Молодежная научная школа ИПУ РАН

Математические методы исследования вырожденных задач оптимизации и управления и их приложения

Руководитель: д.ф.-м.н., г.н.с., лаб. 45 Арутюнов Арам Владимирович

Срок реализации проекта: 2 года (2020–2022 гг.)

Статус заявки: отчет за второй год проекта.

23 мая 2022 г.

СОСТАВ МНШ

Руководитель

1. Арутюнов Арам Владимирович, д.ф.-м.н., профессор. г.н.с. лаб. 45, 1956 г.р.
Имеет более 25 публикаций за последние 3 года в журналах, индексируемых Scopus или WoS. Под его руководством за последние пять лет защищена одна кандидатская и одна докторская диссертации.

Исполнители

2. Жуковская Зухра Тагировна, к.ф.-м.н., с.н.с. лаб. 45, 1988 г.р.
Имеет 5 публикаций за последние 3 года в журналах, индексируемых Scopus или WoS.

3. Жуковский Сергей Евгеньевич, д.ф.-м.н., доцент, в.н.с. лаб. 45, 1983 г.р.
Имеет более 20 публикаций за последние 3 года в журналах, индексируемых Scopus или WoS.

4. Котюков Александр Михайлович, аспирант ИПУ РАН, м.н.с. лаб. 45, 1995 г.р.
Имеет 3 публикации за последние 3 года в журналах, индексируемых Scopus или WoS.

5. Никаноров Станислав Олегович, аспирант ИПУ РАН, м.н.с. лаб. 45, 1995 г.р.
Имеет 3 публикации за последние 3 года, из них 2 в Scopus, 1 в РИНЦ.

6. Царьков Кирилл Александрович, к.ф.-м.н., с.н.с. лаб. 45, 1992 г.р. Имеет 6 публикаций за последние 3 года в журналах, индексируемых Scopus или WoS.

ЦЕЛИ ПРОЕКТА

Проект был направлен на разработку и приложение методов исследования вырожденных задач оптимизации и управления. На второй год выполнения проекта ставились следующие цели.

- Исследование задачи оптимального управления со смешанными ограничениями и получение новых необходимых условий оптимальности. Исследование свойств множителей Лагранжа в задаче с фазовыми ограничениями.
- Исследование задачи управления линейной по состоянию стохастической системой на неограниченном интервале времени. Построение эффективных численных методов последовательного улучшения заданного нестационарного программного управления.
- Исследование задач оптимизации с вырожденными ограничениями типа равенств. Получение утверждений о свойствах допустимых точек.
- Получение достаточных условий существования минимума ряда специальных функционалов на функциональных пространствах.
- Приложения к исследованию некоторых нелинейных моделей рынка. Получение условий существования функции равновесных цен.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ МНШ

Все задачи, поставленные на второй год проекта, выполнены в полном объеме.

Достигнутые показатели за второй год выполнения проекта:

- Статьи: 7 (из них 7 в Scopus, 5 в WoS, 5 в РИНЦ).
- Тезисы докладов: 6 (из них 5 в РИНЦ).

Достигнутые показатели за два года выполнения проекта:

- Статьи: 14 (из них 14 в Scopus, 9 в WoS, 9 в РИНЦ).
- Тезисы докладов: 9 (из них 8 в РИНЦ).

Участие членов МНШ в научных мероприятиях

- Международная конференция «Современные методы теории функций и смежные проблемы. Воронежская зимняя математическая школа». 28 января – 2 февраля 2021 г., Воронеж.
- 17-ая Всероссийская школа-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2021, Москва), 6-9 сентября 2021 г.
- Международная конференция «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD-2021), 27-29 сентября 2021 г.
- общемосковский семинар ИПУ «Оптимизация и нелинейный анализ» (руководители д.ф.-м.н., проф. Арутюнов А.В., д.ф.-м.н., доц. Жуковский С.Е., к.ф.-м.н. Павлова Н.Г.).
- Международная конференция «Quasilinear Equations, Inverse Problems and Their Applications», Долгопрудный, МФТИ, декабрь 2020.
- III Международный семинар «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона - Якоби», Екатеринбург, октябрь 2020.
- XV Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого), июнь 2020.
- международный семинар «Variational Analysis and Optimization Seminar», Australian Mathematical Society.

