотреть случай вырождения уравнений Эйлера-Лагранжа (3.14). Дело в том, что два уравнения могут совпадать друг с другом для некоторой индикатрисы излучения $g(\beta)$ и некоторых постоянных значений C_1, C_2 .

Лемма 3.6. *Функция $g(\beta) = C|\cos(\gamma - \beta)|^\mu$, где $\tan \gamma = \frac{C_2}{C_1}$, приводит систему уравнений Эйлера-Лагранжа (3.12) к вырождению.*

Доказательство. Вернемся к уравнению (3.16) из доказательства Теоремы 3.1

$$(\ln g(\beta))' = \mu \tan(\gamma - \beta), \quad (3.35)$$

где $\tan \gamma = \frac{C_2}{C_1}$ - некоторая постоянная величина, $\tan \beta = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}}$ и зависит от направления вектора скорости подвижного объекта.

Интегрирование правой части уравнения (3.35) по β дает

$$\begin{aligned} \int \mu \tan(\gamma - \beta) d\beta &= \mu \int \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\cos(\gamma - \beta)} d\beta = \mu \int \frac{d(\cos(\gamma - \beta))}{\cos(\gamma - \beta)} d\beta = \\ &= \mu \ln |\cos(\gamma - \beta)| + \tilde{C} \end{aligned} \quad (3.36)$$

с неопределенной константой интегрирования \tilde{C} . Интегрируя левую часть уравнения (3.35), можно получить

$$\ln g(\beta) = \mu \ln |\cos(\gamma - \beta)| + \tilde{C}. \quad (3.37)$$

Использование обеих частей уравнения (3.37) как степеней для экспоненты приводит к утверждению леммы, где $C = \exp \tilde{C}$ является некоторой постоянной величиной. \square

Согласно Лемме 3.6 полученная специальная форма функции $g(\beta)$ вырождает уравнения Эйлера-Лагранжа только при одном конкретном значении параметра γ , отвечающем направлению, связанному с граничными условиями задачи 3.2, выраженными через константы C_1 и C_2 , когда она уже решена.

Следствие 3.2. *Функция $g(\beta)$ из Леммы 3.6 приводит лагранжиан Задачи 3.2 с функционалом (3.5) к виду*

$$S(\rho, \dot{\rho}, \varphi, \dot{\varphi}, t) = (\tilde{C}_1 \dot{\rho} + \tilde{C}_2 \dot{\varphi})^\mu. \quad (3.38)$$

Доказательство. Верна следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned} \cos^2(\gamma - \beta) &= \frac{1}{1 + \tan^2(\gamma - \beta)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{C_2 \dot{\rho} - C_1 \dot{\varphi}}{C_1 \dot{\rho} + C_2 \dot{\varphi}}\right)^2} = \\ &= \frac{(C_1 \dot{\rho} + C_2 \dot{\varphi})^2}{(C_1 \dot{\rho} + C_2 \dot{\varphi})^2 + (C_2 \dot{\rho} - C_1 \dot{\varphi})^2} = \frac{(C_1 \dot{\rho} + C_2 \dot{\varphi})^2}{(C_1^2 + C_2^2)(\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2)}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Из последнего уравнения следует, что

$$\cos^\mu(\gamma - \beta) = \frac{(C_1 \dot{\rho} + C_2 \dot{\varphi})^\mu}{(C_1^2 + C_2^2)^{\mu/2} (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2)^{\mu/2}}. \quad (3.40)$$

Поэтому лагранжиан S Задачи 3.2 с функционалом (3.5) для функции $g(\beta)$ из Леммы 3.6 принимает вид

$$S = (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2)^{\mu/2} g(\beta) = C \left(\frac{(C_1 \dot{\rho} + C_2 \dot{\varphi})^2}{C_1^2 + C_2^2} \right)^{\frac{\mu}{2}} = (\tilde{C}_1 \dot{\rho} + \tilde{C}_2 \dot{\varphi})^\mu. \quad (3.41)$$

\square

В дополнение к Теореме 3.1 следующая теорема описывает вид экстремальных траекторий для специального вида индикатрисы излучения из Леммы 3.6.

Теорема 3.3. Пусть функция $g(\beta)$ удовлетворяет лемме 3.6. Тогда все кривые, удовлетворяющие уравнению $\tilde{C}_1\dot{\rho} + \tilde{C}_2\dot{\varphi} = C_3$ на координатной плоскости (ρ, φ) с некоторыми константами $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, C_3$, являются экстремальными.

Доказательство. Достаточно вспомнить Лемму 3.2 и Следствие 3.2, чтобы утверждать, что S - константа на экстремальной траектории локально в окрестности направления β , где $g(\beta)$ - непрерывно дифференцируемая функция. Тогда из уравнения (3.38) следует утверждение теоремы. \square

Поэтому среди множества оптимальных путей, ведущих из A в B , удовлетворяющих уравнению (3.38), существует также логарифмическая спираль, показанная в уравнении (3.17) с тем же значением функции риска.

После анализа вырождения необходимых условий экстремума пришло время рассмотреть и достаточные условия оптимальности. Одним из интересных для исследования случаев является случай нулевого гессиана (3.27):

$$g^2(\beta)\mu^2 + g(\beta)g''(\beta)\mu - g'^2(\beta)(\mu - 1) = 0. \quad (3.42)$$

Лемма 3.7. Функция $g(\beta)$, обнуляющая гессиан (3.27), равна

$$g(\beta) = C|\cos(\tilde{\beta} - \beta)|^\mu, \quad (3.43)$$

где $\tilde{\beta}$ - произвольная константа.

Доказательство. Если разделить уравнение (3.42) на выражение $g'(\beta)g(\beta)$, можно получить

$$\frac{g''(\beta)}{g'(\beta)}\mu - \frac{g'(\beta)}{g(\beta)}(\mu - 1) + \mu^2 \frac{g(\beta)}{g'(\beta)} = 0. \quad (3.44)$$

Введение новой переменной $\eta = \frac{g'(\beta)}{g(\beta)}$ позволяет записать уравнение (3.44) в виде

$$\eta'\mu + \eta^2 + \mu^2 = 0. \quad (3.45)$$

Решение уравнения (3.45) дает

$$\eta = \mu \tan(-\beta + \tilde{\beta}),$$

где $\tilde{\beta}$ – произвольная константа. После возвращения к функции $g(\beta)$ это уравнение становится

$$\frac{g'(\beta)}{g(\beta)} = \mu \tan(-\beta + \tilde{\beta})$$

С учетом доказательства Леммы 3.6 и уравнения (3.35) можно утверждать, что

$$g(\beta) = C |\cos(\tilde{\beta} - \beta)|^\mu.$$

□

Теперь, из сравнения индикатрис излучения $g(\beta)$, заданных Леммами 3.6 и 3.7, очевидна идентичность обоих выражений при фиксированной γ и некотором значении β_0 .

3.6 Двухзвенные траектории

В этом подразделе рассматриваются оптимальные траектории для индикатрис излучения, которые не удовлетворяют достаточным условиям из подраздела 3.4. Для простоты и аналитической разрешимости задач рассматриваются только двухзвенные траектории. Значение риска на оптимальной двухзвенной траектории, проходящей через точки A, B, C , приведено в следующей лемме.

Лемма 3.8. *Минимальное значение риска на двухзвенной траектории, последовательно проходящей через точки A, C, B за интервал времени T , равно*

$$R_{ACB} = \frac{1}{T^{\mu-1}} \left(L_1 g^{1/\mu}(\beta_1) + L_2 g^{1/\mu}(\beta_2) \right)^\mu, \quad (3.46)$$

где

$$\begin{aligned}
L_1 &= \sqrt{(\rho_C - \rho_A)^2 + (\varphi_C - \varphi_A)^2}, \\
L_2 &= \sqrt{(\rho_B - \rho_C)^2 + (\varphi_B - \varphi_C)^2}, \\
\beta_1 &= \arctan \left(\frac{\varphi_C - \varphi_A}{\rho_C - \rho_A} \right), \\
\beta_2 &= \arctan \left(\frac{\varphi_B - \varphi_C}{\rho_B - \rho_C} \right).
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Доказательство. Согласно Лемме 3.4 значения риска на каждом сегменте траектории равны

$$\begin{aligned}
R_{AC}^* &= S_1 T_1 = \frac{L_1^\mu}{T_1^{\mu-1}} g(\beta_1), \\
R_{CB}^* &= S_2 T_2 = \frac{L_2^\mu}{T_2^{\mu-1}} g(\beta_2),
\end{aligned} \tag{3.48}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
S_1 &= \left(\frac{L_1}{T_1} \right)^\mu g(\beta_1), \\
S_2 &= \left(\frac{L_2}{T_2} \right)^\mu g(\beta_2), \\
L_1 &= \sqrt{(\rho_C - \rho_A)^2 + (\varphi_C - \varphi_A)^2}, \\
L_2 &= \sqrt{(\rho_B - \rho_C)^2 + (\varphi_B - \varphi_C)^2}, \\
\beta_1 &= \arctan \left(\frac{\varphi_C - \varphi_A}{\rho_C - \rho_A} \right), \\
\beta_2 &= \arctan \left(\frac{\varphi_B - \varphi_C}{\rho_B - \rho_C} \right).
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Ограничение на времена $T_1 > 0$ и $T_2 > 0$ имеет линейную форму

$$T_1 + T_2 = T. \tag{3.50}$$

Теперь сумма $R_{AC}^* + R_{CB}^*$ должна быть минимизирована по T_1, T_2 . Найдём оптимальные значения T_1 и T_2 , решив следующую оптимизационную задачу

$$R_{AC}^* + R_{CB}^* = \frac{L_1^\mu g(\beta_1)}{T_1^{\mu-1}} + \frac{L_2^\mu g(\beta_2)}{T_2^{\mu-1}} \rightarrow \min_{T_1, T_2, T_1+T_2=T}. \tag{3.51}$$

С учетом условия уравнения (3.50), уравнение (3.51) принимает вид

$$R_{ACB}(T_2) = R_{AC}^* + R_{CB}^* = L_1^\mu (T - T_2)^{1-\mu} g(\beta_1) + L_2^\mu T_2^{1-\mu} g(\beta_2). \tag{3.52}$$

Необходимым условием экстремума функции, описываемой уравнением (3.52), является равенство нулю ее производной по переменной T_2 :

$$-\frac{L_1^\mu g(\beta_1)}{(T - T_2)^\mu} + \frac{L_2^\mu g(\beta_2)}{T_2^\mu} = 0. \quad (3.53)$$

В связи с тем, что уравнение (3.52) представляет непрерывную, дифференцируемую функцию $R_{ACB}(T_2)$, $T_2 \in [0, T]$ с $\lim_{T_2 \downarrow 0} R_{ACB}(T_2) = +\infty$ и $\lim_{T_2 \uparrow T} R_{ACB}(T_2) = +\infty$, Уравнение (3.53) определяет условие минимума $R_{ACB}(T_2)$, т.е. его единственным решением является $\arg \min(R_{ACB}(T_2))$:

$$T_2 = \frac{T}{1 + \frac{L_1}{L_2} \left(\frac{g(\beta_1)}{g(\beta_2)} \right)^{1/\mu}}. \quad (3.54)$$

Поэтому времена T_1 и T_2 выражаются как

$$\begin{cases} T_2 = T \frac{L_2 g^{1/\mu}(\beta_2)}{L_2 g^{1/\mu}(\beta_2) + L_1 g^{1/\mu}(\beta_1)}, \\ T_1 = T \frac{L_1 g^{1/\mu}(\beta_1)}{L_2 g^{1/\mu}(\beta_2) + L_1 g^{1/\mu}(\beta_1)}. \end{cases} \quad (3.55)$$

Подставив уравнения (3.55) в первые два уравнения системы (3.49), можно получить окончательные выражения для сигналов S_1 и S_2

$$\begin{aligned} S_1 &= \left(\frac{L_1}{T_1} \right)^\mu g(\beta_1) = \left(\frac{L_1 g^{1/\mu}(\beta_1) + L_2 g^{1/\mu}(\beta_2)}{T g^{1/\mu}(\beta_1)} \right)^\mu g(\beta_1) = \\ &= \frac{1}{T^\mu} \left(L_1 g^{1/\mu}(\beta_1) + L_2 g^{1/\mu}(\beta_2) \right)^\mu; \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \left(\frac{L_2}{T_2} \right)^\mu g(\beta_2) = \left(\frac{L_1 g^{1/\mu}(\beta_1) + L_2 g^{1/\mu}(\beta_2)}{T g^{1/\mu}(\beta_2)} \right)^\mu g(\beta_2) = \\ &= \frac{1}{T^\mu} \left(L_1 g^{1/\mu}(\beta_1) + L_2 g^{1/\mu}(\beta_2) \right)^\mu. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Как видно, уравнение (3.56) идентично уравнению (3.57), т.е. значения сигнала равны на двух сегментах оптимальной траектории.

Полный риск R_{ACB} на всей траектории:

$$\begin{aligned} R_{ACB} &= S_1 T_1 + S_2 T_2 = S_1 T = \left(\frac{L_1 g^{1/\mu}(\beta_1) + L_2 g^{1/\mu}(\beta_2)}{T g^{1/\mu}(\beta_1)} \right)^\mu = \\ &= \frac{1}{T^{\mu-1}} \left(L_1 g^{1/\mu}(\beta_1) + L_2 g^{1/\mu}(\beta_2) \right)^\mu. \end{aligned} \quad (3.58)$$

□

В связи с тем, что реальные индикатрисы акустического излучения УПО имеют более сложную форму, Лемма 3.8 предоставляет простой способ проверки типа оптимальной траектории. Действительно, если в одном из случаев леммы 3.8, $R_{AC}^* + R_{CB}^* < R_{AB}^*$, то логарифмическая спираль, напрямую соединяющая точки A , B не является оптимальной, и двузвенная траектория является предпочтительной в смысле минимизации функционала риска.

Как было указано в [23], в пространстве (ρ, φ) логарифмические спирали представляются прямыми линиями. Рассмотрение оптимальных двузвенных траекторий в пространстве (ρ, φ) (рисунок 3.4) позволяет переписать уравнение (3.46) в более простом виде.

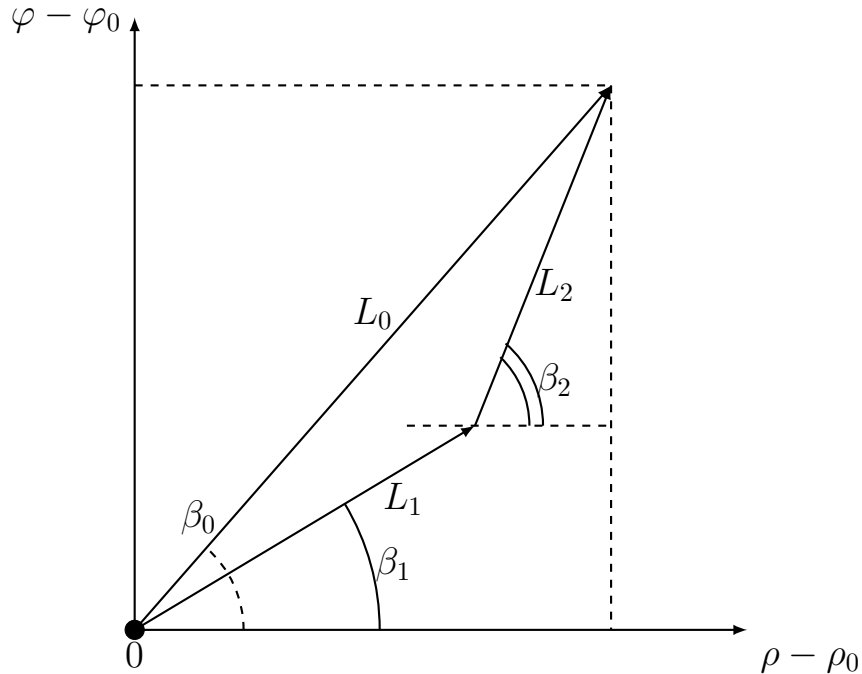


Рисунок 3.4 — Подвижный объект в системе координат (ρ, φ) .

