




Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ  
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ  
ИМЕНИ В. А. ТРАПЕЗНИКОВА  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
(ИПУ РАН)

УТВЕРЖДАЮ  
Директор ИПУ РАН, академик РАН

  
Д.А. Новиков  
«27» апреля 2023 г.

**ПРОГРАММА-МИНИМУМ**  
кандидатского экзамена по специальности  
**1.2.2 «Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ»**  
по техническим наукам

Москва 2023

Программа-минимум кандидатского экзамена по специальности 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» составлена на основании Паспорта научной специальности 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» номенклатуры научных специальностей, по которым присуждаются ученые степени, утвержденной приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 24 февраля 2021 г №118.

Программа-минимум кандидатского экзамена разработана рабочей группой в составе:

д-р техн. наук, чл.-корр. РАН Галяев А.А.,  
канд. физ.-мат. наук Искаков А.Б.,  
д-р физ.-мат. наук Лычагин В.В.

Руководитель  
рабочей группы  
д-р техн. наук



Л.Ю. Филимонюк

---

(подпись)

Программа-минимум кандидатского экзамена обсуждена и утверждена на заседании Ученого совета ИПУ РАН протокол № 5 от 27 апреля 2023 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
СТРУКТУРА ПРОГРАММЫ.....	6
ТЕМАТИЧЕСКИЕ РАЗДЕЛЫ.....	8
1. Математическое моделирование.....	8
2. Численные методы.....	13
3. Комплексы программ.....	16
4. Математические основы.....	18
5. Статистические модели и методы обработки результатов экспериментов.....	25
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	29

## ВВЕДЕНИЕ

Программа-минимум кандидатского экзамена разработана в соответствии с Паспортом научной специальности 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Наименование отрасли науки, по которой присуждаются ученые степени: технические.

Область науки: 1. Естественные науки.

Группа научных специальностей: 1.2. Компьютерные науки и информатика.

Освоение программы направлено на формирование необходимого набора знаний, умений и навыков у соискателей степени кандидата наук, выполняющих исследования по указанным ниже направлениям<sup>1</sup>.

1. Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений (физико-математические науки).

2. Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.

3. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

4. Разработка новых математических методов и алгоритмов интерпретации натурного эксперимента на основе его математической модели.

5. Разработка новых математических методов и алгоритмов валидации математических моделей объектов на основе данных натурного эксперимента или на основе анализа математических моделей.

6. Разработка систем компьютерного и имитационного моделирования, алгоритмов и методов имитационного моделирования на основе анализа математических моделей (технические науки).

---

<sup>1</sup> Заимствовано из паспорта научной специальности 1.2.2

7. Качественные или аналитические методы исследования математических моделей (технические науки).

8. Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

9. Постановка и проведение численных экспериментов, статистический анализ их результатов, в том числе с применением современных компьютерных технологий (технические науки).

В основу настоящей программы положены следующие дисциплины:

- вычислительные эксперименты и компьютерные технологии,
- дифференциальные уравнения,
- информатика,
- исследование операций,
- математический анализ,
- математическое моделирование,
- математическое программирование,
- математическая статистика,
- математическая физика,
- прикладная математика,
- теория принятия решений,
- функциональный анализ,
- численные методы и алгоритмы.

## СТРУКТУРА ПРОГРАММЫ

Раздел	Темы	Литература
1. Математическое моделирование	Тема 1.1. Базовые понятия модели и моделирования	[6, 10, 17, 21]
	Тема 1.2. Математические модели нелинейной динамики	[11, 12, 14, 18]
	Тема 1.3. Моделирование случайных процессов	[3, 14, 15]
	Тема 1.4. Нечеткие модели и моделирование	[14]
	Тема 1.5. Моделирование на основе неполных математических моделей	[11]
	Тема 1.6. Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем	[14, 20]
2. Численные методы	Тема 2.1. Численное дифференцирование и интегрирование	[1]
	Тема 2.2. Численное решение систем линейных и нелинейных уравнений	[1]
	Тема 2.3. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений	[1]
	Тема 2.4. Метрические пространства	[7]

Раздел	Темы	Литература
3. Комплексы программ	Тема 3.1. Методы и этапы проведения вычислительных экспериментов	[9]
	Тема 3.2. Языки программирования и моделирования. Комплексы проблемно-ориентированных программ	[5, 11]
	Тема 3.3. Тестирование, отладка, валидация и верификация математических моделей и программного обеспечения	[8]
4. Математические основы	Тема 4.1. Аппроксимация функций	[1, 13]
	Тема 4.2. Линейные функционалы и операторы в нормированных пространствах	[7]
	Тема 4.3. Гильбертовы пространства	[7]
	Тема 4.4. Математическое программирование	[2]
	Тема 4.5. Исследование операций	[3, 16, 19]
5. Статистические методы обработки результатов экспериментов	Тема 5.1. Основные понятия выборочной теории. Точечные и интервальные оценки.	[4]
	Тема 5.2. Проверка параметрических и непараметрических гипотез.	[4]
	Тема 5.3. Корреляционный, регрессионный и дисперсионный анализ.	[4]
	Тема 5.4. Непараметрические методы статистики.	[4]

## ТЕМАТИЧЕСКИЕ РАЗДЕЛЫ

### 1. Математическое моделирование

#### ТЕМА 1.1. Базовые понятия модели и моделирования.

Принципы системного подхода к построению моделей и моделированию. Требования, предъявляемые к математическим моделям. Обобщенная математическая модель. Классификация математических моделей. Этапы построения математической модели. Подходы к построению математических моделей. Устойчивость математических моделей, проверка их адекватности. Модели и методы имитационного моделирования. Построение математических моделей на основе фундаментальных законов природы. Особенности математических моделей в механике, экономике, управлении [6, с. 7–45, с. 52–81; 10, с. 270–299].

