Анизотропийный подход к исследованию систем с мультипликативными шумами

Александр Юрченков [1]
Аркадий Кустов [1]

[1]лаборатория №1 “Динамических информационно-управляющих систем им. Б.Н. Петрова”
Института Проблем Управления им. В.А. Трапезникова РАН

11 ноября 2021 г.

Историческая справка

Владимиров Игорь Геннадиевич (ИППИ)

Курдюков Александр Петрович (ИПУ)

Семенов Александр Владимирович (ГосНИИАС)

Semyonov A.V., Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P. Stochastic Approach to $\mathcal{H}_\infty$-Optimization // Proc. 33rd IEEE Conf. Decision and Control. 1994. V. 3. P. 2249-2250.

Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В. Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем // Доклады Академии наук. 1995. Т. 342. №4. С. 583-585.

- Анализ стационарных и нестационарных систем
- Синтез управления: стационарный случай

Максимов Евгений Александрович	**Тимин Виктор Николаевич**	**Чайковский Михаил Михайлович**

- *Курдюков А.П., Максимов Е.А.* Робастная устойчивость линейных дискретных систем с неопределенностью, ограниченной по анизотропийной норме // Доклады Академии наук. 2005. Т. 400. №2. С. 583-585.
- *Тимин В.Н., Чайковский М.М., Курдюков А.П.* Решение задачи анизотропийной субоптимальной фильтрации методом выпуклой оптимизации // Доклады Академии наук. 2012. Т. 444, №6. С. 612-615.

- Анализ систем с неопределенностью
- Фильтрация
- Субоптимальные постановки задач
- Методы выпуклой оптимизации

Историческая справка

Кустов Аркадий Юрьевич

Юрченков Александр Викторович

Белов Иван Романович

Белов Алексей Анатольевич

Андрианова Ольга Геннадьевна

- Анализ и синтез для дескрипторных систем
- Постановки задач для нецентрированных возмущений
- Анализ для систем с неопределенностями разных типов
- Синтез регуляторов и фильтров

Мотивация для исследования

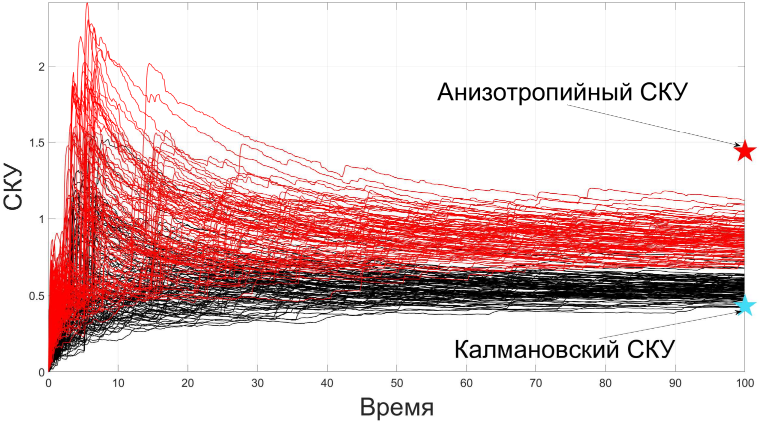


Рис.1.Среднеквадратичные коэффициенты усиления для системы в ошибках оценивания

Анизотропия случайного вектора

Относительная энтропия плотности распределения f относительно g равна

$$\mathbf{D}(f||g) = \mathbf{E}_f \left[\ln \left(\frac{f}{g} \right) \right]$$

Определение

$$\mathbf{A}(W) = \min_{\lambda > 0} \mathbf{D}(f||p_{m,\lambda}) = \frac{m}{2} \ln \left(\frac{2\pi e}{m} \mathbf{E}[|W|^2] \right) - \mathbf{h}(W),$$

где $p_{m,\lambda} = (2\pi\lambda)^{-m/2} e^{-(x^{\mathrm{T}} x)/(2\lambda)}$

Если $W \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$, то

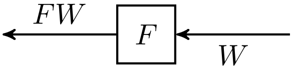
$$\boxed{\mathbf{A}(W) = -\frac{1}{2} \ln \det \left(\frac{m\Sigma}{\mathrm{tr}\Sigma} \right)}$$

Анизотропийная норма матрицы

Среднеквадратичный коэффициент усиления

Пусть $F \in \mathbb{R}^{p\times m}$ — линейный оператор, $W \in \mathbb{L}_2^m$ — входной вектор. Тогда

$$\mathbf{Q}(FW, W) = \sqrt{\frac{\mathbf{E}[|FW|^2]}{\mathbf{E}[|W|^2]}}$$



Определение

$$\|F\|_a = \sup\{\mathbf{Q}(FW, W): \quad W \in \mathbb{L}_2^m, \;\; \mathbf{A}(W) \leqslant a\}$$