Следствие 3.3. Минимальное значение риска на двузвенной траектории, соответственно проходящей через точки A , C , B за интервал времени T мо-

жет быть записано как

$$R_{ACB} = \frac{L_0^\mu}{T^{\mu-1}} \left(\frac{\sin(\beta_2 - \beta_0)g^{1/\mu}(\beta_1) + \sin(\beta_0 - \beta_1)g^{1/\mu}(\beta_2)}{\sin(\beta_2 - \beta_1)} \right)^\mu, \quad (3.59)$$

где

$$\begin{aligned} L_0 &= \sqrt{(\rho_B - \rho_A)^2 + (\varphi_B - \varphi_A)^2}, \\ \beta_1 &= \arctan \left(\frac{\varphi_C - \varphi_A}{\rho_C - \rho_A} \right), \\ \beta_2 &= \arctan \left(\frac{\varphi_B - \varphi_C}{\rho_B - \rho_C} \right), \\ \beta_0 &= \arctan \left(\frac{\varphi_B - \varphi_A}{\rho_B - \rho_A} \right). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Доказательство. Из треугольников на рисунке 3.4 следуют уравнения

$$\begin{cases} L_1 \cos \beta_1 + L_2 \cos \beta_2 = L_0 \cos \beta_0, \\ L_1 \sin \beta_1 + L_2 \sin \beta_2 = L_0 \sin \beta_0, \end{cases} \quad (3.61)$$

Из первого уравнения может быть выражено L_1

$$L_1 = \frac{L_0 \cos \beta_0 - L_2 \cos \beta_2}{\cos \beta_1}. \quad (3.62)$$

Подставляя уравнение (3.62) во второе уравнение системы (3.61), можно получить

$$L_2(\sin \beta_2 \cos \beta_1 - \cos \beta_2 \sin \beta_1) = L_0(\sin \beta_0 \cos \beta_1 - \cos \beta_0 \sin \beta_1),$$

что позволяет найти L_2

$$L_2 = \frac{L_0 \sin(\beta_0 - \beta_1)}{\sin(\beta_2 - \beta_1)}. \quad (3.63)$$

После подстановки уравнения (3.63) в уравнение (3.62) получаем

$$L_1 = \frac{L_0 \sin(\beta_2 - \beta_0)}{\sin(\beta_2 - \beta_1)}. \quad (3.64)$$

Используя уравнения (3.63) и (3.64), уравнение (3.46) можно переписать в виде уравнения (3.59). \square

Следует сказать несколько слов о применимости формулы (3.59). Выражение под скобками всегда должно быть положительным. Действительно, как

показано на рисунке 3.4, либо неравенство $-\pi/2 + \beta_0 \leq \beta_1 \leq \beta_0 \leq \beta_2 \leq \pi/2 + \beta_0$, либо неравенство $-\pi/2 + \beta_0 \leq \beta_2 \leq \beta_0 \leq \beta_1 \leq \pi/2 + \beta_0$ удовлетворено в силу геометрии задачи. В силу $g(\beta) > 0$ в обоих случаях это выражение положительно.

Согласно доказательству леммы 3.8 величина риска на двузвенной экстремальной траектории равна

$$R_{ACB}(\beta_1, \beta_2, T_1, T_2) = \frac{L_1^\mu(\beta_1)}{T_1^{\mu-1}} g(\beta_1) + \frac{L_1^\mu(\beta_2)}{T_2^{\mu-1}} g(\beta_2). \quad (3.65)$$

Задача 3.3. Требуется найти четверку $(\beta_1^*, \beta_2^*, T_1^*, T_2^*)$ такую, что

$$(\beta_1^*, \beta_2^*, T_1^*, T_2^*) = \arg \min_{\beta_1, \beta_2, T_1, T_2, T_1+T_2=T \geq 0} R_{ACB}(\beta_1, \beta_2, T_1, T_2). \quad (3.66)$$

Вместо решения оптимизационной Задачи 3.3 нахождения минимума функционала $R_{ACB}(\beta_1, \beta_2, T_1, T_2)$ для четырех переменных могут быть решены две последовательные оптимизационные задачи для пар переменных (T_1, T_2) и (β_1, β_2) . Это возможно, потому что Лемма 3.8 дает возможность найти пару T_1 и T_2 , которая доставляет минимум.

Задача 3.4. Требуется найти четверку $(\beta_1^*, \beta_2^*, T_1^*, T_2^*)$ которая доставляет последовательный минимум $R_{ACB}(\beta_1, \beta_2, T_1, T_2)$, поэтому

$$R_{ACB}(\beta_1, \beta_2, T_1, T_2) \rightarrow \min_{\beta_1, \beta_2} \left(\min_{T_1, T_2 \geq 0, T_1+T_2=T} \right). \quad (3.67)$$

Следующая теорема конкретизирует результат о структуре оптимальных двузвенных траекторий.

Теорема 3.4. *Оптимальные углы β_1^*, β_2^* для двузвенной оптимальной траектории не зависят от направления β_0 между начальной и конечной точками, полностью определяются индикатрисой излучения $g(\beta)$ и удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{cases} \left(\frac{g(\beta_2)}{g(\beta_1)} \right)^{1/\mu} = \cos(\beta_2 - \beta_1) + \frac{1}{\mu} \sin(\beta_2 - \beta_1) \frac{g'(\beta_1)}{g(\beta_1)}, \\ \left(\frac{g(\beta_1)}{g(\beta_2)} \right)^{1/\mu} = \cos(\beta_2 - \beta_1) - \frac{1}{\mu} \sin(\beta_2 - \beta_1) \frac{g'(\beta_2)}{g(\beta_2)}. \end{cases} \quad (3.68)$$

Доказательство. Для доказательства этой теоремы необходимо исследовать уравнение (3.59). Опустив не зависящие от β_0 постоянные L_0 и T , может быть рассмотрена переменная $\tilde{R} = R^\mu$

$$\tilde{R} = \frac{\sin(\beta_2 - \beta_0)g^{1/\mu}(\beta_1) + \sin(\beta_0 - \beta_1)g^{1/\mu}(\beta_2)}{\sin(\beta_2 - \beta_1)}. \quad (3.69)$$

Это выражение должно быть минимизировано по β_1 и β_2 , т.е.

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial \beta_1} = 0, \\ \frac{\partial R}{\partial \beta_2} = 0. \end{cases} \quad (3.70)$$

Дифференцирование первого уравнения системы (3.70) приводит к выражению

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \beta_1} = & \frac{(\sin(\beta_2 - \beta_0)\frac{1}{\mu}g'(\beta_1)g^{1/\mu-1}(\beta_1) - \cos(\beta_0 - \beta_1)g^{1/\mu}(\beta_2))\sin(\beta_2 - \beta_1)}{\sin^2(\beta_2 - \beta_1)} + \\ & + \frac{\cos(\beta_2 - \beta_1)(\sin(\beta_2 - \beta_0)g^{1/\mu}(\beta_1) + \sin(\beta_0 - \beta_1)g^{1/\mu}(\beta_2))}{\sin^2(\beta_2 - \beta_1)} = 0. \end{aligned}$$

После упрощения последнее уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \beta_1} = & g^{1/\mu}(\beta_1)\sin(\beta_2 - \beta_0)\frac{\frac{1}{\mu}\sin(\beta_2 - \beta_1)\frac{g'(\beta_1)}{g(\beta_1)} + \cos(\beta_2 - \beta_1)}{\sin^2(\beta_2 - \beta_1)} - \\ & - g^{1/\mu}(\beta_2)\frac{\sin(\beta_2 - \beta_0)}{\sin^2(\beta_2 - \beta_1)} = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение можно представить в виде произведения двух множителей, так что выполняется одно уравнение из следующей совокупности уравнений

$$\begin{aligned} \sin(\beta_2 - \beta_0) &= 0, \\ g^{1/\mu}(\beta_2) &= g^{1/\mu}(\beta_1) \left(\cos(\beta_2 - \beta_1) + \frac{1}{\mu} \sin(\beta_2 - \beta_1) \frac{g'(\beta_1)}{g(\beta_1)} \right). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Первое уравнение соответствует случаю однозвенной экстремальной траектории, поэтому оно не представляет интереса.

Аналогично второе уравнение системы (3.70) приводит к выражению

$$\frac{\partial R}{\partial \beta_2} = \frac{(\cos(\beta_2 - \beta_0)g^{1/\mu}(\beta_1) + \sin(\beta_0 - \beta_1)\frac{1}{\mu}g'(\beta_2)g^{1/\mu-1}(\beta_2)) \sin(\beta_2 - \beta_1)}{\sin^2(\beta_2 - \beta_1)} - \frac{\cos(\beta_2 - \beta_1)(\sin(\beta_2 - \beta_0)g^{1/\mu}(\beta_1) + \sin(\beta_0 - \beta_1)g^{1/\mu}(\beta_2))}{\sin^2(\beta_2 - \beta_1)}$$

После упрощения оно принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \beta_2} &= +g^{1/\mu}(\beta_2) \sin(\beta_0 - \beta_1) \frac{\sin(\beta_2 - \beta_1)\frac{1}{\mu}g'(\beta_2) - \cos(\beta_2 - \beta_1)}{\sin^2(\beta_2 - \beta_1)} + \\ &+ g^{1/\mu}(\beta_1) \frac{\sin(\beta_0 - \beta_1)}{\sin^2(\beta_2 - \beta_1)} = 0. \end{aligned}$$

Опять же, совокупность уравнений справедлива, если хотя бы одно из них выполнено

$$\begin{aligned} \sin(\beta_0 - \beta_1) &= 0, \\ g^{1/\mu}(\beta_1) &= g^{1/\mu}(\beta_2) \left(\cos(\beta_2 - \beta_1) - \frac{1}{\mu} \sin(\beta_2 - \beta_1) \frac{g'(\beta_2)}{g(\beta_2)} \right). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Первое уравнение соответствует случаю однозвенной траектории, поскольку она уже исследована.

Вторые уравнения в (3.71) и (3.72) образуют новую совокупность (3.68). Явная зависимость β_1, β_2 от β_0 отсутствует. \square

Таким образом, любая оптимальная двузвенная траектория для конкретной функции индикатрисы излучения $g(\beta)$ строится из отрезков двух оптимальных направлений β_1^* и β_2^* . Более того, легко показать, что на этих отрезках строятся и оптимальные многозвенные траектории.

Действительно, из необходимых условий экстремума 3.1, Леммы 3.68 и Теоремы 3.4 следует, что в случае невыполнения достаточных условий оптимальности для достижения минимального риска обнаружения УПО может двигаться только под углами β_1^* и β_2^* . Поскольку риск согласно уравнению (3.47) зависит только от угла и длины отрезка траектории, то любая многозвенная ломанная может быть сведена к двузвенной траектории той же суммарной длины, и наоборот. Это может быть полезно, например, когда на маршруте от A к B требуется обойти препятствие.

Следующая лемма определяет систему уравнений, полученную в Теореме 3.4, которая позволяет найти оптимальные углы β_1^* и β_2^* , минимизирующие функционал риска на двузвенной траектории.

Лемма 3.9. *Углы β_1^*, β_2^* для оптимальной двузвенной траектории удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{cases} \cos(\beta_2 - \beta_1) = \cos(\xi_1 - \xi_2), \\ \frac{g(\beta_2)}{g(\beta_1)} = \left| \frac{\cos^\mu \xi_2}{\cos^\mu \xi_1} \right|, \end{cases} \quad (3.73)$$

где

$$\begin{cases} \xi_1 = \arctan \frac{1}{\mu} \frac{g'(\beta_1)}{g(\beta_1)}, \\ \xi_2 = \arctan \frac{1}{\mu} \frac{g'(\beta_2)}{g(\beta_2)}. \end{cases} \quad (3.74)$$

Доказательство. Умножим одно уравнение из системы (3.68) на другое

$$\left(\cos(\beta_2 - \beta_1) + \frac{1}{\mu} \sin(\beta_2 - \beta_1) \frac{g'(\beta_1)}{g(\beta_1)} \right) \left(\cos(\beta_2 - \beta_1) - \frac{1}{\mu} \sin(\beta_2 - \beta_1) \frac{g'(\beta_2)}{g(\beta_2)} \right) = 1$$

Это уравнение приводит к цепочке выражений

$$\begin{aligned} & \cos^2(\beta_2 - \beta_1) + \sin(\beta_2 - \beta_1) \cos(\beta_2 - \beta_1) \frac{1}{\mu} \left(\frac{g'(\beta_1)}{g(\beta_1)} - \frac{g'(\beta_2)}{g(\beta_2)} \right) - \\ & \sin^2(\beta_2 - \beta_1) \frac{1}{\mu^2} \left(\frac{g'(\beta_1)}{g(\beta_1)} \frac{g'(\beta_2)}{g(\beta_2)} \right) = 1, \end{aligned}$$

$$\tan(\beta_2 - \beta_1) = \frac{\frac{1}{\mu} \left(\frac{g'(\beta_1)}{g(\beta_1)} - \frac{g'(\beta_2)}{g(\beta_2)} \right)}{1 + \frac{1}{\mu^2} \frac{g'(\beta_1)}{g(\beta_1)} \frac{g'(\beta_2)}{g(\beta_2)}},$$

$$\tan(\beta_2 - \beta_1) = \tan(\xi_1 - \xi_2), \quad (3.75)$$

где использованы новые переменные ξ_1 и ξ_2 :

$$\begin{cases} \xi_1 = \arctan \frac{1}{\mu} \frac{g'(\beta_1)}{g(\beta_1)}, \\ \xi_2 = \arctan \frac{1}{\mu} \frac{g'(\beta_2)}{g(\beta_2)}. \end{cases} \quad (3.76)$$

От функций тангенса в уравнении (3.75) легко перейти к функциям косинуса

$$\cos(\beta_2 - \beta_1) = \cos(\xi_1 - \xi_2). \quad (3.77)$$

Теперь вместо умножения разделим одно уравнение из системы (3.68) на другое

$$\left(\frac{g(\beta_2)}{g(\beta_1)}\right)^{2/\mu} = \frac{\cos(\beta_2 - \beta_1) + \frac{1}{\mu} \sin(\beta_2 - \beta_1) \frac{g'(\beta_1)}{g(\beta_1)}}{\cos(\beta_2 - \beta_1) - \frac{1}{\mu} \sin(\beta_2 - \beta_1) \frac{g'(\beta_2)}{g(\beta_2)}}. \quad (3.78)$$

Это уравнение приводит к цепочке выражений

$$\left(\frac{g(\beta_2)}{g(\beta_1)}\right)^{2/\mu} = \frac{1 + \frac{1}{\mu} \tan(\beta_2 - \beta_1) \frac{g'(\beta_1)}{g(\beta_1)}}{1 - \frac{1}{\mu} \tan(\beta_2 - \beta_1) \frac{g'(\beta_2)}{g(\beta_2)}},$$

$$\left(\frac{g(\beta_2)}{g(\beta_1)}\right)^{2/\mu} = \frac{1 + \left(\frac{1}{\mu} \frac{g'(\beta_1)}{g(\beta_1)}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{\mu} \frac{g'(\beta_2)}{g(\beta_2)}\right)^2}.$$

Используя переменные ξ_1 и ξ_2 , введенные в уравнении (3.76), последнее уравнение можно переписать в виде

$$\left(\frac{g(\beta_2)}{g(\beta_1)}\right)^{2/\mu} = \frac{1 + \tan^2 \xi_1}{1 + \tan^2 \xi_2}.$$

Это уравнение может быть преобразовано к виду

$$\frac{g(\beta_2)}{g(\beta_1)} = \left| \frac{\cos^\mu \xi_2}{\cos^\mu \xi_1} \right|. \quad (3.79)$$

Уравнения (3.77) и (3.79) образуют утверждение Теоремы. \square

Введем две новые функции

$$\begin{aligned} \chi(\beta) &= \beta + \xi(\beta), \\ \eta(\beta) &= \frac{g^{\frac{1}{\mu}}(\beta)}{\cos \xi(\beta)} \end{aligned} \quad (3.80)$$

и перепишем систему (3.73) как

$$\begin{cases} \chi(\beta_1) = \chi(\beta_2), \\ \eta(\beta_1) = \eta(\beta_2). \end{cases} \quad (3.81)$$

Можно заметить, что $\cos \xi(\beta) > 0$ согласно определению функции $\xi(\beta)$ в Лемме 3.9.