#### Контрольные вопросы к теме 1.1

1. Перечислите и поясните принципы системного подхода к построению моделей и моделированию.
2. Перечислите и поясните основные требования, предъявляемые к математическим моделям.
3. Назовите и конкретизируйте элементы обобщенной математической модели.
4. Перечислите основные виды классификаций математических моделей. Приведите классификацию математических моделей в зависимости от оператора модели.
5. Приведите классификацию математических моделей в зависимости от типа входных и выходных данных.
6. Перечислите и поясните основные этапы построения модели. Объясните, каким образом оценивается адекватность модели.
7. Перечислите и поясните основные подходы к построению модели. Опишите вариационные принципы построения математических моделей.



8. Объясните, в каких случаях использую имитационные модели. Назовите и поясните основные методы имитационного моделирования.

9. Укажите особенности математических моделей, используемых в механике, экономике, управлении. Приведите примеры элементарных моделей.

**ТЕМА 1.2. Математические модели нелинейной динамики.** Простое и сложное поведение динамических систем. Понятие об аттракторах. Типы аттракторов [14, с. 13–23]. Модели динамических систем. Особые точки. Бифуркации. Элементы теории катастроф [11, с. 5–17; 12, с. 7-45; 14, с. 41–60]. Динамический хаос. Эргодичность и перемешивание [11, с. 18–23; 14, с. 90–126]. Динамические фракталы [14, с. 127–142]. Понятие о самоорганизации. Диссипативные структуры. Режимы с обострением. Обучающиеся системы. [14, с. 154–223].

### **Контрольные вопросы к теме 1.2**

1. Опишите особенности консервативных и диссипативных систем. Раскройте понятие странного аттрактора.

2. Дайте классификацию особых точек динамических систем. Приведите типичные бифуркации нелинейных динамических систем.

3. Сформулируйте классификацию катастроф. Приведите канонические виды эволюционных уравнений: в неособой и морсовской точках; в особой точке катастрофы.

4. Опишите хаотические колебания; аттрактор Лоренца и характерные признаки хаоса.

5. Укажите особенности эргодических и перемешивающих систем. Приведите фрактальные свойства странного аттрактора.

6. Дайте определение самоподобным объектам. Раскройте понятие фрактала как модели физической системы.

7. Сформулируйте определение и свойства таких понятий как динамический хаос, эргодичность и перемешивание.

8. Раскройте понятие о самоорганизации. Укажите способы описания диссипативных структур. Перечислите основные режимы с обострением.

**Тема 1.3. Моделирование случайных процессов.** Методы статистического моделирования случайных процессов. Метод Монте–Карло [3, с. 161–172; 6, с. 55–63]. Роль флуктуации [14, с. 224–225]. Марковские случайные процессы [3, с. 112–131; 14, с. 225–227]. Уравнение Смолуховского [14, с. 227–228]. Уравнение для плотности вероятности [14, с. 228–230]. Физические системы с шумами. Уравнение Ланжевена. Движение в потенциальном поле. Барометрическая формула. [14, с. 228–232]. Нестационарные решения уравнения Фокера–Планка. Теория второго порядка. Сходимость в среднем квадратичном. Корреляционная функция случайного процесса. Непрерывность в среднем квадратичном. Дифференцируемость и интегрируемость в среднем квадратичном. [14, с. 233–237].

### **Контрольные вопросы к теме 1.3**

1. Сформулируйте определение и перечислите свойства случайных процессов. Дайте определение марковских случайных процессов и опишите их особенности.
2. Поясните суть метода статистических испытаний Монте–Карло. Перечислите его основные достоинства и недостатки.
3. Перечислите физические системы с шумами. Опишите движение в потенциальном поле. Приведите уравнение Ланжевена и барометрическую формулу.
4. Дайте определение сходимости в среднем квадратичном. Приведите уравнения Фокера–Планка и их нестационарные решения.
5. Дайте определение корреляционной функции случайного процесса и приведите примеры ее применения.
6. Дайте определение непрерывности в среднем квадратичном. Опишите особенности дифференцируемости и интегрируемости в среднем квадратичном.

**Тема 1.4. Нечеткие модели и моделирование.** Возможность и вероятность. Математические основы теории возможностей. Нечеткие множества и события. Алгебра нечетких множеств [14, с. 260–264]. Мера возможности и мера необходимо-

сти. Принцип относительности в теории возможностей. Условная мера возможности [14, с. 265–269]. Нечеткие элементы. Нечеткое моделирование. Гауссовы нечеткие элементы [14, с. 270–274]. Маргинальное распределение. Условное распределение, аппроксимация и собственный базис нечеткого гауссова элемента [14, с. 274–279]. Нечеткие динамика и процессы. Марковские нечеткие процессы. Уравнение Смолуховского для нечетких процессов. Однородные нечеткие процессы с независимыми приращениями. Процессы с дискретным временем и конечным числом состояний. Нечеткие процессы и наблюдения. Распространение возможностей [14, с. 280–291].