Объект

Система с мультипликативными шумами

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= (A_{0,k} + \xi_{1,k} A_{1,k}) x_k + (B_{0,k} + \xi_{2,k} B_{1,k}) w_k, \\
z_k &= (C_{0,k} + \xi_{3,k} C_{1,k}) x_k + (D_{0,k} + \xi_{4,k} D_{1,k}) w_k,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Предположения на случайные величины

- $\mathbf{E}[\xi_{i,k}] = 0, \quad \mathbf{D}[\xi_{i,k}] = 1 \quad \forall\, i, k,$
- $\mathbf{E}[\xi_{i,k}\xi_{j,r}] = \delta_{i,j}\delta_{k,r},$
- $\{w_k\}$ и $\xi_{i,k}$ независимы

Задача 1: коррекция отказов

Рассматривается нестационарная система вида

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k w_k, \quad x_0 = 0, \\ z_k &= M_k x_k + N_k w_k, \\ y_k &= \lambda_k C_k x_k + D_k w_k + (1-\lambda_k) y_{k-1}, \end{aligned} \tag{2}$$

где A_k, B_k, M_k, N_k, C_k и D_k — заданные матрицы, $\mathbf{A}(W_{0:N}) \leqslant a$, $P(\lambda_k = 1) = p$ и $P(\lambda_k = 0) = 1 - p$.

Цель

Построить оценку выхода z_k, обозначаемую $\widehat{z}_k$, обеспечивающую $\|\mathcal{F}_{\tilde{z}w}\|_a \leqslant \gamma, \quad \gamma \longrightarrow \min$

Задача 2: оценивание для сети датчиков

Рассматривается нестационарная система вида

$$\begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & A_k x_k + B_k w_k, \quad x_0 = 0, \\ z_k & = & M_k x_k + N_k w_k, \\ y_{j,k} & = & \lambda_{j,k} C_{j,k} x_k + D_{j,k} w_k, \end{array} \tag{3}$$

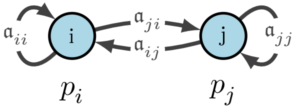
где A_k, B_k, M_k, N_k, $C_{j,k}$ и $D_{j,k}$ — заданные матрицы, $\mathbf{A}(W_{0:N}) \leqslant a$, $P(\lambda_{j,k} = 1) = p_j$ и $P(\lambda_{j,k} = 0) = 1 - p_j$.

Цель

Используя доступные измерения $y_{j,k}, j = \overline{1, n}$, построить оценку выхода z_k, обозначаемую $\widehat{z}_k$, обеспечивающую $\|\mathcal{F}_{\widetilde{z}w}\|_a \leqslant \gamma, \quad \gamma \longrightarrow \min$

Сетевые системы (сети датчиков)

Часто в реальных задачах имеется некоторое множество датчиков, в которых с определенной частотой могут происходить отказы, что приводит к плохим результатам оценивания – в этих случаях закономерно производить некоторое "взвешенное" оценивание, но для этого требуется организация обмена данными между сенсорами.



Схематичное изображение коммуникации двух сенсоров.

Основной результат

Условие ограниченности анизотропийной нормы

Для системы с мультипликативными шумами F анизотропийная норма ограничена $\|F\|_a \leqslant \gamma$, если существует решение рекуррентных неравенств

$$\boxed{R_k \succ \sum_{i=0}^{M} \left(A_{i,k}^{\top} R_{k+1} A_{i,k} + q C_{i,k}^{\top} C_{i,k}\right) + L_k^{\top} S_k^{-1} L_k} \tag{4}$$

где $S_k = \left(I_{m_w} - \sum\limits_{i=0}^{M} \left(q D_{i,k}^{\top} D_{i,k} + B_{i,k}^{\top} R_{k+1} B_{i,k}\right)\right)^{-1}$,

$L_k = S_k\left(B_{0,k}^{\top} R_{k+1} A_{0,k} + q D_{0,k}^{\top} C_{0,k}\right)$, с граничным условием $R_{N+1} = 0$ и неравенством специального вида

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} \ln\det S_k^{-1} \geqslant 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2)} \tag{5}$$