Прежде всего, исследуем каждую из функций $\chi(\beta)$ и $\eta(\beta)$ на экстремум и найдем их первые производные. Для функции $\chi(\beta)$ получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \frac{d\chi(\beta)}{d\beta} &= \frac{1}{d\beta} \left(\beta + \arctan \frac{1}{\mu} \frac{g'(\beta)}{g(\beta)} \right) = 1 + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\mu} \frac{g'(\beta)}{g(\beta)} \right)^2} \mu \frac{g''(\beta)g(\beta) - (g'(\beta))^2}{g^2(\beta)} = \\ &= 1 + \frac{\mu(g''(\beta)g(\beta) - (g'(\beta))^2)}{\mu^2 g^2(\beta) + (g'(\beta))^2} = \\ &= \frac{1}{\mu^2 g^2(\beta) + (g'(\beta))^2} (\mu^2 g^2(\beta) - (\mu - 1)(g'(\beta))^2 + \mu g''(\beta)g(\beta)). \end{aligned}$$

Числитель этой дроби является частью выражения $\det \mathbf{H}$, поэтому

$$\frac{d\chi(\beta)}{d\beta} = 0 \iff \det \mathbf{H} = 0.$$

Что касается функции $\eta(\beta)$, для ее дифференцирования сначала необходимо осуществить преобразование

$$\eta(\beta) = \frac{g^{\frac{1}{\mu}}(\beta)}{\cos \xi(\beta)} = \frac{g^{\frac{1}{\mu}}(\beta)}{\cos \left(\arctan \frac{1}{\mu} \frac{g'(\beta)}{g(\beta)} \right)}. \quad (3.82)$$

Так как для косинуса в знаменателе справедливо

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}}, \\ \cos \left(\arctan \frac{1}{\mu} \frac{g'(\beta)}{g(\beta)} \right) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\mu} \frac{g'(\beta)}{g(\beta)} \right)^2}}. \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (3.82) принимает вид

$$\eta(\beta) = g^{\frac{1}{\mu}}(\beta) \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\mu} \frac{g'(\beta)}{g(\beta)} \right)^2} = \frac{1}{\mu} g^{\frac{1}{\mu}-1}(\beta) \sqrt{\mu^2 g^2(\beta) + g'^2(\beta)}.$$

Дифференцируя это уравнение, получаем

$$\frac{d\eta(\beta)}{d\beta} = \frac{g^{\frac{1}{\mu}}(\beta) g'(\beta)}{\mu^2 g^2(\beta) \sqrt{\mu^2 g^2(\beta) + g'^2(\beta)}} (\mu^2 g^2(\beta) - (\mu - 1)(g'(\beta))^2 + \mu g''(\beta) g(\beta)).$$

Из последнего выражения следует:

$$\frac{d\eta(\beta)}{d\beta} = 0 \iff \det \mathbf{H} = 0 \text{ или } g'(\beta) = 0.$$

Иллюстрация применения Теоремы 3.2 состоит в следующем. Если $\det \mathbf{H} > 0$ для всех β , то $\frac{d\chi(\beta)}{d\beta} > 0$, т.е. функция $\chi(\beta)$ монотонно возрастает, и поэтому не существует решения для первого из уравнений (3.81) и однозвенная траектория является оптимальной.

Таким образом, поиск оптимальных двухзвенных траекторий сводится к решению системы (3.81). К сожалению, она не может быть решена аналитически, поэтому был разработан специальный алгоритм для поиска решений системы (3.81) [114].

Алгоритм 3.1.

1. Определить функции (3.80) для конкретного вида индикатрисы излучения $g(\beta)$.
2. Выделить отрезки $\beta \in [\beta_f, \beta_s]$ положительности гессиана $\det \mathbf{H}(\beta) > 0$.
3. На этих отрезках найти пары (β_1, β_2) как результат решения системы уравнений (3.81).
4. Используя найденные в пункте 3 пары (β_1, β_2) , вычислить риски обнаружения R согласно (3.59).
5. Среди всех найденных рисков R из пункта 5 найти минимальное значение. Это и будет искомым оптимальным риском обнаружения R^* .

Теперь следует рассмотреть вопрос, какое значение примет риск в случае, когда индикатриса излучения соответствует случаю нулевого гессиана.

Лемма 3.10. Индикатрисе излучения $g(\beta) = C|\cos(\tilde{\beta} - \beta)|^\mu$ соответствует постоянный уровень риска на двузвенной траектории для любых $\beta_1, \beta_2 \in [-\pi/2 + \tilde{\beta}, \pi/2 + \tilde{\beta}]$.

Доказательство. Подставляя эту индикатрису излучения в уравнение (3.59) и избавляясь от модуля в функции $g(\beta)$, можно получить

$$R = \frac{L_0^\mu C^\mu}{T^{\mu-1}} \left(\frac{\sin(\beta_2 - \beta_0) \cos(\tilde{\beta} - \beta_1) + \sin(\beta_0 - \beta_1) \cos(\tilde{\beta} - \beta_2)}{\sin(\beta_2 - \beta_1)} \right)^\mu,$$

Упрощение этого выражения приводит к цепочке уравнений

$$R = \frac{L_0^\mu C^\mu}{T^{\mu-1}} \left(\frac{\sin(\beta_2 - \beta_0 - \tilde{\beta} + \beta_1) + \sin(\beta_2 - \beta_0 + \tilde{\beta} - \beta_1) + \sin(\beta_0 - \beta_1 - \tilde{\beta} + \beta_2)}{2 \sin(\beta_2 - \beta_1)} \right)^\mu + \left(\frac{\sin(\beta_0 - \beta_1 + \tilde{\beta} - \beta_2)}{2 \sin(\beta_2 - \beta_1)} \right)^\mu,$$

$$R = \frac{L_0^\mu C^\mu}{T^{\mu-1}} \left(\frac{\sin(\beta_2 - \beta_0 + \tilde{\beta} - \beta_1) + \sin(\beta_0 - \beta_1 - \tilde{\beta} + \beta_2)}{2 \sin(\beta_2 - \beta_1)} \right)^\mu,$$

$$R = \frac{L_0^\mu C^\mu}{T^{\mu-1}} \left(\frac{\sin(\beta_2 - \beta_1) \cos(\tilde{\beta} - \beta_0)}{\sin(\beta_2 - \beta_1)} \right)^\mu,$$

$$R = \frac{L_0^\mu C^\mu}{T^{\mu-1}} \cos^\mu(\tilde{\beta} - \beta_0) = \left(\frac{L_0 C}{T} \cos(\tilde{\beta} - \beta_0) \right)^\mu T. \quad (3.83)$$

Отсюда следует, что R является постоянной величиной для любых $\beta_1, \beta_2 \in [-\pi/2 + \tilde{\beta}, \pi/2 + \tilde{\beta}]$ и зависит только от граничных условий L_0, β_0 и фиксированного времени на маршруте T . Более того, функция индикатрисы излучения из Леммы 3.6 приводит выражение из уравнения (3.83) к еще более простому виду, так как в этом случае $\tilde{\beta} = \beta_0$.

$$R = \left(\frac{L_0 C}{T} \right)^\mu T.$$

□

3.7 Примеры и иллюстрация результатов

В настоящем разделе рассматриваются примеры построения оптимальных опорных траекторий. Вместе с тем, в Главах 2, 3 приводится явный критерий для задачи планирования пути для различных условий обнаружения и правил принятия решений, основанных на сравнении пороговых статистик. Данные реального мира, описывающие эту статистику, могут быть использованы для практического применения исследований, представленных в этих Главах. Вероятности обнаружения могут быть получены путем вычисления критерия риска. Конечно, практические аспекты значительно усложняют все аналитические модели и оценки, но все же представленные в исследовании результаты могут быть полезны для поиска опорных траекторий для АНПА и других типов УПО.

Для моделирования и проверки найденных аналитических решений и иллюстрирования лемм и теорем были разработаны скрипты на Matlab. Каждый из приведенных ниже примеров демонстрирует результаты для различных выбранных индикатрис излучения и иллюстрирует один из случаев, обсуждаемых в Главе 3. В каждом примере начальная точка A имеет координаты $(50, 0)$, а конечная точка $B = (0, 100)$ на декартовой плоскости, поэтому $\rho_0 = \ln 50$, $\varphi_0 = 0$. S расположен в начале координат.

3.7.1 Логарифмическая спираль

В первом примере рассматривается простой случай положительного гессидана на всем диапазоне $\beta \in [0^\circ, 360^\circ]$ или $\beta \in [0, 2\pi]$ (здесь и далее в некоторых примерах угол β может также рассматриваться в градусах), или на диапазоне $\beta \in [0^\circ, 180^\circ]$ или $\beta \in [0, \pi]$ вследствие симметрии $g(\beta)$, с индикатрисой излучения

$$g(\beta) = K_1 + K_2 \cos^2(\beta), \quad (3.84)$$

где $K_1 = 0,25$, $K_2 = 0,75$. Индикатриса излучения, описываемая уравнением (3.84), рассматривалась в [15], но в случае $\mu = 2$, когда $\det H = 1$ и являлась там постоянной в силу леммы 3.5. Однако теперь это не так, поскольку $\mu = 3$.

На рисунке 3.5а показана индикатриса излучения в зависимости от угла $g(\beta)$, а на рисунке 3.5б - в виде кривой на декартовой плоскости относительно подвижного объекта, где $g(\beta)$ - длина радиус-вектора. На рисунке 3.6 показана зависимость гессиана $\det H(\beta)$. Как видно, она положительна для всех углов, поэтому достаточное условие Теоремы 3.2 выполняется, а значит, логарифмическая спираль AB является оптимальным решением с минимальным риском на траектории $R = 0.5487$.

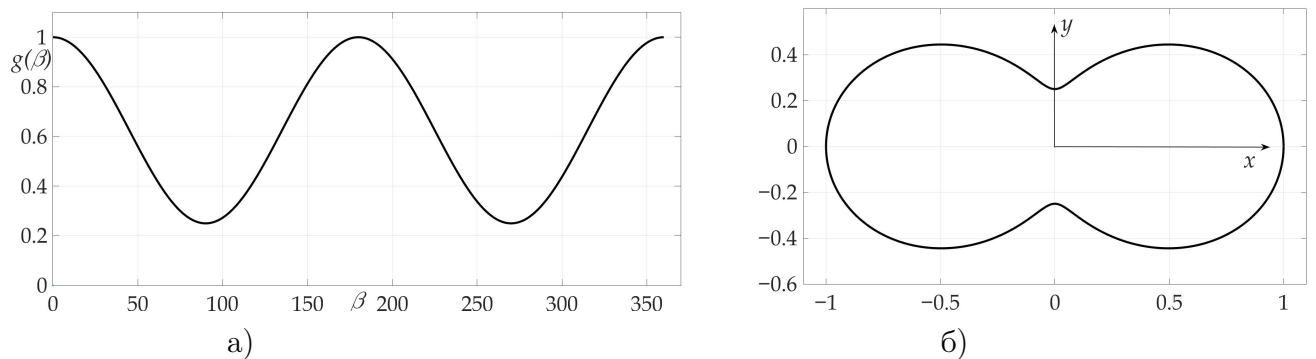


Рисунок 3.5 — Индикатриса излучения как зависимость $g(\beta)$ в полярных координатах (а) и на декартовой плоскости (б).

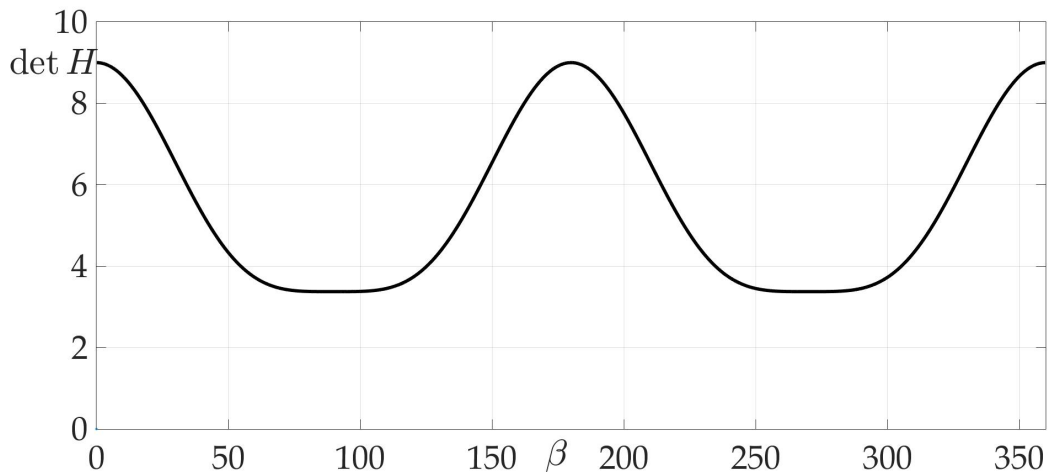


Рисунок 3.6 — Зависимость гессиана $\det H$ от β .

Этот факт иллюстрируется на рисунках 3.7а и 3.7б. На рисунке 3.7а показана поверхность риска над плоскостью $(\rho - \rho_0, \varphi - \varphi_0)$, то есть на вертикальной оси отмечено значение риска на двузвенной траектории с фиксированными начальной и конечной точками A и B и точкой переключения C с координатами

$(\rho - \rho_0, \varphi - \varphi_0)$. На рисунке 3.76 показана проекция этой поверхности на плоскость $(\rho - \rho_0, \varphi - \varphi_0)$. Черным цветом показана оптимальная траектория AB , которая является отрезком прямой, как показано в [23].

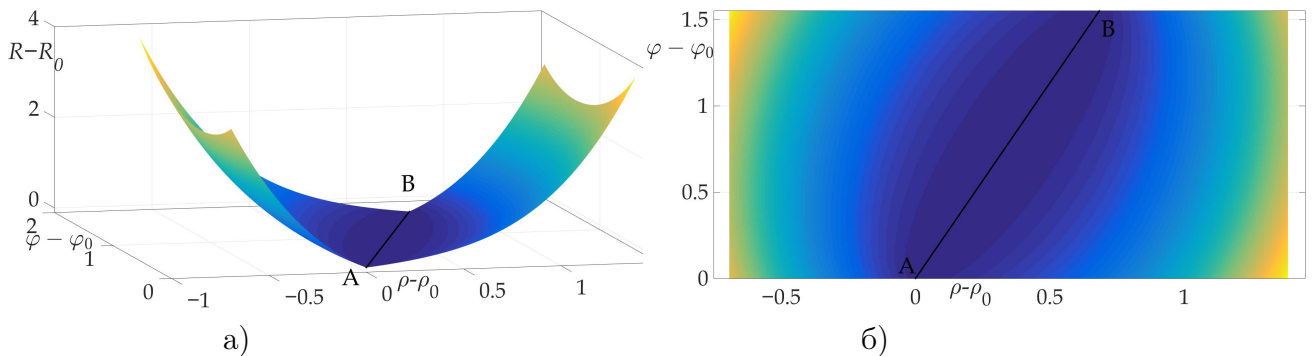


Рисунок 3.7 — Оптимальная траектория в пространстве

$(\rho - \rho_0, \varphi - \varphi_0, R - R_0)$ (a) и ее проекция на плоскость $(\rho - \rho_0, \varphi - \varphi_0)$ (b).