#### **Контрольные вопросы к теме 1.4**

1. Приведите определения и основные отличия возможности и вероятности. Перечислите основные постулаты теории возможностей.

2. Дайте определения нечеткого множества и события. Приведите алгебру нечетких множеств.

3. Сформулируйте понятия меры возможности и меры необходимости, а также принцип относительности в теории возможностей. Определите условную меру возможности.

4. Дайте определение нечетких элементов и укажите основные особенности нечеткого моделирования. Сформулируйте определение гауссова нечеткого элемента.

5. Определите маргинальное распределение и условное распределение нечеткого гауссова элемента. Опишите методы аппроксимации нечетких гауссовых элементов.

6. Сформулируйте понятие нечеткой динамики, перечислите основные особенности нечетких процессов, в том числе марковских. Приведите уравнение Смолуховского для нечетких процессов.

7. Опишите нечеткие процессы и наблюдения с дискретным временем и конечным числом состояний. Поясните принцип распространения возможностей.

**ТЕМА 1.5. Моделирование на основе неполных математических моделей.** Сравнение полных и неполных математиче-

ских моделей. Интерактивный процесс решения задач для неполных математических моделей [11, с. 185–194]. Линейные неполные модели: структура, ограничения и связи. Анализ решений неполных моделей. Управление процессом решения задач с помощью неполных моделей. Табличный способ решения задач неполного моделирования [11, с. 195–228].

### **Контрольные вопросы к теме 1.5**

1. Укажите группы факторов, существенно влияющие на функционирование моделируемого объекта. Сравните схемы решения задач с помощью полных и неполных математических моделей. Укажите их преимущества и недостатки.

2. Приведите и поясните процедуру сужения множества условно допустимых состояний неполной модели, а также общую схему решения задач для неполных математических моделей.

3. Опишите структуру линейной неполной модели, ее связи, обязательные и целевые ограничения. Укажите, как определяется расстояние между множествами допустимых и целевых состояний.

4. Приведите процедуру анализа решений неполных моделей, принципы формализации нарушений и группировки целей.

5. Опишите средства управления процессом решения задач для неполных моделей. Укажите методы сравнения абсолютной и относительной метрик, принципы ранжирования целей.

6. Опишите процесс решения задач неполного моделирования с помощью специализированных электронных таблиц.

**ТЕМА 1.6. Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем.** Измерение и прогнозирование на основе измерительно-вычислительных систем. Схемы реального и идеального измерений. Интерпретация измерений. Методы синтеза измерительно-вычислительных систем как идеальных приборов. Надежность модели измерений и интерпретации [14, с. 237–259].

### **Контрольные вопросы к теме 1.6**

1. Приведите схемы реального и идеального измерений. Поясните принципы интерпретации измерений с помощью линейных измерительно-вычислительных систем.

2. Опишите процесс наблюдения с помощью датчика второго порядка. Формализуйте математическую модель динамической системы с учетом динамики измерительного прибора.

3. Приведите математические модели схемы измерений. Формализуйте процедуру синтеза идеального прибора с ограничением на энергию шума на выходе.

4. Укажите методы определения и вычисления надежности модели измерений.

5. Приведите схему анализа возможности использования приближенной модели для интерпретации измерений с заданной точностью.

## 2. Численные методы

**ТЕМА 2.1. Численное дифференцирование и интегрирование.** Методы численного дифференцирования и их погрешности [1, с. 76–83]. Численное интегрирование. Квадратурные формулы Ньютона–Кортеса и Гаусса, их погрешности [1, с. 86–116]. Интегрирование быстро осциллирующих функций [1, с. 116–124].

### Контрольные вопросы к теме 2.1

1. Приведите приближенную формулу для вычисления производной. Приведите приближенную формулу для вычисления 3-й производной при условии, что узлы сетки находятся на равном расстоянии.

2. Опишите метод построения рациональной аппроксимации, приведите примеры.

3. Приведите основные методы численного интегрирования. Укажите их достоинства и недостатки. Дайте оценку точности вычисления интегралов по формуле трапеций.

4. Приведите и поясните квадратурную формулу Симпсона и укажите оценку ее точности.

5. Приведите и поясните квадратурные формулы Ньютона–Кортеса и Гаусса, укажите их погрешности.

6. Приведите формулу Филона для вычисления интегралов от быстро осциллирующих функций и оценку ее точности.

**ТЕМА 2.2. Численное решение систем линейных и нелинейных уравнений.** Нормы векторов и согласованные нормы матриц [1, с. 304–310]. 2. Оценки спектра и норм симметрических матриц [1, с. 310–315]. Метод исключения Гаусса и метод отражений [1, с. 262–265]. Методы Зейделя и наискорейшего спуска [1, с. 285–294]. Метод простой итерации [1, с. 326–330]. Метод Ньютона [1, с. 330–341]. Методы сведения многомерных задач к задачам меньшей размерности [1, с. 341–345]. Решение стационарных задач путем установления [1, с. 345–352].