Этапы решения задач

1. выбор оценивателя*

в задаче с коррекцией без сети

$$\begin{aligned}
&\widehat{\overline{x}}_{k+1} = W_k \widehat{\overline{x}}_k + H_k(y_k - \overline{C}_k^p \widehat{\overline{x}}_k), \quad \widehat{x}_0 = 0, \\
&\widehat{z}_k = \overline{M}_k \widehat{\overline{x}}_k,
\end{aligned} \tag{6}$$

в задаче с сетью без коррекции

$$\begin{aligned}
&\widehat{x}_{j,k+1} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathfrak{a}}_{ji} \left(A_k \widehat{x}_{i,k} + H_{ji,k}(y_{i,k} - \widehat{y}_{i,k}) \right), \\
&\widehat{z}_{j,k} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathfrak{a}}_{ji} M_k \widehat{x}_{i,k}
\end{aligned} \tag{7}$$

*для коррекции — преобразование модели

Этапы решения задач

2. замыкание системы выбранным оценивателем, формирование «системы в ошибках»,
3. переход от Риккати подобных неравенств к МН,
4. введение специальной замены[†] для преобразования МН к ЛМН,

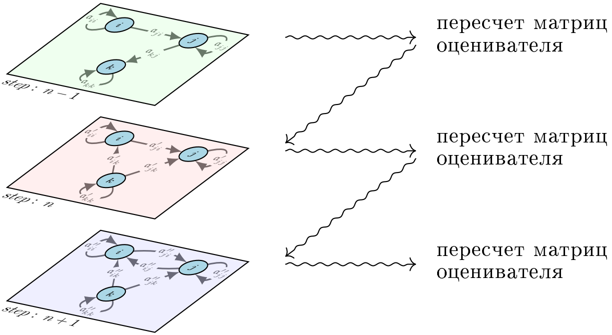
$$U_k = \begin{bmatrix} 0_{n_x \times n_x} & 0_{n_x \times p_y} \\ W_k & H_k \end{bmatrix}, \quad X_k = R_{k+1} U_k$$

5. решение задачи оптимизации с выпуклыми ограничениями,
6. обратная замена для определения матриц оценивателя

$$W_k = R_{2,k+1}^{-1} X_{1k}, \quad H_k = R_{2,k+1}^{-1} X_{2k}$$

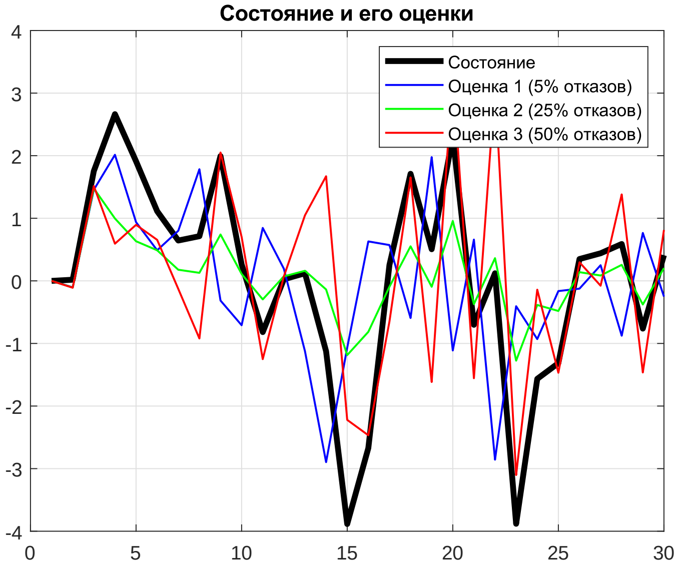
[†] для задачи с коррекцией

Развитие: итерационное улучшение



Замечание: предложенная процедура позволяет получить матрицу смежности сети, для которой граница анизотропийной нормы «системы в ошибках» не превосходит значение, полученное для исходной матрицы

Отдельные оценки для нескольких датчиков



Оценка, основанная на сети трех датчиков

Основные публикации

- *A.Yu. Kustov and A.V. Yurchenkov* Finite–horizon Anisotropic Estimator Design in Sensor Networks, 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), P. 4330-4335, 2020.
- *A.Yu. Kustov and A.V. Yurchenkov* Finite–horizon Anisotropy–based Estimation with Packet Dropouts, IFAC–PapersOnLine, vol. 53, no. 2., P. 4516–4520, 2020.
- *А.В. Юрченков, А.Ю. Кустов* Анизотропийный подход к организации обмена данными для нестационарной сетевой системы // Доклады Академии наук. 2021. Т. 500, №5. С. 1-5.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!