Рисунок 3.8 демонстрирует найденную оптимальную траекторию на декартовой плоскости.

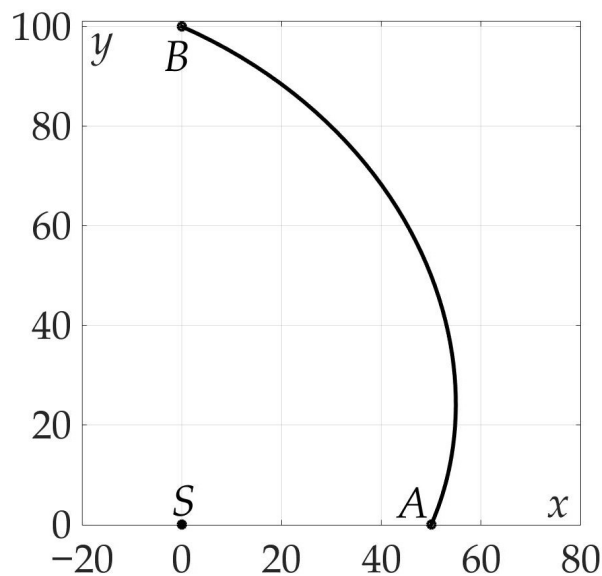


Рисунок 3.8 — Оптимальная траектория на декартовой плоскости.

3.7.2 Двухзвенная оптимальная траектория

Второй пример иллюстрирует случай двухзвенной оптимальной траектории. Как и в предыдущем примере, $\mu = 3$. Индикатриса излучения имеет более сложный вид и, как показано на рисунке 3.9, представлена в виде эллипса с

косинусной волной

$$g(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 + 0.8 \sin(\beta)}} + 0.3 \cos(6\beta).$$

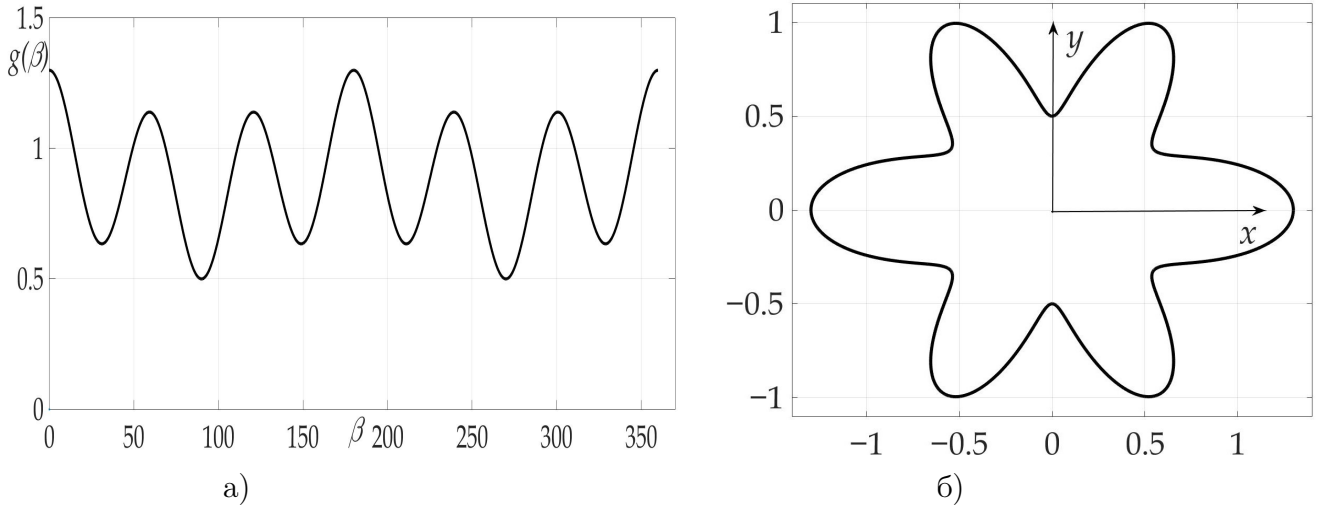


Рисунок 3.9 — Индикатриса излучения как зависимость $g(\beta)$ в полярных координатах (а) и на декартовой плоскости (б).

Рисунок 3.10 показывает, что, в отличие от примера 1, $\det H$ не является положительным для всех β , что означает, что достаточные условия оптимальности не выполнены. Как однозвенная AB , так и двухзвенные траектории AC_1B , AC_2B показаны на рисунках 3.11 и 3.12. Был разработан программный модуль в Matlab, реализующий Алгоритм 3.1 для вычисления оптимальных β_1^* , β_2^* на основе системы уравнений (3.73) из леммы 3.9. Найдены координаты точек маршрута

$$\begin{aligned} C_1 &= (\rho_{C_1}, \varphi_{C_1}) = (4.012, 1.139), \\ C_2 &= (\rho_{C_2}, \varphi_{C_2}) = (4.508, 0.428). \end{aligned} \quad (3.85)$$

Траектории AC_1B и AC_2B симметричны в смысле углов β_1^* и β_2^* : $\beta_1^* = 84.9836^\circ$ соответствует отрезкам AC_1 и C_2B , $\beta_2^* = 35.6791^\circ$ - отрезкам C_1B и AC_2 . Значения найденных рисков на этих траекториях равны

$$\begin{aligned} R_{AB} &= 1.3459, \\ R_{AC_1B} &= R_{AC_2B} = 0.9762. \end{aligned}$$

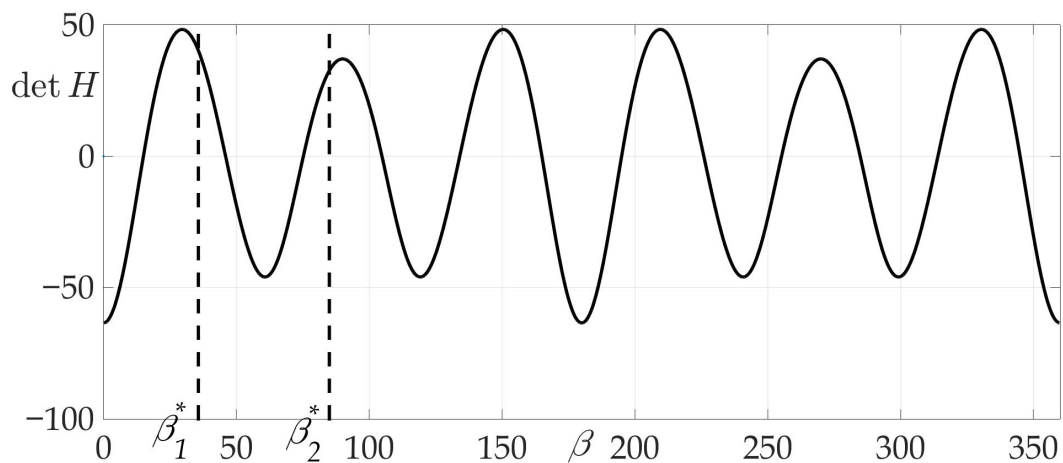


Рисунок 3.10 — Зависимость гессиана $\det H$ от β .

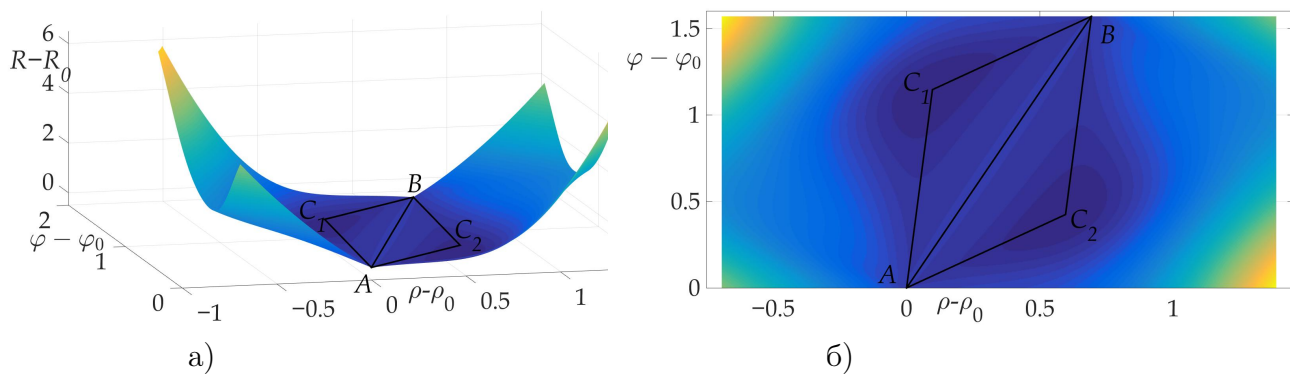


Рисунок 3.11 — Оптимальная траектория в пространстве $(\rho - \rho_0, \varphi - \varphi_0, R - R_0)$ (a) и ее проекция на плоскость $(\rho - \rho_0, \varphi - \varphi_0)$ (b).

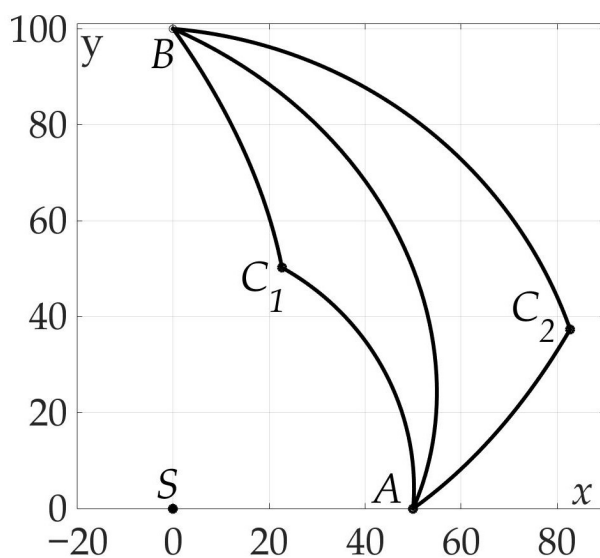


Рисунок 3.12 — Оптимальная траектория на декартовой плоскости.

Очевидно, что двузвенные траектории предпочтительнее в смысле минимизации риска почти на 37%. В данном примере единственная пара (β_1^*, β_2^*) является решением задачи 3.4.

3.7.3 Случай нулевого гессиана.

Третий пример посвящен случаю индикатрисы излучения, описанной в лемме 3.7 из раздела 3.5, то есть функции $g(\beta)$, которая обнуляет гессиан. В данном примере выбрано $\mu = 2$. Индикатрисы излучения представлена на рисунке 3.13 и имеет вид

$$g(\beta) = 25 \cos^2(\gamma + \beta), \quad \beta \in [0, \pi/2],$$

где $\tan \gamma = 0.75$, и $g(\beta) = g(-\beta) = g(\pi - \beta)$.

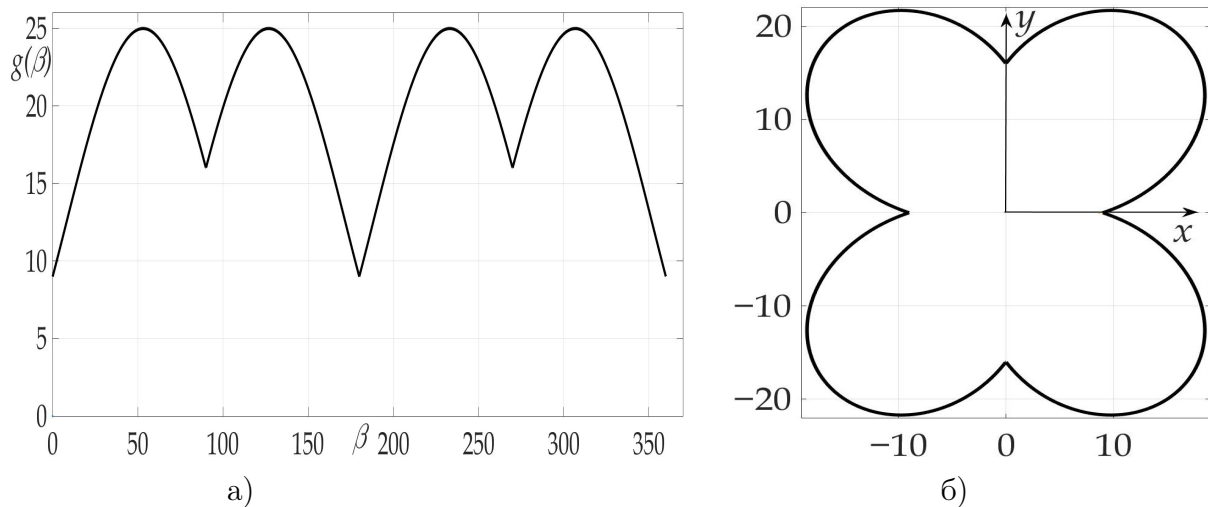


Рисунок 3.13 — Индикатриса излучения как зависимость $g(\beta)$ в полярных координатах (а) и на декартовой плоскости (б).

Рисунок 3.14 подтверждает обнуление гессиана для данной индикатрисы излучения на каждом из интервалов $\beta \in (0^\circ, 90^\circ)$, $\beta \in (90^\circ, 180^\circ)$, $\beta \in (180^\circ, 270^\circ)$, $\beta \in (270^\circ, 360^\circ)$.

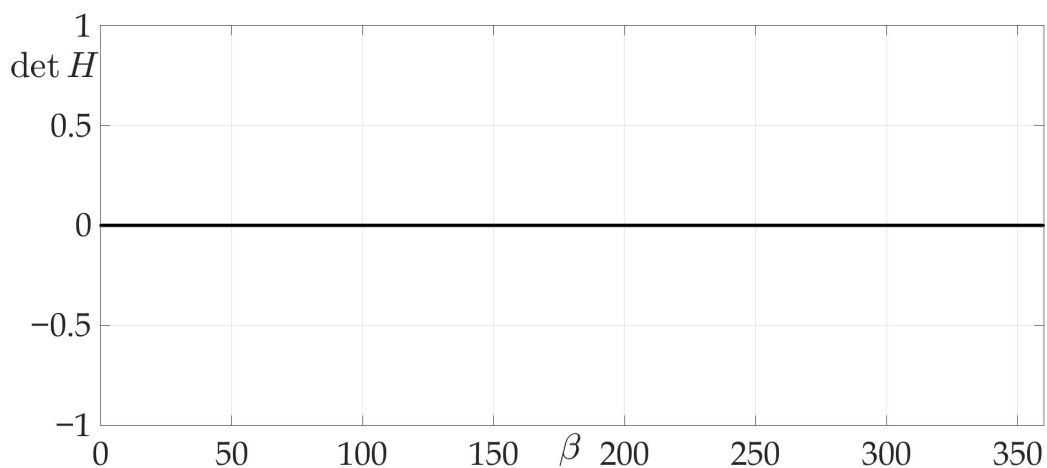


Рисунок 3.14 — Зависимость гессиана $\det H$ от β .

Рисунок 3.15 демонстрирует справедливость леммы 3.10, так как по поверхности риска видно, что значения риска всех двузвенных траекторий лежат на плато, то есть, они постоянны. Это означает, что любая двузвенная траектория имеет одинаковое значение риска, равное $R = 34.9668$.