### Контрольные вопросы к теме 2.2

1. Дайте определение нормы оператора. Найдите норму оператора вращения плоскости на угол 60 градусов.

2. Опишите метод исключения Гаусса для решения систем линейных уравнений. Укажите, какое количество арифметических операций требует прямой ход данного метода.

3. Опишите метод Гаусса с выбором главного элемента.

4. Дайте определение минимального собственного числа матрицы. Формализуйте минимальное собственное число положительной и симметрической матрицы.

5. Приведите оценку точности метода скорейшего спуска для решения симметрической системы линейных уравнений.

6. Приведите оценку сходимости итерационного метода Ньютона.

7. Перечислите методы численного решения систем нелинейных уравнений и предложите метод нахождения численного решения уравнения  $\sin(x)=0.01x+0.3$ .

**ТЕМА 2.3. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.** Конечно-разностные методы. Оценка погрешности конечно-разностных методов [1, с. 376–379]. Методы Рунге–Кутты и оценка их погрешности [1, с. 363–369]. Методы численного решения краевых задач для уравнений вто-

рого порядка [1, с. 455–461]. Численные методы, основанные на вариационных принципах. Метод Рунге [1, с. 476–485].

### **Контрольные вопросы к теме 2.3**

1. Оцените погрешность численного решения обыкновенного уравнения первого порядка методом Эйлера.
2. Приведите методы численного интегрирования задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и оцените их погрешность.
3. Приведите методы численного интегрирования краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и оцените их погрешность.
4. Дайте определение метода Рунге и примените его к численному решению уравнения колебаний маятника. Оцените погрешность полученного решения.

**ТЕМА 2.4. Метрические пространства.** Сходимость в метрических пространствах. Предельные точки. Открытые и замкнутые множества. Полные метрические пространства [7, с. 48–74]. Топология и непрерывные отображения метрических пространств. Изометрии и сжимающие отображения [7, с. 83–97]. Принцип сжимающих отображений, его применение к дифференциальным и интегральным уравнениям [7, с. 74–83]. Компактные метрические пространства. Ограниченность непрерывных функций. Теоремы Арцела и Пеано [7, с. 106–115].

### **Контрольные вопросы к теме 2.4**

1. Дайте определение и перечислите свойства открытых и замкнутых множеств. Определите множество непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций  $f(x)$ , таких что  $0 \leq f(x) < 1$ . Укажите, является ли оно открытым или замкнутым.
2. Докажите, что в любом метрическом пространстве справедливо неравенство четырехугольника: разность двух сторон четырехугольника не превосходит суммы двух других сторон.

3. Сформулируйте определение метрики функции. Приведите 3 примера различных метрик на непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций.
4. Приведите доказательство неравенства Гельдера.
5. Определите, является ли  $n$ -мерное евклидово пространство сепарабельным метрическим пространством.

### **3. Комплексы программ**

**ТЕМА 3.1. Методы и этапы проведения вычислительных экспериментов.** Технологический цикл вычислительного эксперимента [6, с. 45–52]. Триада «Модель – алгоритм – программа». Иерархия упрощенных моделей. [9, с. 13–24]. Вычислительный эксперимент для случая линейных математических моделей. Уравнение Шредингера. [9, с. 27–45]. Вычислительный эксперимент с простейшими системами с дискретным временем. Сценарий Фейгенбаума. Элементы теории универсальности. Переход к хаосу. Шумящие циклы, окна периодичности, перемежаемость. [9, с. 175–191]. Топологические методы в исследовании нелинейных систем. Вычислительный эксперимент, молекулярный дизайн и топологические методы. [9, с. 245–267].

#### **Контрольные вопросы к теме 3.1**

1. Дайте определение вычислительного эксперимента. Приведите и поясните схему технологического цикла вычислительного эксперимента.
2. Приведите иерархию моделей, а также особенности и структуру триады «Модель – алгоритм – программа».
3. Перечислите основные особенности вычислительного эксперимента для линейных моделей, приведите примеры.
4. Приведите и поясните уравнение Шредингера. Опишите его программные реализации.
5. Приведите особенности проведения вычислительного эксперимента с простейшими системами с дискретным временем. Опишите сценарий Фейгенбаума и переход к хаосу.
6. Укажите особенности методов исследования нелинейных систем. Опишите вычислительный эксперимент, молеку-



лярный дизайн и топологические методы, а также особенности их программных реализаций.

**ТЕМА 3.2. Языки программирования и моделирования. Комплексы проблемно-ориентированных программ.** Языки программирования для описания данных и операций для неполных моделей [11, с. 257–289]. Языки моделирования. Интерфейсная оболочка. Параметрический анализ моделей [11, с. 249–257]. Язык моделирования AnyLogic. Агентное моделирование [5, с. 18–40]. Языки и проблемно-ориентированные комплексы моделирования системной динамики [5 с. 101–116]. Дискретно-событийное моделирование [5, с. 139–160].