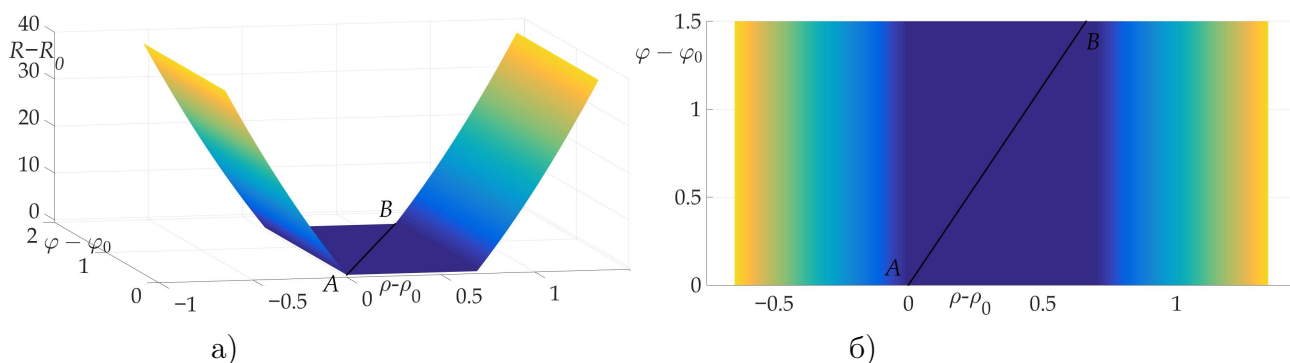


Рисунок 3.15 — Оптимальная траектория в пространстве $(\rho - \rho_0, \varphi - \varphi_0, R - R_0)$ (a) и ее проекция на плоскость $(\rho - \rho_0, \varphi - \varphi_0)$ (b).

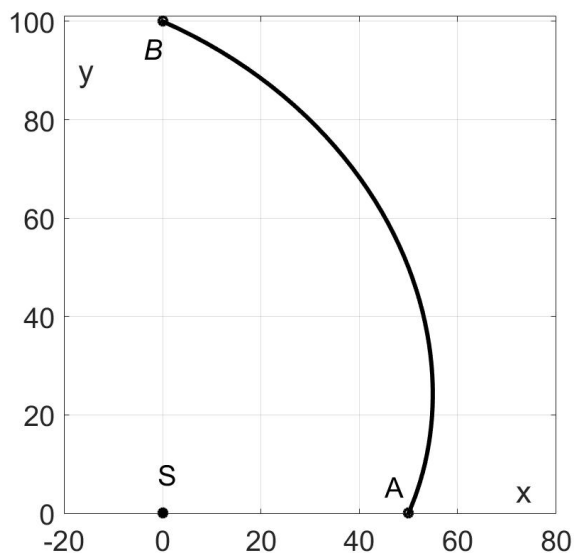


Рисунок 3.16 — Оптимальная траектория на декартовой плоскости.

3.7.4 Случай нескольких экстремальных значений функции риска

В четвертом примере рассматривается сложная диаграмма направленности излучения, показанная на рисунке 3.17. В этом примере $\mu = 2$.

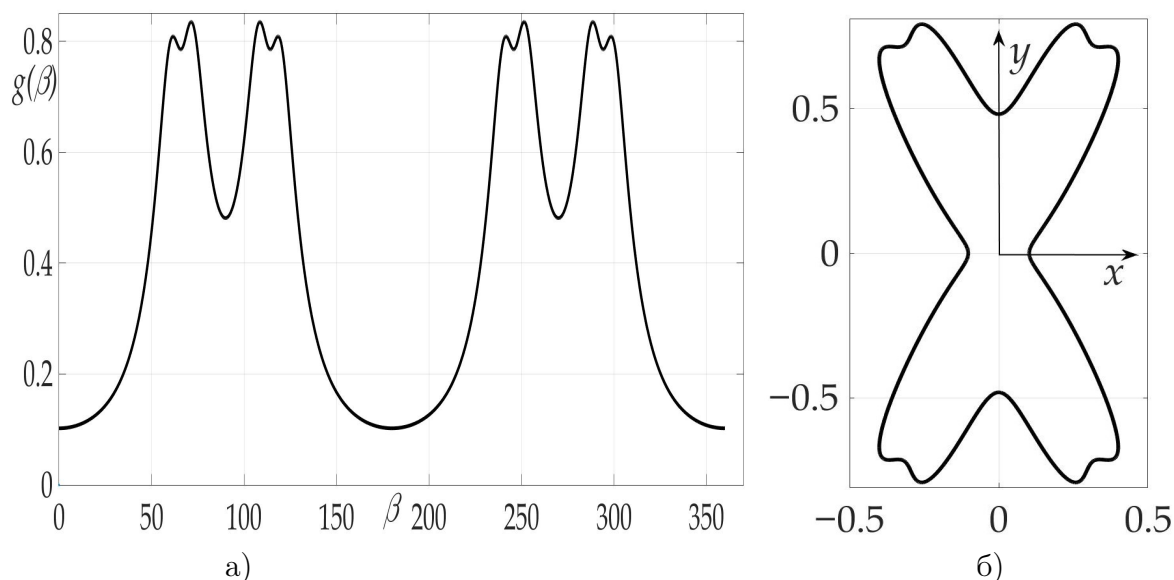


Рисунок 3.17 — Индикатриса излучения как зависимость $g(\beta)$ в полярных координатах (а) и на декартовой плоскости (б).

Особенность этого случая и выбранной индикатрисы излучения видна на Рисунках 3.18, 3.19, 3.20 - поверхность риска содержит не только локальные ми-

нимумы, но и локальные максимумы, что следует из Теоремы 3.4 и Леммы 3.10. Траектории AC_3B и AC_4B являются двузвенными траекториями, проходящими через точки C_3 и C_4 локального максимума функции риска по переменным (β_1, β_2) для задачи 3.4.

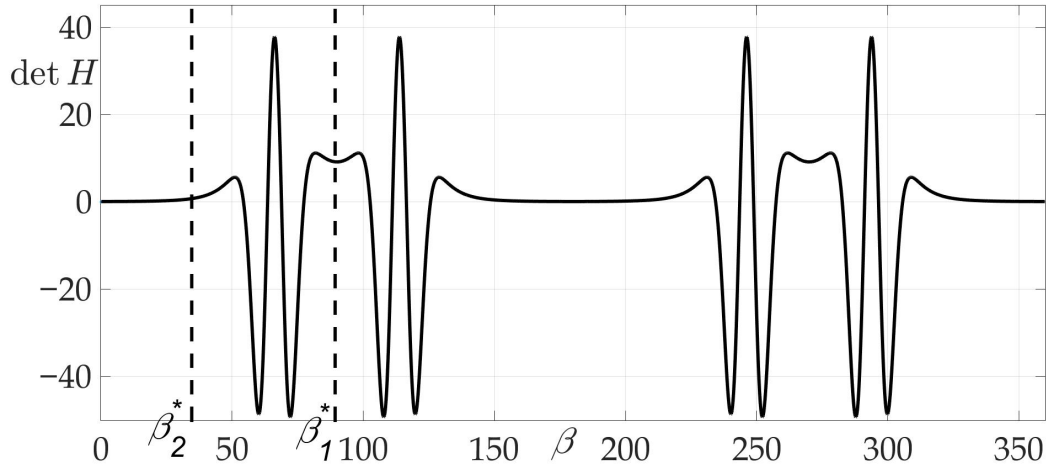


Рисунок 3.18 — Зависимость гессиана $\det H$ от β .

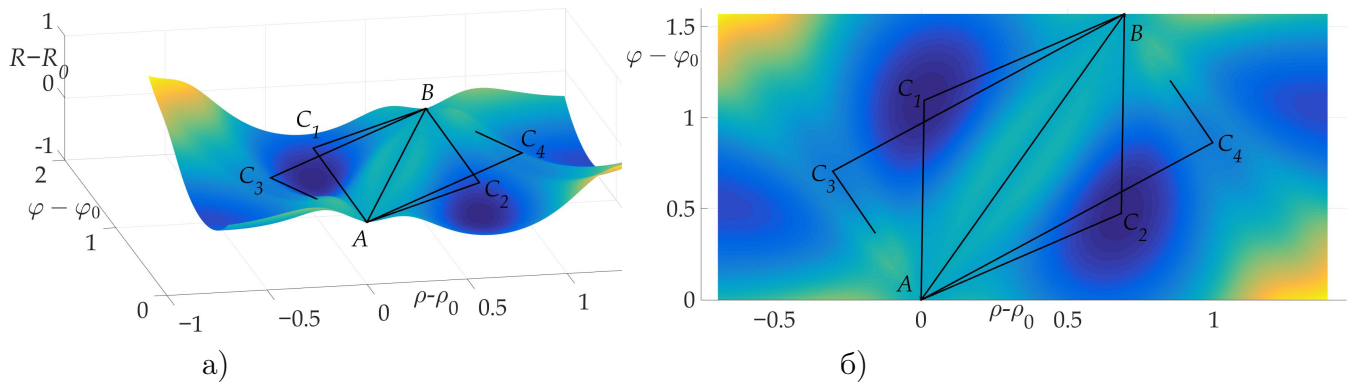


Рисунок 3.19 — Оптимальная траектория в пространстве $(\rho - \rho_0, \varphi - \varphi_0, R - R_0)$ (a) и ее проекция на плоскость $(\rho - \rho_0, \varphi - \varphi_0)$ (b).

Найдены координаты точек маршрута:

$$\begin{aligned} C_1 &= (\rho_{C_1}, \varphi_{C_1}) = (3.9259, 1.1), \\ C_2 &= (\rho_{C_2}, \varphi_{C_2}) = (4.5947, 0.4712). \end{aligned} \quad (3.86)$$

Оптимальные углы β_1^* и β_2^* : $\beta_1^* = 89.28^\circ$, $\beta_2^* = 34.6145^\circ$. Значения найденных рисков на этих траекториях составляют $R_{AB} = 1.1583$, $R_{AC_1B} = R_{AC_2B} = 0.642$, $R_{AC_3B} = R_{AC_4B} = 0.93$. Таким образом, выигрыш в риске на двузвенной траектории по сравнению с прямолинейной траекторией AB составляет приблизительно 80%.

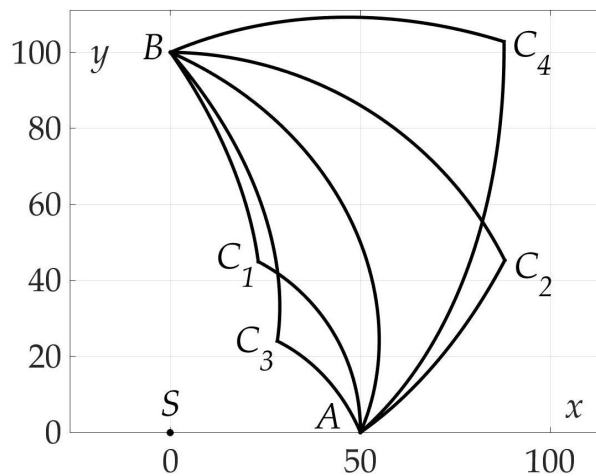


Рисунок 3.20 — Оптимальная траектория на декартовой плоскости.

3.7.5 Независимость значений оптимальных углов β_1^* и β_2^* от β_0

Последний пример иллюстрирует Теорему 3.4. Рассматривается ряд траекторий с различными конечными точками B_i , $i = 1 \dots 7$ и одной и той же начальной точкой A для подвижного объекта с фиксированной индикатрисой излучения. Оптимальные двузвенные траектории найдены с помощью численного алгоритма и показаны на плоскости $(\rho - \rho_0, \varphi - \varphi_0)$ на рисунке 3.21. Видно, что все они состоят из отрезков двух углов β_1^* и β_2^* - оптимальных углов, описанных в Теореме 3.4.

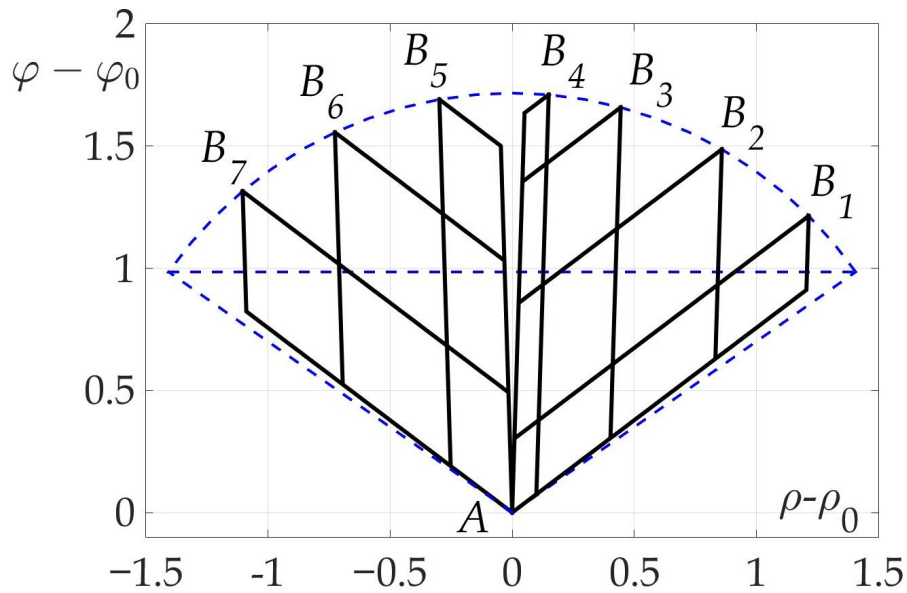


Рисунок 3.21 — Некоторые оптимальные двузвенные траектории для разных β_0 .

Эти направления и траектории представлены на рисунке 3.22. Если направление β_0 лежит в области, где $\det \mathbf{H} > 0$, то оптимальной траекторией является однозвенная. Наоборот, если направление β_0 лежит в области, где $\det \mathbf{H} < 0$, то оптимальной является двузвенная траектория. Найденные оптимальные пары (β_1, β_2) в каждой области, где $\det \mathbf{H} < 0$ такие же, как показано на рисунке 3.22 и 3.23.

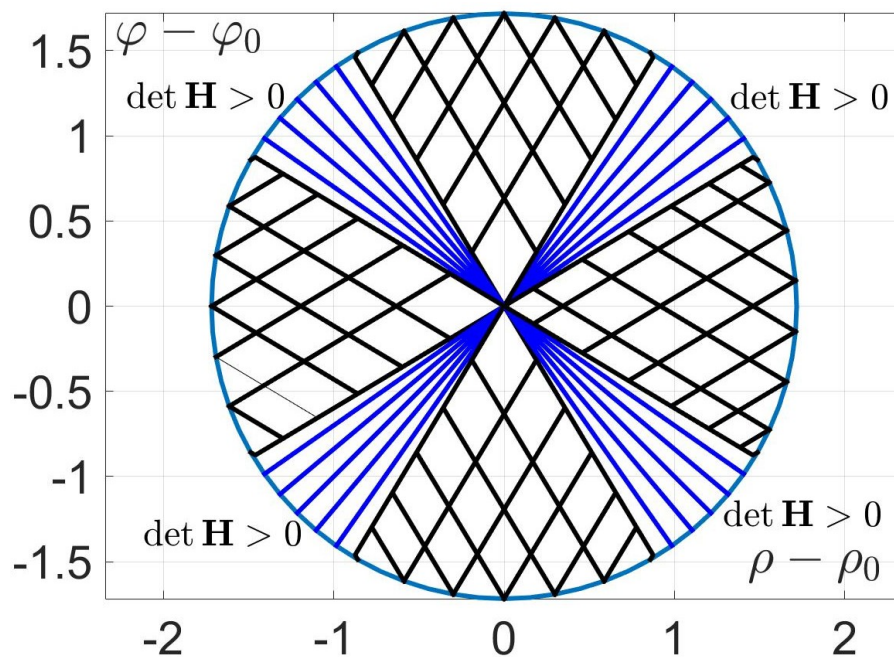


Рисунок 3.22 — Оптимальные траектории для разных β_0 на плоскости (ρ, ϕ) .

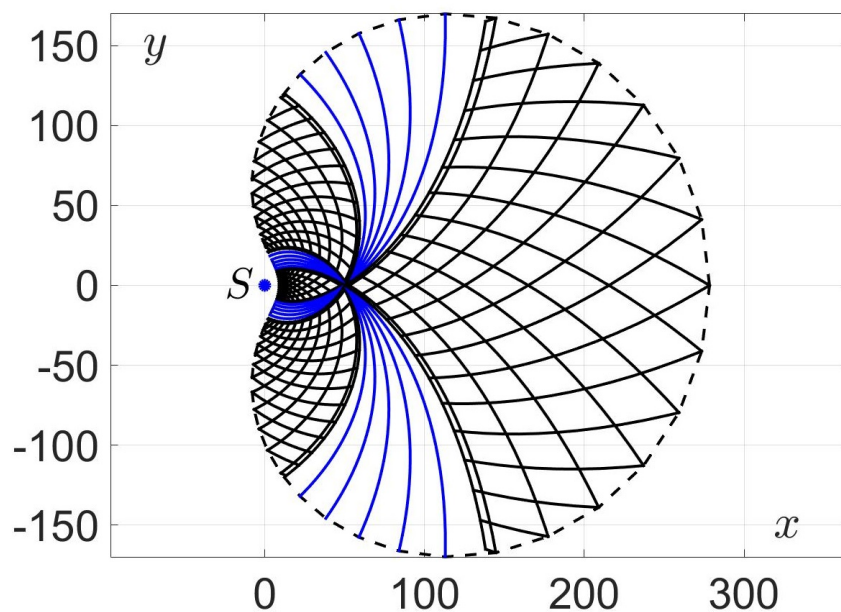


Рисунок 3.23 — Оптимальные траектории для разных β_0 на плоскости (x, y) .

Аналогичные графики могут быть построены для других краевых условий. Они показаны на рисунках 3.24 и 3.25.

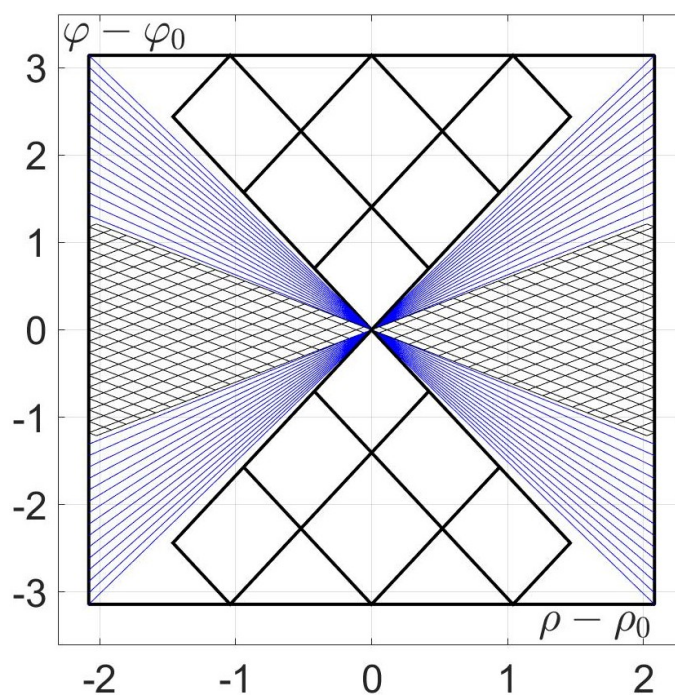


Рисунок 3.24 — Оптимальные траектории для разных β_0 на плоскости (ρ, ϕ) .

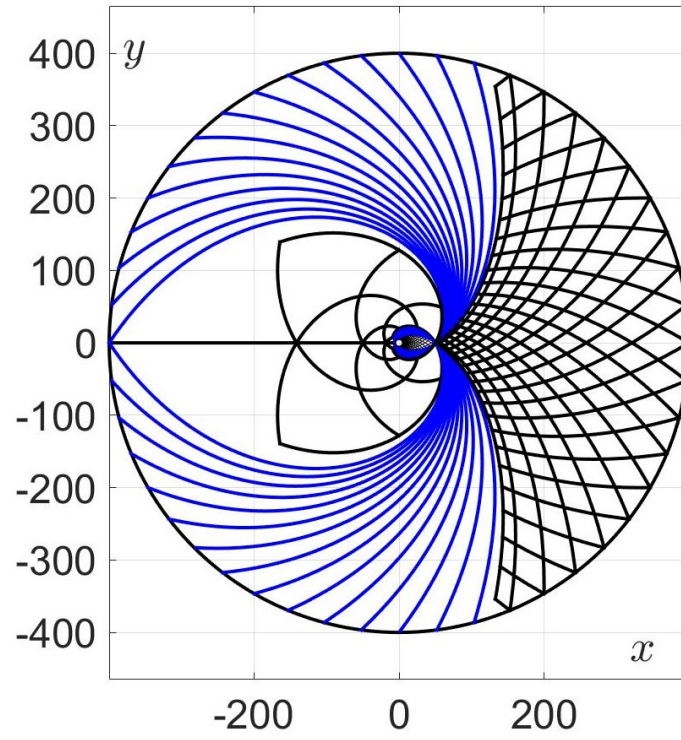


Рисунок 3.25 — Оптимальные траектории для разных β_0 на плоскости (x, y) .

3.8 Выводы по Главе 3

В данной главе была рассмотрена задача оптимального планирования траектории УПО при уклонении от обнаружения. Основной особенностью постановки задачи является неоднородная индикатриса излучения объекта. В главе сформулирован и доказан ряд лемм и теорем, строго обосновывающих полученные результаты.

1. Формализована задача уклонения от одиночного обнаружителя для УПО, обладающего неоднородной индикатрисой излучения. Доказаны необходимые и достаточные условия оптимальности. Кроме того, изучены частные случаи индикатрисы излучения, вырождающие эти условия. Получены аналитические выражения оптимальной траектории, удовлетворяющей достаточным условиям оптимальности, а также выражения для нахождения оптимальных скоростного режима и риска обнаружения.
2. Предложен метод построения оптимальной траектории на основе аналитического решения задачи планирования траекторий УПО при уклонении от одиночного обнаружителя при наличии у объекта неоднородной индикатрисы излучения для случая выполнения достаточных условий оптимальности траекторий.
3. Представлен метод определения вида оптимальной траектории в задаче планирования траекторий УПО при уклонении от одиночного обнаружителя при наличии у объекта неоднородной индикатрисы излучения, основанный на положительности гессиана задачи.
4. Разработаны метод и алгоритм построения двузвенной оптимальной траектории на основе аналитического решения задачи планирования траекторий УПО при уклонении от одиночного обнаружителя при наличии у объекта неоднородной индикатрисы излучения для случая невыполнения достаточных условий оптимальности траекторий. Сформулированы последовательности задач условной оптимизации, предложены расширенные условия оптимальности опорных траекторий и доказана их оптимальность в классе двузвенных траекторий.

Основные результаты и заключение

В данной диссертационной работе решены актуальные задачи оптимального планирования маршрута УПО при уклонении от обнаружения при наличии ограничений на длину и кривизну траектории, а так же при наличии у УПО неоднородной индикатрисы излучения.

1. Формализованы математическая модель обнаружителя и функционал риска обнаружения для случая малого отношения сигнал/шум как критерий оптимизации для задач планирования траектории.
2. Разработаны методы построения оптимальной траектории на основе аналитического решения задач планирования траектории УПО при уклонении от одиночного обнаружителя с учётом ограничений на длину траектории и на кривизну траектории для УПО с динамикой машины Дубинса.
3. Предложен метод построения оптимальной траектории на основе аналитического решения задачи планирования траекторий УПО при уклонении от одиночного обнаружителя при наличии у объекта неоднородной индикатрисы излучения для случая выполнения достаточных условий оптимальности траекторий. На основании полученных методов аналитически получены законы изменения скорости УПО и значения риска обнаружения на оптимальной траектории.
4. Разработаны метод и алгоритм построения оптимальной траектории на основе аналитического решения задачи планирования траекторий УПО при уклонении от одиночного обнаружителя при наличии у объекта неоднородной индикатрисы излучения для случая невыполнения достаточных условий оптимальности траекторий. Представлен метод определения типа оптимальной траектории на основе положительности гессиана индикатрисы излучения.
5. Показана эффективность разработанных методов и алгоритмов для планирования движения УПО. На оптимальных траекториях и при оптимальных скоростных режимах движения УПО риск обнаружения значительно уменьшается по сравнению с известными решениями задач уклонения.

Данная диссертационная работа открывает значительное количество возможных направлений будущих исследований. Дальнейшая работа может быть направлена на усложнение и обобщение математических моделей и оптимизационного функционала задачи. В Главах 2, 3 исследована поисковая система, содержащая единственный неподвижный стационарный обнаружитель. Увеличение числа обнаружителей и частот обработки сигналов представляет интересную и важную для приложений задачу. Физические особенности среды, несущей сигнал, такие как коэффициент затухания, также предстоит рассмотреть для получения аналитических оценок при построении опорных траекторий движения УПО. Разработка бортовых алгоритмов на основе полученных методов построения опорных траекторий УПО является важным направлением будущих работ.

Список сокращений и условных обозначений

АНПА - автономный необитаемый подводный аппарат

БПЛА - беспилотный летательный аппарат

БЭК - безэкипажный катер

ВМС - военно-морские силы

ГАС - гидроакустическая система

ИИ - искусственный интеллект

НПА - необитаемый подводный аппарат

МРТС - морское роботехническое средство

МРТК - морской роботехнический комплекс

ПМП - принцип максимума Понтрягина

РТК - робототехнический комплекс

СГАС - стационарная гидроакустическая система

СГН - система гидроакустического наблюдения

ТНПА - телеуправляемый необитаемый аппарат

УПО - Управляемый подвижный объект

ЭВМ - электронно-вычислительная машина

Словарь терминов

Конфликтная среда — совокупность условий внешней среды, обусловленных наличием в районе выполнения миссии подвижного объекта конфликтующих средств, оказывающих негативное влияние на данный объект.

Риск обнаружения — интегральный функционал, часто используемый в качестве критерия оптимизации в задачах уклонения от обнаружения; определяется как интеграл по траектории сигнала, излучаемого УПО, который связан с вероятностью необнаружения на каждом такте.

Индикатриса излучения — функция, характеризующая распределение мощности сигнала излучения УПО по направлению, нормированная на единицу.

Список литературы

1. *Caccetta L., Loosen I., Rehbock V.* Minimum Risk Path Planning for Submarines through a Sensor Field // The 7th International Conference on Optimization: Techniques and Applications (ICOTA7). — 2007. — P. 1–10.
2. *Caccetta L., Loosen I., Rehbock V.* Computational aspects of the optimal transit path problem // Journal of Industrial and Management Optimization. — 2008. — Vol. 4, no. 1. — P. 95–105. — DOI: [10.3934/jimo.2008.4.95](https://doi.org/10.3934/jimo.2008.4.95).
3. *Dogan A., Zengin U.* Unmanned Aerial Vehicle Dynamic-Target Pursuit by Using Probabilistic Threat Exposure Map // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 2006. — July. — Vol. 29, no. 4. — P. 944–954. — DOI: [10.2514/1.18386](https://doi.org/10.2514/1.18386).
4. *Zabarankin M., Uryasev S., Pardalos P.* Optimal Risk Path Algorithms // Cooperative Control and Optimization. Vol. 66 / ed. by P. M. Pardalos [et al.]. — Boston, MA : Springer US, 2002. — P. 273–298. — ISBN 9781402005497. — DOI: [10.1007/0-306-47536-7_13](https://doi.org/10.1007/0-306-47536-7_13).
5. *Zabarankin M., Uryasev S., Murphey R.* Aircraft routing under the risk of detection // Naval Research Logistics. — 2006. — Dec. — Vol. 53, no. 8. — P. 728–747. — DOI: [10.1002/nav.20165](https://doi.org/10.1002/nav.20165).
6. *Kabamba P. T., Meerkov S. M., Zeitz F. H.* Optimal Path Planning for Unmanned Combat Aerial Vehicles to Defeat Radar Tracking // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 2006. — Mar. — Vol. 29, no. 2. — P. 279–288. — DOI: [10.2514/1.14303](https://doi.org/10.2514/1.14303).
7. H. S. Sidhu [et al.] // Journal of Battlefield Technology. — 2006. — Vol. 9, no. 3. — P. 33–39. — DOI: [10.3316/informit.104830077912654](https://doi.org/10.3316/informit.104830077912654).
8. *Pachter L. S., Pachter M.* Optimal paths for avoiding a radiating source // Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.01CH37228). — Orlando, FL, USA : IEEE, 2001. — P. 3581–3586. — ISBN 9780780370616. — DOI: [10.1109/CDC.2001.980415](https://doi.org/10.1109/CDC.2001.980415).

9. *Cai W., Zhang M., Zheng Y.* Task Assignment and Path Planning for Multiple Autonomous Underwater Vehicles Using 3D Dubins Curves // *Sensors*. — 2017. — July. — Vol. 17, no. 7. — P. 1607. — DOI: [10.3390/s17071607](https://doi.org/10.3390/s17071607).
10. *Воронин А. Н., Ясинский А. Г., Шворов С. А.* Синтез компромиссно-оптимальных траекторий мобильных роботов в конфликтной среде // *Проблемы управления и информатики*. — 2002. — № 2. — с. 12—18.
11. *Галяев А. А., Маслов Е. П., Рубинович Е. Я.* Об одной задаче управления движением объекта в конфликтной среде // *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления*. — 2009. — № 4. — с. 130—136.
12. *Галяев А. А., Маслов Е. П.* Оптимизация законов уклонения ПО от обнаружения // *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления*. — 2010. — № 4. — с. 52—62.
13. *Галяев А. А., Маслов Е. П.* О задаче патрулирования рубежа // *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления*. — 2011. — № 5. — с. 143—153.
14. Планирование маршрута подвижного объекта при уклонении от разнородных поисковых средств / А. А. Галяев [и др.]. — 2020. — янв. — DOI: [10.25728/VSPU.2019.1403](https://doi.org/10.25728/VSPU.2019.1403).
15. Path Planning in Threat Environment for UUV with Non-Uniform Radiation Pattern / А. А. Galyaev [et al.] // *Sensors*. — 2020. — Apr. — Vol. 20, no. 7. — P. 2076. — DOI: [10.3390/s20072076](https://doi.org/10.3390/s20072076).
16. Роботизация и военное дело будущего / М. С. Барабанов [и др.] ; под ред. В. Н. Бондарев. — Москва : Центр анализа стратегий и технологий, 2021. — с. 232. — ISBN 9785604536209.
17. *Галяев А. А., Маслов Е. П.* Оптимизация закона уклонения подвижного объекта от обнаружения при наличии ограничений // *Автоматика и телемеханика*. — 2012. — № 6. — с. 83—94.
18. *Галяев А. А.* Задача уклонения от подвижного одиночного наблюдателя на плоскости в конфликтной среде // *Автоматика и телемеханика*. — 2014. — № 6. — с. 28—37.

19. *Галяев А. А.* Задача уклонения от обнаружения системой разнородных наблюдателей: один сенсор – группа детекторов // Проблемы управления. — 2016. — № 3. — с. 72–77.
20. *Галяев А. А., Маслов Е. П.* Уклонение в конфликтной среде от обнаружения системой разнородных наблюдателей // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2014. — т. 2014, № 4. — с. 18–27. — DOI: [10.7868/S0002338814040076](https://doi.org/10.7868/S0002338814040076).
21. *Rachmawati D., Gustin L.* Analysis of Dijkstras Algorithm and A* Algorithm in Shortest Path Problem // Journal of Physics: Conference Series. — 2020. — June. — Vol. 1566, no. 1. — P. 012061.
22. Уклонение подвижного объекта от обнаружения группой наблюдателей при малых отношениях сигнал/помеха / Т. Г. Абрамянц [и др.] // Информационно-управляющие системы. — 2011. — т. 2. — с. 2–7.
23. *Галяев А. А.* О функционале обнаружения при движении объекта в конфликтной среде // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 4. — с. 100–105.
24. A Comprehensive Review of Path Planning Algorithms for Autonomous Underwater Vehicles / M. Panda [et al.] // International Journal of Automation and Computing. — 2020. — June. — Vol. 17, no. 3. — P. 321–352. — DOI: [10.1007/s11633-019-1204-9](https://doi.org/10.1007/s11633-019-1204-9).
25. A Survey of Path Planning Algorithms for Mobile Robots / K. Karur [et al.] // Vehicles. — 2021. — Aug. — Vol. 3, no. 3. — P. 448–468. — DOI: [10.3390/vehicles3030027](https://doi.org/10.3390/vehicles3030027).
26. *Li D., Wang P., Du L.* Path Planning Technologies for Autonomous Underwater Vehicles-A Review // IEEE Access. — 2019. — Vol. 7. — P. 9745–9768. — DOI: [10.1109/ACCESS.2018.2888617](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2018.2888617).
27. Unmanned Aerial Vehicle Route Planning in the Presence of a Threat Environment Based on a Virtual Globe Platform / M. Zhang [et al.] // ISPRS International Journal of Geo-Information. — 2016. — Oct. — Vol. 5, no. 10. — P. 184. — DOI: [10.3390/ijgi5100184](https://doi.org/10.3390/ijgi5100184).