### **Контрольные вопросы к теме 3.2**

1. Перечислите основные языки программирования и моделирования, пакеты прикладных программ, их возможности и особенности. Укажите основные преимущества комплексов проблемно-ориентированных программ.
2. Укажите основные особенности языков программирования и моделирования для неполных моделей.
3. Перечислите примеры и особенности моделирования системной динамики с помощью современных языков моделирования.
4. Приведите определения и примеры дискретно-событийного моделирования и этапы создания данных моделей.

**ТЕМА 3.3. Тестирование, отладка, валидация и верификация математических моделей и программного обеспечения.** Понятие верификации и валидации. Технологии отладки. Подходы к тестированию: черный ящик, белый ящик. Организация отладки, тестирования и верификации ПО [8, с. 203–231]. Модульное тестирование. Тестирование потоков управления и потоков данных программных модулей [8, с. 232–256]. Стратегии тестирования сложных программных комплексов [8, с. 257–284]. Обработка результатов тестирования [8, с. 285–303]. Тестирование надежности и безопасности функционирования программного обеспечения [8, с. 303–310]. Тестирование

производительности и использование ресурсов компьютера программными продуктами [8, с. 310–313].

### **Контрольные вопросы по теме 3.3**

1. Перечислите основные отличия тестирования и отладки. Укажите признаки классификации тестирования по времени тестирования.

2. Определите признаки классификации тестирования по степени изолируемости тестируемых компонент.

3. Опишите процесс тестирования потоков управления и потоков данных программных модулей.

4. Сформулируйте определения и характеристики тестирования черного, белого и серого ящика. Приведите примеры.

5. Перечислите основные стратегии и критерии тестирования.

6. Опишите основные методы обработки результатов тестирования.

7. Определите основные отличия между функциональным и нагрузочным тестированием.

8. Дайте определения и перечислите цели верификации и валидации в тестировании программного обеспечения. Опишите этапы процессов верификации и валидации программного обеспечения.

## **4. Математические основы**

**ТЕМА 4.1. Аппроксимация функций.** Способы приближения функций: интерполяция, равномерные и среднеквадратичные приближения. Разностные уравнения [1, с. 35–39]. Интерполяционные полиномы Лагранжа, Ньютона и Эрмита и Чебышева [1, с. 40–62]. Ортогональные системы функций. Ряды Фурье. Классические ортогональные полиномы Якоби, Лежандра, Эрмита [1, с. 164–178; 13, с. 52–90]. Сплайн-

интерполяция. Экстремальные свойства сплайнов, построение кубического интерполяционного сплайна. Вейвлет-анализ. Интерполяционные сплайн-вейвлеты [1, с. 191–201; 13, с. 19–51, с. 91–190, с. 277–330].

### Контрольные вопросы к теме 4.1

1. Сформулируйте задачу приближения функций и приведите основные способы приближений. Проведите сравнительный анализ равномерных и среднеквадратичных приближений и их точности.

2. Запишите и поясните интерполяционные полиномы в форме Лагранжа и Чебышева. Укажите трудоемкости этих формул и погрешности интерполирования.

3. Запишите интерполяционные полиномы в форме Ньютона первой, второй и  $n$ -й степени. Укажите вид базисных функций, по которым они раскладываются.

4. Сформулируйте задачу об оптимальном выборе узлов интерполяции. Укажите оптимальный выбор узлов интерполяции на отрезке  $[a, b]$ . Приведите оценку погрешности интерполяции при оптимальном выборе узлов.

5. Запишите и поясните интерполяционный полином Эрмита и формулу остаточного члена. Укажите связь между степенью интерполяционного полинома, числом узлов интерполяции и числом значений функции и производных при интерполировании с кратными узлами.

6. Дайте определение системы ортогональных полиномов, укажите, чем оно отличается от определения системы ортогональных функций. Дайте определения ортогональных полиномов Якоби, Лежандра, Эрмита, приведите для них формулу Рунге.

7. Сформулируйте задачу тригонометрической интерполяции. Постройте систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов тригонометрического интерполяционного полинома. Укажите связь между числом узлов интерполяции и размерностью этой системы.

8. Приведите формулы тригонометрического интерполяционного полинома для равноотстоящих узлов через функцию Дирихле и ряд Фурье. Укажите, какая из этих формул является более экономичной.

9. Поясните, какие функции принято называть сплайнами. Перечислите основные типы и свойства сплайнов.

10. Дайте определение лагранжевых сплайнов и оценку их погрешности. Дайте графическую иллюстрацию лагранжевых сплайнов первой и второй степени.

11. Укажите свойства матрицы системы алгебраических уравнений для определения параметров кубического сплайна. Сформулируйте теорему об оценке погрешности приближения функции кубическим сплайном. Укажите точность приближения функции естественным кубическим сплайном.

12. Сформулируйте основные определения и поясните суть вэйвлет-преобразования. Укажите его связь с преобразованием Фурье. Укажите особенности интерполяционных сплайн-вэйвлетов и погрешность сплайн-вэйвлет-разложения.

**ТЕМА 4.2. Линейные функционалы и операторы в нормированных пространствах.** Нормированные векторные пространства и их подпространства, фактор-пространства. Линейные функционалы. Выпуклые функционалы, теорема Хана–Банаха. Сопряженные пространства. Банаховы пространства [7, с. 119–174]. Обобщенные функции. Операции над обобщенными функциями. Дифференциальные уравнения в обобщенных функциях [7, с. 203–237]. Линейные операторы в нормированных пространствах. Непрерывность и ограниченность. Обратный оператор, теорема Банаха об обратном операторе. Спектр и резольвента оператора. Сопряженные операторы [7, с. 174–202].