28. Grid-Based Mobile Robot Path Planning Using Aging-Based Ant Colony Optimization Algorithm in Static and Dynamic Environments / F. H. Ajeil [et al.] // *Sensors*. — 2020. — Mar. — Vol. 20, no. 7. — P. 1880. — DOI: [10.3390/s20071880](https://doi.org/10.3390/s20071880).
29. UAV Motion Strategies in Uncertain Dynamic Environments: A Path Planning Method Based on Q-Learning Strategy / J.-h. Cui [et al.] // *Applied Sciences*. — 2018. — Nov. — Vol. 8, no. 11. — P. 2169. — DOI: [10.3390/app8112169](https://doi.org/10.3390/app8112169).
30. *Panov A. I., Yakovlev K. S., Suvorov R.* Grid Path Planning with Deep Reinforcement Learning: Preliminary Results // *Procedia Computer Science*. — 2018. — Vol. 123. — P. 347–353. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.procs.2018.01.054>. — 8th Annual International Conference on Biologically Inspired Cognitive Architectures, BICA 2017 (Eighth Annual Meeting of the BICA Society), held August 1-6, 2017 in Moscow, Russia.
31. *Марков А. А.* Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах. // *Сообщения Харьковского математического общества*. — 1889. — № 5. — с. 250–276.
32. *Isaacs R.* *Games of Pursuit*. — Santa Monica, CA : RAND Corporation, 1951.
33. *Petrosjan L. A.* *Differential Games of Pursuit*. — World Scientific, 09/1993. — ISBN 9789810209797. — DOI: [10.1142/1670](https://doi.org/10.1142/1670).
34. *Peters H.* *Game Theory*. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2008. — ISBN 9783540692904. — DOI: [10.1007/978-3-540-69291-1](https://doi.org/10.1007/978-3-540-69291-1).
35. Path planning in time dependent flow fields using level set methods / T. Lolla [et al.] // *2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. — 2012. — P. 166–173. — DOI: [10.1109/ICRA.2012.6225364](https://doi.org/10.1109/ICRA.2012.6225364).
36. Time-optimal path planning in dynamic flows using level set equations: theory and schemes / T. Lolla [et al.] // *Ocean Dynamics*. — 2014. — Oct. — Vol. 64, no. 10. — P. 1373–1397. — DOI: [10.1007/s10236-014-0757-y](https://doi.org/10.1007/s10236-014-0757-y).

37. *Lolla T., Haley P. J., Lermusiaux P. F. J.* Time-optimal path planning in dynamic flows using level set equations: realistic applications // *Ocean Dynamics*. — 2014. — Oct. — Vol. 64, no. 10. — P. 1399–1417. — DOI: [10.1007/s10236-014-0760-3](https://doi.org/10.1007/s10236-014-0760-3).
38. *Subramani D. N., Haley P. J., Lermusiaux P. F. J.* Energy-optimal path planning in the coastal ocean // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. — 2017. — May. — Vol. 122, no. 5. — P. 3981–4003. — DOI: [10.1002/2016JC012231](https://doi.org/10.1002/2016JC012231).
39. *Kulkarni C. S., Lermusiaux P. F. J.* Three-dimensional time-optimal path planning in the ocean // *Ocean Modelling*. — 2020. — Vol. 152. — P. 101644. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ocemod.2020.101644>.
40. Graph-Search and Differential Equations for Time-Optimal Vessel Route Planning in Dynamic Ocean Waves / G. Mannarini [et al.] // *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*. — 2020. — Vol. 21, no. 8. — P. 3581–3593. — DOI: [10.1109/TITS.2019.2935614](https://doi.org/10.1109/TITS.2019.2935614).
41. *Rubinovich E. Y.* Alternate Pursuit of Two Targets, One of Which Is a False // *Stability, Control and Differential Games*. — Cham : Springer International Publishing, 2020. — P. 107–116. — ISBN 9783030428303. — DOI: [10.1007/978-3-030-42831-0_10](https://doi.org/10.1007/978-3-030-42831-0_10).
42. *Маслов Е. П., Рубинович Е. Я.* Уклонение от поисковой системы использованием мобильной ложной цели // *Материалы конференции «Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах»*. — Санкт-Петербург : ЦНИИ «Электроприбор», 2012. — с. 164–166.
43. *Garcia E., Casbeer D., Pachter M.* The Complete Differential Game of Active Target Defense // *Journal of Optimization Theory and Applications*. — 2021. — Dec. — Vol. 191. — P. 1–25. — DOI: [10.1007/s10957-021-01816-z](https://doi.org/10.1007/s10957-021-01816-z).
44. *Garcia E., Casbeer D., Pachter M.* Active Target Defense Differential Game with a Fast Defender // *Proceedings of the American Control Conference*. — 2015. — Feb. — Vol. 2015. — DOI: [10.1109/ACC.2015.7171913](https://doi.org/10.1109/ACC.2015.7171913).

45. *Dubins L. E.* On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents // American Journal of Mathematics. — 1957. — July. — Vol. 79, no. 3. — P. 497. — DOI: [10.2307/2372560](https://doi.org/10.2307/2372560).
46. *Pecsvaradi T.* Optimal horizontal guidance law for aircraft in the terminal area // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1972. — Dec. — Vol. 17, no. 6. — P. 763–772. — DOI: [10.1109/TAC.1972.1100160](https://doi.org/10.1109/TAC.1972.1100160).
47. *Бузиков М. Э., Галяев А. А.* Перехват подвижной цели машиной Дубинса за кратчайшее время // Автоматика и телемеханика. — 2021. — май. — с. 3–19. — DOI: [10.31857/S0005231021050019](https://doi.org/10.31857/S0005231021050019).
48. *Balkcom D. J., Mason M. T.* Time Optimal Trajectories for Bounded Velocity Differential Drive Vehicles // The International Journal of Robotics Research. — 2002. — Mar. — Vol. 21, no. 3. — P. 199–217.
49. *Ардентов А. А., Локуцкий Л. В., Сачков Ю. Л.* Решение серии задач оптимального управления с 2-мерным управлением на основе выпуклой тригонометрии // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. — 2020. — т. 494, № 1. — с. 86–92. — DOI: [10.31857/S2686954320050276](https://doi.org/10.31857/S2686954320050276).
50. A Broadband Beamformer Suitable for UUV to Detect the Tones Radiated from Marine Vessels / S. Ma [et al.] // Sensors. — 2018. — Sept. — Vol. 18, no. 9. — P. 2928. — DOI: [10.3390/s18092928](https://doi.org/10.3390/s18092928).
51. *Zhi-Wen W., Kun L. M., Li-jing W.* Path Planning for UUV in Dynamic Environment // 2016 9th International Symposium on Computational Intelligence and Design (ISCID). Vol. 1. — 2016. — P. 211–215. — DOI: [10.1109/ISCID.2016.1055](https://doi.org/10.1109/ISCID.2016.1055).
52. Перспективы создания бортовых комплексов управления физическими полями подводных лодок / С. Н. Васильев [и др.] // Сборник материалов конференции «Управление в морских и аэрокосмических системах» (УМАС-2016). — Санкт-Петербург : Изд-во ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2016. — с. 3–12.

53. Интеллектуальное управление автономными мобильными аппаратами / С. Н. Васильев [и др.] // Системный анализ, управление и навигация : Тезисы докладов XXII международной научной конференции. — Евпатория : Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2017. — с. 14—17.
54. Обеспечение и управление скрытностью подводных объектов: история и перспективы / С. Н. Васильев [и др.] // Десятая Всероссийская мультиконференция по проблемам управления МКПУ-2017 : Материалы 10-й Всероссийской мультиконференции. — Геленджик : Южный федеральный университет, 2017. — с. 45—47.
55. *Bagnitckii A., Inzartsev A., Pavin A.* Planning and correction of the AUV coverage path in real time // 2017 IEEE Underwater Technology (UT). — Busan, South Korea : IEEE, 2017. — P. 1–6. — ISBN 9781509052660. — DOI: [10.1109/UT.2017.7890299](https://doi.org/10.1109/UT.2017.7890299).
56. Модели, системы и технологии подводных роботов и их применение для решения поисково-обследовательских задач / Киселев, Л. В. [и др.]. — 2020. — янв. — DOI: [10.25728/VSPU.2019.3271](https://doi.org/10.25728/VSPU.2019.3271).
57. *Борейко А. А., Инзарцев А. В., Машошин А. И.* Система управления автономным необитаемым подводным аппаратом большой автономности // Материалы XII мультиконференции по проблемам управления (МКПУ-2019). — Геленджик : Издательство Южного федерального университета, 2019. — с. 189—192.
58. Подводные робототехнические комплексы: системы, технологии, применение. — Москва : Институт проблем морских технологий Дальневосточного отделения Российской академии наук.
59. Применение математических методов оптимизации при управлении скрытностью морских подводных объектов / Е. И. Якушенко [и др.] // Материалы конференции «управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах». — Санкт-Петербург : ЦНИИ «Электроприбор», 2012. — с. 843—846.
60. *Лебедев В. Г., Кулида Е. Л., П. К. И.* Оптимизация управления динамическими объектами с целью снижения риска их обнаружения в конфликтной среде // Управление развитием крупномасштабных систем mlsd 2010

- : Материалы четвертой международной конференции. — Санкт-Петербург : Учреждение Российской академии наук институт проблем управления им В.А. Трапезникова РАН, 2010. — с. 219—221.
61. *Добровидов А. В., Л. К. Е., Рудько И. М.* Оптимизация траектории движения объекта по вероятностному критерию в режиме пассивной гидролокации в анизотропной среде // Проблемы управления. — 2014. — янв. — № 4. — с. 31—37.
62. Бортовой комплекс управления скрытностью морских подводных объектов с оперативно советующей системой / Е. И. Якушенко [и др.] // Вестник компьютерных и информационных технологий. — 2012. — янв. — т. 100, № 4. — с. 9—16.
63. *Добровидов А. В., Кулида Е. Л., Рудько И. М.* Бортовой комплекс управления скрытностью морских подводных объектов с оперативно советующей системой // Проблемы управления. — 2011. — янв. — № 3. — с. 64—75.
64. *Галяев А. А., Маслов Е. П.* Оптимизация закона уклонения морского подвижного объекта от обнаружения в конфликтной среде // XII всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. — Санкт-Петербург : Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. — с. 3534—3552.
65. *Washburn A. R., Kress M.* Combat Modeling. — Dordrecht New York : Springer Verlag, 2009. — (International series in operations research management science ; 134). — ISBN 9781441907905.
66. *Абчук В. А., Суздаль В. Г.* Поиск объектов. — Москва : Советское радио, 1977. — с. 360.
67. *Галяев А. А.* О задаче прорыва между двумя сенсорами при движении объекта в конфликтной среде // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 5. — с. 3—10.
68. Уклонение подвижного объекта от обнаружения в конфликтной среде / А. А. Галяев [и др.] // Управление большими системами: сборник трудов. — 2019. — май. — № 79. — DOI: [10.25728/UBS.2019.79.5](https://doi.org/10.25728/UBS.2019.79.5).

69. Уклонение подвижного объекта от обнаружения системой наблюдателей: сенсор-маневренное средство / А. А. Галяев [и др.] // Автоматика и телемеханика. — 2017. — № 8. — с. 113–126.
70. *Галяев А. А., Маслов Е. П.* Уклонение на плоскости от вращающейся зоны обнаружения // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2013. — № 3. — с. 51. — DOI: [10.7868 / S0002338813030074](https://doi.org/10.7868/S0002338813030074).
71. *Sysoev L. P.* Detection probability criterion on the path for mobile object control problem in conflict environment // Automation and Remote Control. — 2011. — Aug. — Vol. 72, no. 8. — P. 1766–1775. — DOI: [10.1134/S0005117911080157](https://doi.org/10.1134/S0005117911080157).
72. *Shaikin M. E.* On statistical risk functional in a control problem for an object moving in a conflict environment // Journal of Computer and Systems Sciences International. — 2011. — Feb. — Vol. 50, no. 1. — P. 20–29. — DOI: [10.1134/S1064230711010175](https://doi.org/10.1134/S1064230711010175).
73. *Галяев А. А., Гурьев Ю. В.* О задаче совместного преследования двух целей // Сборник Трудов ВМПИ. — 2013. — № 1. — с. 69–77.
74. Уклонение подводного объекта от обнаружения разнородными средствами при малых отношениях сигнал – помеха / Т. Г. Абрамянц [и др.] // Сборник научных трудов ВМИИ. — 2011. — № 4. — с. 12–38.
75. Intelligent Control of Autonomous and Anthropocentric On-board Systems / М. Е. Buzikov [et al.] // Proceedings of the 13th International Symposium “Intelligent Systems 2018” (INTELS’18). Vol. 150. — St. Petersburg, Russia, 2018. — P. 10–18.
76. *Miller B. M., Miller G. B., Semenikhin K. V.* UAV Path Planning in Search and Rescue Operations // Stability, Control and Differential Games / ed. by A. Tarasyev, V. Maksimov, T. Filippova. — Cham : Springer International Publishing, 2020. — P. 87–97. — ISBN 9783030428303. — DOI: [10.1007/978-3-030-42831-0_8](https://doi.org/10.1007/978-3-030-42831-0_8).
77. Методы видеонавигации бпла с использованием оптического потока / Колосов К. С. [и др.]. — 2020. — янв. — DOI: [10.25728/VSPU.2019.0290](https://doi.org/10.25728/VSPU.2019.0290).

78. *Miller A. B., Miller B. M.* 3D Autonomous Underwater Navigation Using Seabed Acoustic Sensing // 2018 26th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED). — Zadar : IEEE, 06/2018. — P. 607–612. — ISBN 9781538678909. — DOI: [10.1109/MED.2018.8442781](https://doi.org/10.1109/MED.2018.8442781).
79. Моделирование процесса навигации беспилотного летательного аппарата с использованием двух бортовых камер, смещенных по высоте / А. К. Попов [и др.] // Сенсорные системы. — 2018. — № 1. — с. 19–25. — DOI: [10.7868/S0235009218010043](https://doi.org/10.7868/S0235009218010043).
80. *Miller A. B., Miller B. M.* On AUV Navigation Based on Acoustic Sensing of the Seabed Profile // Journal of Communications Technology and Electronics. — 2018. — Dec. — Vol. 63, no. 12. — P. 1502–1505. — DOI: [10.1134/S106422691812015X](https://doi.org/10.1134/S106422691812015X).
81. *Miller A. B., Miller B. M.* Underwater Target Tracking Using Bearing-Only Measurements // Journal of Communications Technology and Electronics. — 2018. — June. — Vol. 63, no. 6. — P. 643–649. — DOI: [10.1134/S1064226918060207](https://doi.org/10.1134/S1064226918060207).
82. UAV Navigation On The Basis Of The Feature Points Detection On Underlying Surface / I. A. Konovalenko [et al.] // ECMS 2015 Proceedings edited by: Valeri M. Mladenov, Petia Georgieva, Grisha Spasov, Galidiya Petrova. — ECMS, 05/2015. — P. 499–505. — ISBN 9780993244001. — DOI: [10.7148/2015-0499](https://doi.org/10.7148/2015-0499).
83. *Galyaev A. A., Lysenko P. V., Rubinovich E. Y.* Optimal Stochastic Control in the Interception Problem of a Randomly Tacking Vehicle // Mathematics. — 2021. — Sept. — Vol. 9, no. 19. — P. 2386. — DOI: [10.3390/math9192386](https://doi.org/10.3390/math9192386).
84. *Galyaev A. A., Lysenko P. V., Yakhno V. P.* Optimal Path Planning for an Object in a Random Search Region // Automation and Remote Control. — 2018. — Nov. — Vol. 79, no. 11. — P. 2080–2089. — DOI: [10.1134/S0005117918110115](https://doi.org/10.1134/S0005117918110115).
85. *Mercer G., Sidhu H.* Two continuous methods for determining a minimal risk path through a minefield // ANZIAM Journal. — 2007. — July. — Vol. 49. — P. 293. — DOI: [10.21914/anziamj.v48i0.56](https://doi.org/10.21914/anziamj.v48i0.56).

86. *Causa F., Fasano G., Grassi M.* Multi-UAV Path Planning for Autonomous Missions in Mixed GNSS Coverage Scenarios // *Sensors*. — 2018. — Nov. — Vol. 18, no. 12. — P. 4188. — DOI: [10.3390/s18124188](https://doi.org/10.3390/s18124188).
87. *Galyaev A. A., Lysenko P. V., Yakhno V. P.* Evading a Single Detector by an Object Moving at a Given Speed // *Automation and Remote Control*. — 2021. — July. — Vol. 82, no. 7. — P. 1281–1291. — DOI: [10.1134/S0005117921070110](https://doi.org/10.1134/S0005117921070110).
88. *Cococcioni M., Fiaschi L., Lermusiaux P. F. J.* Game Theory for Unmanned Vehicle Path Planning in the Marine Domain: State of the Art and New Possibilities // *Journal of Marine Science and Engineering*. — 2021. — Oct. — Vol. 9, no. 11. — P. 1175. — DOI: [10.3390/jmse9111175](https://doi.org/10.3390/jmse9111175).
89. An Autonomous Path Controller in a System on Chip for Shrimp Robot / S. Barrios [et al.] // *Electronics*. — 2020. — Mar. — Vol. 9, no. 3. — P. 441. — DOI: [10.3390/electronics9030441](https://doi.org/10.3390/electronics9030441).
90. *Wang Z.-j.* Maximizing the probability an aerial anti-submarine torpedo detects its target // *Journal of Marine Science and Application*. — 2009. — June. — Vol. 8, no. 2. — P. 175–181. — DOI: [10.1007/s11804-009-8083-3](https://doi.org/10.1007/s11804-009-8083-3).
91. Models of sensor operations for border surveillance / R. Szechtman [et al.] // *Naval Research Logistics*. — 2008. — Feb. — Vol. 55, no. 1. — P. 27–41. — DOI: [10.1002/nav.20263](https://doi.org/10.1002/nav.20263).
92. On the optimal detection of an underwater intruder in a channel using unmanned underwater vehicles: Optimal Detection of an Underwater Intruder / H. Chung [et al.] // *Naval Research Logistics (NRL)*. — 2011. — Dec. — Vol. 58, no. 8. — P. 804–820. — DOI: [10.1002/nav.20487](https://doi.org/10.1002/nav.20487).
93. *Vian J. L., Moore J. R.* Trajectory optimization with risk minimization for military aircraft // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. — 1989. — May. — Vol. 12, no. 3. — P. 311–317. — DOI: [10.2514/3.20410](https://doi.org/10.2514/3.20410).
94. A reinforcement learning approach to tackle illegal, unreported and unregulated fishing / T. Akinbulire [et al.] // *2017 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI)*. — 2017. — P. 1–8. — DOI: [10.1109/SSCI.2017.8285315](https://doi.org/10.1109/SSCI.2017.8285315).

95. *Jouffe L.* Fuzzy inference system learning by reinforcement methods // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews). — 1998. — Vol. 28, no. 3. — P. 338–355. — DOI: [10.1109/5326.704563](https://doi.org/10.1109/5326.704563).
96. *Schwartz H. M.* Multi-agent machine learning: a reinforcement approach. — Hoboken, NJ : John Wiley Sons, 2014. — ISBN 9781118884485.
97. *Dijkstra E. W.* A note on two problems in connexion with graphs // Numerische Mathematik. — 1959. — Dec. — Vol. 1, no. 1. — P. 269–271. — DOI: [10.1007/BF01386390](https://doi.org/10.1007/BF01386390).
98. *Gbadamosi O. A., Aremu D. R.* Design of a Modified Dijkstras Algorithm for finding alternate routes for shortest-path problems with huge costs. // 2020 International Conference in Mathematics, Computer Engineering and Computer Science (ICMCECS). — 2020. — P. 1–6. — DOI: [10.1109/ICMCECS47690.2020.240873](https://doi.org/10.1109/ICMCECS47690.2020.240873).
99. *Qing G., Zheng Z., Yue X.* Path-planning of automated guided vehicle based on improved Dijkstra algorithm // 2017 29th Chinese Control And Decision Conference (CCDC). — 2017. — P. 7138–7143. — DOI: [10.1109/CCDC.2017.7978471](https://doi.org/10.1109/CCDC.2017.7978471).
100. *Ferguson D., Likhachev M., Stentz A.* A Guide to Heuristicbased Path Planning // Proceedings of the Workshop on Planning under Uncertainty for Autonomous Systems at The International Conference on Automated Planning and Scheduling (ICAPS). — 2005.
101. *Gass S. I., Harris C. M.* Near-optimal solutionNear-optimal solution // Encyclopedia of Operations Research and Management Science / под ред. S. I. Gass, C. M. Harris. — New York, NY : Springer US, 2001. — с. 555–555. — ISBN 978-1-4020-0611-1. — DOI: [10.1007/1-4020-0611-X_660](https://doi.org/10.1007/1-4020-0611-X_660).
102. *Stentz A.* Optimal and efficient path planning for partially-known environments // Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation. — San Diego, CA, USA : IEEE Comput. Soc. Press, 1994. — P. 3310–3317. — ISBN 9780818653308. — DOI: [10.1109/ROBOT.1994.351061](https://doi.org/10.1109/ROBOT.1994.351061).

103. *Stentz A.* (The D* Algorithm for Real-Time Planning of Optimal Traverses :
тех. отч. / Carnegie Mellon University. — Pittsburgh, PA, 10.1994. —
CMU-RI-TR-94—37.
104. *LaValle S. M.* Rapidly-Exploring Random Trees: A New Tool for Path
Planning : тех. отч. — 1998.
105. *LaValle S. M.* Planning Algorithms. — Cambridge, U.K. : Cambridge
University Press, 2006. — Available at <http://planning.cs.uiuc.edu/>.
106. *Elshamli A., Abdullah H. A., Areibi S.* Genetic algorithm for dynamic path
planning // Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering
2004 (IEEE Cat. No.04CH37513). Vol. 2. — 2004. — 677–680 Vol.2. —
DOI: [10.1109/CCECE.2004.1345203](https://doi.org/10.1109/CCECE.2004.1345203).
107. *Samadi M., Othman M. F.* Global Path Planning for Autonomous Mobile
Robot Using Genetic Algorithm // 2013 International Conference on Signal-
Image Technology Internet-Based Systems. — 2013. — P. 726–730. —
DOI: [10.1109/SITIS.2013.118](https://doi.org/10.1109/SITIS.2013.118).
108. *Dorigo M., Maniezzo V., Colorni A.* Ant system: optimization by a colony
of cooperating agents // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cyber-
netics, Part B (Cybernetics). — 1996. — Vol. 26, no. 1. — P. 29–41. —
DOI: [10.1109/3477.484436](https://doi.org/10.1109/3477.484436).
109. *Galyaev A. A., Lysenko P. V.* Path planning of a controlled object in a
problem of increasing the stealth with constraints on length and curvature
of trajectory // Материалы Международной конференции «ОПТИМАЛЬ-
НОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ», посвященной
110-летию со дня рождения Льва Семеновича Понтрягина. — Москва : М.:
Математический институт имени В.А. Стеклова Российской академии на-
ук, 2018. — с. 99–102.
110. *Lehmann E. L., Romano J. P.* Testing statistical hypotheses. — 3rd ed. — New
York : Springer, 2005. — (Springer texts in statistics). — ISBN 9780387988641.
111. *Monzingo R., Haupt R., Miller T.* Introduction to adaptive arrays, 2nd
edition. — 01/2011. — P. 1–542. — ISBN 9781891121579. — DOI:
[10.1049/SBEW046E](https://doi.org/10.1049/SBEW046E).

112. *Гурсанов И. В.* Лекции по математической теории экстремальных задач. — Москва : Издательство МГУ, 1970. — с. 122.
113. *Galyaev A. A., Lysenko P. V., Yakhno V. P.* 2D Optimal Trajectory Planning Problem in Threat Environment for UUV with Non-Uniform Radiation Pattern // *Sensors*. — 2021. — Jan. — Vol. 21, no. 2. — P. 396. — DOI: [10.3390/s21020396](https://doi.org/10.3390/s21020396).
114. *Galyaev A. A., Lysenko P. V., Yakhno V. P.* Algorithm for Optimal Two-Link Trajectory Planning in Evasion from Detection Problem of Mobile Vehicle with Non-Uniform Radiation Pattern // *Advances in Systems Science and Applications*. — 2021. — Vol. 2 2021. — Pages 7182. — DOI: [10.25728/ASSA.2021.21.2.1061](https://doi.org/10.25728/ASSA.2021.21.2.1061).
115. *Galyaev A. A., Lysenko P. V., Iakhno V. P.* Trajectory Optimality Conditions for Moving Object with Nonuniform Radiation Pattern // *Doklady Mathematics*. — 2020. — July. — Vol. 102, no. 1. — P. 342–345. — DOI: [10.1134/S1064562420040067](https://doi.org/10.1134/S1064562420040067).
116. *Галяев А. А., Лысенко П. В., Яхно В. П.* Условия оптимальности траекторий подвижного объекта, обладающего неоднородной индикатрисой излучения // *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*. — 2020. — т. 493, № 1. — с. 95–98. — DOI: [10.31857/S2686954320040062](https://doi.org/10.31857/S2686954320040062).

Список рисунков

1.1	Модификации модели Дубинса	15
1.2	Решение задач 1.1 и 1.2	22
1.3	Ребра графа, построенного на сетке, исходящие из каждого узла.	24
2.1	Зависимость $G(\alpha)$	44
2.2	Траектории движения УПО	56
2.3	Оптимальные значения проекций скорости УПО	56
2.4	Траектории движения УПО	57
2.5	Оптимальные значения проекций скорости УПО	58
2.6	Пример оптимальной траектории, содержащей дугу с особым режимом управления	68
2.7	Траектория подвижного объекта для $L = 3.5$	69
3.1	УПО в декартовой системе координат с обнаружителем S	71
3.2	Прямоугольный треугольник векторов скоростей \vec{v} , \vec{v}_r и \vec{v}_φ	72
3.3	Пример индикатрисы излучения объекта	73
3.4	Подвижный объект в системе координат (ρ, φ)	89
3.5	Индикатриса излучения как зависимость $g(\beta)$ в полярных координатах (а) и на декартовой плоскости (b).	100
3.6	Зависимость гессиана $\det H$ от β	100
3.7	Оптимальная траектория в пространстве $(\rho - \rho_0, \varphi - \varphi_0, R - R_0)$ (а) и ее проекция на плоскость $(\rho - \rho_0, \varphi - \varphi_0)$ (b).	101
3.8	Оптимальная траектория на декартовой плоскости.	101
3.9	Индикатриса излучения как зависимость $g(\beta)$ в полярных координатах (а) и на декартовой плоскости (b).	102
3.10	Зависимость гессиана $\det H$ от β	103
3.11	Оптимальная траектория в пространстве $(\rho - \rho_0, \varphi - \varphi_0, R - R_0)$ (а) и ее проекция на плоскость $(\rho - \rho_0, \varphi - \varphi_0)$ (b).	103
3.12	Оптимальная траектория на декартовой плоскости.	103
3.13	Индикатриса излучения как зависимость $g(\beta)$ в полярных координатах (а) и на декартовой плоскости (b).	104
3.14	Зависимость гессиана $\det H$ от β	105

3.15	Оптимальная траектория в пространстве $(\rho - \rho_0, \varphi - \varphi_0, R - R_0)$ (a) и ее проекция на плоскость $(\rho - \rho_0, \varphi - \varphi_0)$ (b).	105
3.16	Оптимальная траектория на декартовой плоскости.	106
3.17	Индикатриса излучения как зависимость $g(\beta)$ в полярных координатах (a) и на декартовой плоскости (b).	106
3.18	Зависимость гессиана $\det H$ от β	107
3.19	Оптимальная траектория в пространстве $(\rho - \rho_0, \varphi - \varphi_0, R - R_0)$ (a) и ее проекция на плоскость $(\rho - \rho_0, \varphi - \varphi_0)$ (b).	107
3.20	Оптимальная траектория на декартовой плоскости.	108
3.21	Некоторые оптимальные двузвенные траектории для разных β_0 . . .	109
3.22	Оптимальные траектории для разных β_0 на плоскости (ρ, ϕ)	109
3.23	Оптимальные траектории для разных β_0 на плоскости (x, y)	110
3.24	Оптимальные траектории для разных β_0 на плоскости (ρ, ϕ)	110
3.25	Оптимальные траектории для разных β_0 на плоскости (x, y)	111

Приложение А

Акт о внедрении



УТВЕРЖДАЮ

Генеральный директор АО "Морские неакустические комплексы и системы"

А. В. Гусев

Юридический адрес: ул. Госпитальная, д.3, С-Петербург, 194014
 Почтовый адрес: Октябрьская наб., д.6, С-Петербург, 193091
 Т. (812) 676-33-99 ф. (812) 676-32-52



02 20 22 г.

о внедрении материалов кандидатской диссертационной работы Лысенко Павла Владимировича в АО "Морские неакустические комплексы и системы"

Мы, нижеподписавшиеся, комиссия в составе председателя комиссии – начальник ЦРПО, главный конструктор ОКР "Странник" А. Н. Григорьев, членов комиссии – заместителя директора научно-производственного направления по ПМО А. В. Гапона, заместителя начальника НИЦ Е. А. Завьялова, составили настоящий акт о том, что материалы диссертационной работы сотрудника Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук (ИПУ РАН) Лысенко Павла Владимировича на тему "Траекторная оптимизация риска обнаружения подвижных объектов в задаче уклонения", представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.01 – "Системный анализ, управление и обработка информации", применены в системе СИП ПС, разработанной в опытно-конструкторской работе, шифр "Странник", выполненной в обеспечение государственного оборонного заказа в 2017-2019 гг.

Материалы диссертационной работы реализованы в комплексе программ системы СИП ПС 589.6378.00947-01, а именно – во входящем в его состав программном изделии "Комплекс программ СИП ПС РТ" 460.00229530.04008-01, разработанном ИПУ РАН при выполнении составной части опытно-конструкторской работы, шифр "Странник-РТ".

Использование материалов диссертационной работы позволило обеспечить выполнение требований к системе СИП ПС в части выработки рекомендаций по выбору траектории и параметров движения подвижного объекта, обеспечивающих минимальные вероятности его обнаружения по совокупности физических полей.

Председатель комиссии
 Начальник ЦРПО,
 главный конструктор ОКР "Странник"

А. Н. Григорьев

Члены комиссии
 Заместитель директора научно-
 производственного направления по ПМО

А. В. Гапон

Заместитель начальника НИЦ

Е. А. Завьялов