#### **Контрольные вопросы к теме 4.2**

1. Дайте определение векторного пространства. Укажите особенности фактор-пространства.

2. Дайте определение и геометрический смысл линейного функционала. Приведите примеры линейных функционалов.

3. Дайте определения выпуклых множеств, тел и функционалов. Сформулируйте общую теорему Хана–Банаха и ее комплексный вариант. Приведите форму теоремы Хана–Банаха в нормированном пространстве, дайте геометрическую интерпретацию.

4. Дайте определение нормированного пространства, приведите примеры. Определите, являются ли нормированные векторные пространства метрическими.

5. Сформулируйте определение и укажите нормы на пространстве непрерывных на отрезке  $[0; 1]$  функций.

6. Опишите все подмножества нормированного пространства, которые являются одновременно замкнутыми и открытыми. Докажите, что любое непрерывное отображение отрезка  $[0, 1]$  на себя имеет неподвижную точку.

7. Дайте определение сопряженного пространства, приведите примеры. Докажите, что пространство, сопряженное к нормированному, полно.

8. Дайте определение обобщенной функции. Приведите примеры сингулярных обобщенных функций. Определите операцию дифференцирования для обобщенных функций.

9. Дайте определение линейного оператора. Приведите примеры линейных операторов и действий над ними. Сформулируйте теорему Банаха об обратном операторе.

10. Дайте определение и приведите основные свойства сопряженных операторов. Поясните понятия спектра оператора и резольвенты.

**ТЕМА 4.3. Гильбертовы пространства.** Гильбертово пространство. Гильбертовы пространства измеримых функций [7, с. 155–158]. Базисы и размерность гильбертова пространства. Ортогональные разложения. Теорема Рисса–Фишера [7, с. 152–155]. Сопряженные гильбертовы пространства. Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве [7, с. 182–203]. Линейные операторы в гильбертовых пространствах. Компактные операторы в гильбертовых пространствах [7, с. 218–237]. Самосопряженные компактные операторы и их спектр. Теорема Гильберта–

Шмидта [7, с. 237–251]. Операторные уравнения и теоремы Фредгольма. Линейные интегральные уравнения и операторы Фредгольма. Теоремы Фредгольма [7, с. 456–479].

### **Контрольные вопросы к теме 4.3**

1. Дайте определение гильбертова пространства. Сформулируйте теорему об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств. Приведите их комплексные аналоги.

2. Формализуйте структуру пространства, сопряженного к гильбертову. Докажите теорему об их изоморфизме. Укажите ее особенность для комплексного случая.

3. Сформулируйте и докажите теорему Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.

4. Дайте определение и приведите примеры компактных операторов. Перечислите их основные свойства.

5. Укажите особенности компактных и самосопряженных компактных операторов в гильбертовом пространстве. Приведите основные свойства собственных векторов и собственных значений самосопряженных операторов.

6. Сформулируйте и докажите теорему Гильберта–Шмидта (об ортогональном базисе, образуемом собственными векторами самосопряженного оператора).

7. Приведите и поясните интегральные уравнения Фредгольма первого и второго рода. Укажите их связь с уравнениями Вольтерра. Укажите, когда интегральное уравнение Фредгольма второго рода является уравнением с симметричным ядром.

8. Дайте определение интегрального оператора Фредгольма и укажите его связь с оператором Гильберта–Шмидта.

9. Сформулируйте и поясните теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с вырожденными и произвольными ядрами.

10. Перечислите и опишите методы решения интегральных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром.

**ТЕМА 4.4. Математическое программирование.** Методы экстремизации функции одной переменной [2, с. 9–67]. Метод стохастической аппроксимации. Конечномерные задачи на экстремум [2, с. 68–101]. Линейное программирование, симплекс-метод [2, с. 101–147]. Выпуклый анализ: виды выпуклых функций, метод множителей Лагранжа, теорема Куна–Таккера [2, с. 148–259]. Методы экстремизации функции многих перемен. Градиентные методы. Методы поиска экстремумов: линеаризации; Ньютона; штрафных, барьерных и нагруженных функций; случайного поиска [2, с. 260–420]. Принцип максимума Понтрягина [2, с. 412–489]. Динамическое программирование. Схема Беллмана [2, с. 490–530].

#### **Контрольные вопросы к теме 4.4**

1. Укажите основные признаки классификации методов математического программирования. Детализируйте классификацию в зависимости от типа целевой функции и задающих ограничений.
2. Сформулируйте постановку задачи экстремизации функции одной переменной. Перечислите основные методы численной экстремизации, укажите их достоинства и недостатки.
3. Опишите метод стохастической аппроксимации.
4. Сформулируйте и докажите теорему Вейерштрасса о сходимости минимизирующей последовательности.
5. Сформулируйте общую задачу линейного программирования, дайте геометрическую интерпретацию. Дайте определение угловых точек, поясните их фундаментальную роль в решении задач линейного программирования.
6. Формализуйте симплекс-метод для решения канонической задачи линейного программирования. Поясните принцип составления симплекс-таблицы.
7. Поясните и формализуйте виды выпуклых функций: выпуклых, сильно выпуклых, равномерно выпуклых.
8. Формализуйте метод множителей Лагранжа нахождения условных экстремумов.

9. Сформулируйте задачу выпуклого программирования и теорему Куна–Таккера. Укажите связь решения задачи выпуклого программирования с седловой точкой функции Лагранжа. Формализуйте двойственную задачу выпуклого программирования.

10. Опишите формализм градиентных методов экстремизации (градиента и условного градиента; проекции градиента и субградиента; возможных направлений). Укажите их преимущества и недостатки.

11. Формализуйте поиск экстремумов методами: линеаризации; Ньютона; штрафных, барьерных и нагруженных функций; случайного поиска. Укажите их преимущества и недостатки.

12. Сформулируйте общую постановку задачи оптимального управления и принцип максимума Понтрягина. Укажите методы решения краевой задачи.

13. Сформулируйте общую задачу динамического программирования. Опишите схему Беллмана. Укажите проблемы, которые возникают при ее применении к дискретным системам.

**Тема 4.5. Исследование операций.** Предмет и задачи исследования операций [3, с. 9–51]. Основные задачи теории массового обслуживания. Классификация систем массового обслуживания. Схема гибели и размножения, формулы Литтла [3, с. 132–160]. Игровые методы принятия решений. Антагонистические матричные игры [3, с. 173–195]. Статистические методы принятия решений. Критерии Байеса–Лапласа, Гермейера, Бернулли–Лапласа, максиминный Вальда, минимаксного риска Сэвиджа, Гурвица [3, с. 195–205].

#### **Контрольные вопросы к теме 4.5**

1. Раскройте предмет, перечислите и поясните задачи исследования операций.

2. Сформулируйте задачи теории массового обслуживания. Приведите и поясните классификацию систем массового обслуживания.



3. Приведите и поясните граф состояний для схемы гибели и размножения. Выведите формулу финальной вероятности состояний.

4. Приведите и поясните формулы Литтла о среднем времени пребывания заявки в системе и в очереди.

5. Перечислите предмет и задачи игровых методов принятия решений. Приведите классификацию матричных игр.

6. Перечислите и опишите методы решения конечных игр.

7. Перечислите задачи теории статистических решений и методы их решения.

8. Перечислите источники неопределенности при принятии решений и дайте классификацию задач принятия решений при неполной информации.

9. Приведите формулы основных критериев принятия решений (Байеса–Лапласа, Гермейера, Бернулли–Лапласа, максимальный Вальда, минимаксного риска Сэвиджа, Гурвица), опишите их преимущества и недостатки.

## **5. Статистические методы обработки результатов экспериментов**

**ТЕМА 5.1. Основные понятия выборочной теории. Точечные и интервальные оценки.** Генеральная и выборочная совокупности. Статистические модели. Интерпретация натурального эксперимента. Эмпирические данные. Выборочные характеристики [4, с. 18–50]. Оценки. Выборочные моменты. Точечные оценки. Функция правдоподобия. Интервальные оценки. Доверительные интервалы [4, с. 54–152].

### **Контрольные вопросы к теме 5.1**

1. Дайте определение генеральной совокупности и ее закона распределения. Дайте определение выборки, выборочного пространства и выборочного распределения.

2. Дайте определение статистической и параметрической моделей (непрерывной и дискретной). Приведите примеры, в том числе для интерпретации натурального эксперимента.

3. Сформулируйте задачу оценки неизвестных параметров. Дайте определение точечной и интервальной оценок.

4. Дайте определение эмпирической функции распределения и плотности распределения. Дайте определение основным выборочным характеристикам. Приведите примеры.

5. Дайте определение состоятельной, несмещенной, эффективной оценок. Докажите, что выборочное среднее является состоятельной, несмещенной и эффективной оценкой среди линейных оценок. Докажите, что выборочная дисперсия является смещенной состоятельной оценкой. Раскройте понятие исправленной выборочной дисперсии.

6. Дайте определение количества информации по Фишеру. Докажите неравенство Рао–Крамера.

7. Дайте определения достаточной статистики и функции правдоподобия. Приведите примеры, в том числе для интерпретации натурального эксперимента.

8. Перечислите основные методы получения точечных оценок. Приведите примеры.

9. Дайте определение интервальной оценки и доверительного интервала. Приведите примеры. Постройте интервальные оценки для экспоненциального и нормального распределений.

10. Опишите метод доверительных множеств.

**ТЕМА 5.2. Проверка параметрических и непараметрических гипотез.** Виды гипотез, статистические критерии, ошибки первого и второго рода. Критерий Неймана–Пирсона. Критерий Вальда [4, с. 158–191]. Проверка непараметрических гипотез. Критерии согласия и независимости [4, с. 207–236].

### **Контрольные вопросы к теме 5.2**

1. Раскройте понятие статистической гипотезы. Поясните, какие гипотезы называют  $n$ -параметрическими, простыми и

сложными, приведите примеры. Опишите принципы проверки двух простых гипотез.

2. Опишите критерий Неймана–Пирсона. Поясните, каким образом объем выборки влияет на результат проверки гипотез на примере нормальной модели выборки.

3. Опишите процедуру построения последовательного критерия отношения правдоподобия (критерий Вальда). Укажите, чем равны для критерия Вальда: вероятности совершения ошибок первого и второго рода; средний объем испытаний и нижняя граница среднего объема испытаний.

4. Опишите критерий согласия Колмогорова для проверки простой гипотезы. Укажите, в каких случаях его целесообразно использовать.

5. Опишите критерий согласия  $\omega^2$  для проверки простой гипотезы. Укажите, в каких случаях его целесообразно использовать.

6. Опишите критерий согласия  $\chi^2$  для проверки простой гипотезы. Укажите, в каких случаях его целесообразно использовать. Сформулируйте теорему Пирсона.

7. Опишите особенности применения критериев согласия Колмогорова,  $\omega^2$  и  $\chi^2$  при проверке сложных гипотез.

8. Опишите критерии независимости Спирмена. Перечислите свойства рангового коэффициента корреляции Спирмена. Поясните, в чем его преимущества и недостатки перед выборочным коэффициентом корреляции.

**ТЕМА 5.3. Корреляционный, регрессионный и дисперсионный анализ.** Корреляционный анализ: парных связей, коэффициента корреляции, корреляционного отношения и множественных связей [4, с. 240–270]. Регрессионный анализ. Метод наименьших квадратов. Статистический анализ регрессионной модели. Линейные и квадратичные регрессии [4, с. 282–326]. Однофакторный и двухфакторный дисперсионный анализ. Понятие линейных контрастов [4, с. 340–356].

### Контрольные вопросы к теме 5.3

1. Перечислите основные задачи корреляционного, регрессионного и дисперсионного анализа. Поясните, в чем состоит задача анализа парных связей. Приведите пример.

2. Опишите идею оценки показателя связи по выборочным данным. Приведите пример.

3. Опишите метод оценки коэффициента корреляции. Перечислите свойства множественного коэффициента корреляции.

4. Дайте общее определение регрессии и определение линейной регрессии. Приведите пример.

5. Опишите матричный способ записи линейной регрессии. Дайте определения матриц отклика, базисных функций, ошибок.

6. Сформулируйте предположения, лежащие в основе метод наименьших квадратов, и поясните идею этого метода.

7. Перечислите и детализируйте этапы статистического анализа регрессионной модели.

8. Сформулируйте правило проверки адекватности линейной регрессионной модели. Выведите формулу для несмещенной оценки дисперсии отклика.

9. Формализуйте задачи однофакторного и двухфакторного дисперсионного анализа. Приведите примеры.

**ТЕМА 5.4. Непараметрические методы статистики.** Одновыборочная и двухвыборочная задачи о сдвиге. Критерий знаков. Парные наблюдения. Критерий Вилкоксона [4, с. 366–395].

#### **Контрольные вопросы к теме 5.4**

1. Поясните, какие методы математической статистики называют непараметрическими. Укажите, в чем их преимущества и недостатки по сравнению с классическими методами.

2. Сформулируйте одновыборочную задачу о сдвиге.

3. Формализуйте и поясните критерий знаков.

4. Сформулируйте и решите задачу парных наблюдений.

5. Опишите критерий Вилкоксона. Сформулируйте двухвыборочную задачу о сдвиге и опишите для нее критерий Вилкоксона.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

### Основная литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – 9-е изд. – М.: Лаборатория знаний, 2020. – 636 с.
2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Высшая школа, 2005. – 544 с.
3. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – 6-е изд., стер. – М.: Издательство «Кронус», 2018. – 208 с.
4. Горяинов В.Б., Павлов И.В., Цветкова Г.М., Тескин О.И. Математическая статистика. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 424 с.
5. Григорьев И. AnyLogic. Практическое пособие по имитационному моделированию, 2022. – 272 с.
6. Звонарев С.В. Основы математического моделирования: учебное пособие. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2019. – 112 с.
7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. – М.: Наука, 2019. – 543 с.
8. Липаев В.В. Проектирование и производство сложных заказных программных продуктов. – М.: СИНТЕГ, 2011. – 400 с.
9. Малинецкий Г.Г. Математические основы синергетики: Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. – М.: «ЛИБРОКОМ», 2009. – 312 с.
10. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 316 с.
11. Умнов А.Е. Методы математического моделирования. – М.: Изд-во МФТИ, 2012. – 295 с.
12. Фомичев А.В. Элементы теории бифуркаций и динамических систем. – М.: Изд-во МФТИ, Изд-во 2019. – 50 с.
13. Чуи Ч. Введение в вэйвлеты: Пер. с англ. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
14. Чуличков А.И. Математические модели нелинейной динамики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 296 с.

## Дополнительная литература

15. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Наука. – 2009. – 652 с.
16. Броневи́ч А.Г., Лепский А.Е. Нечеткие модели анализа данных и принятия решений: учебное пособие. – М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2022. – 264 с.
17. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000. – 424 с.
18. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.
19. Петровский А.В. Теория принятия решений. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 400 с.
20. Пытьев Ю.П. Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 354 с.
21. Тихонов А.Н., Садовничий В.А. и др. Математическое моделирование. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1993. – 332 с.