Статьи

1. Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E. Variational Principles and Mean Value Estimates // Journal of Optimization Theory and Applications, 2022, https://doi.org/10.1007/s10957-021-01966-0 (WoS, Scopus)
2. Арутюнов А.В., Жуковский С.Е. Управляемость для задач со смешанными ограничениями // Дифференциальные уравнения, 2022, Т. 58, № 2, С. 252-259. (WoS, Scopus, РИНЦ)
3. Pavlova N.G., Nikanorov S.O. Equilibrium in Dynamic Market Models // Advances in Systems Science and Applications, 2022, V. 22, №2. (Scopus, РИНЦ)
4. Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E. Stable Solvability of Nonlinear Equations under Completely Continuous Perturbations // Proc. Steklov Institute of Math., 2021. Vol. 312. P. 1-15. (WoS, Scopus, РИНЦ)
5. Zhukovskiy E.S., Zhukovskaya Z.T., Zhukovskiy S.E. Kantorovich's Fixed Point Theorem and Coincidence Point Theorems for Mappings in Vector Metric Spaces // Set-Valued and Variational Analysis, 2021, https://doi.org/10.1007/s11228-021-00588-y (WoS, Scopus)
6. Khrustalev M.M., Tsarkov K.A. Some Improvement Algorithms for Non-stationary Regulators on an Infinite Time Interval // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. №. 12. P. 2097-2110. (WoS, Scopus, РИНЦ)
7. Zhukovskiy S. On Solvability of Equations Defined by Continuous and Smooth Regular Mappings // Advances in Systems Science and Applications, 2021, 21(3), P. 113-118. (Scopus, РИНЦ)
8. Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E. On Global Solvability of Nonlinear Equations with Parameters // Doklady Mathematics. 2021. Vol. 103. No. 1. P. 57-60. (WoS, Scopus, РИНЦ)
9. Arutyunov A.V., Kotyukov A.M., Pavlova N.G. Equilibrium in Market Models with Known Elasticities // Advances in Systems Science and Applications. 2021. Vol 24 № 4. P. 130-144. (Scopus, РИНЦ)
10. A. Kotyukov, N. Pavlova. Equilibrium in Market Models // Proceedings of the 14th International Conference "Management of Large-Scale System Development"(MLSD). Moscow: IEEE, 2021. https://ieeexplore.ieee.org/document/9600139. (Scopus)
11. Arutyunov, A.V., Zhukovskiy, S.E. Nonlocal Generalized Implicit Function Theorems in Hilbert Spaces // Differential Equations, 2020, V. 56, P. 1525–1538 (WoS, Scopus, РИНЦ)
12. Z. T. Zhukovskaya, S. E. Zhukovskiy. Local Solvability of Control Systems with Implicit Dynamics //15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), Moscow, 2020, pp. 1-4, doi: 10.1109/STAB49150.2020.9140537. (Scopus)
13. A.V. Arutyunov, A.F. Izmailov, S.E. Zhukovskiy. Continuous Selections of Solutions for Locally Lipschitzian Equations // Journal of Optimization Theory and Applications, 2020, V. 185, P. 679–699 (WoS, Scopus).
14. Benarab S., Zhukovskaya Z.T., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Functional and Differential Inequalities and Their Applications to Control Problems // Diff. Equat., 2020, V. 56, P. 1440-1451 (WoS, Scopus, РИНЦ).

Тезисы докладов

1. Котюков А.М., Павлова Н.Г., Жуковский С.Е. Положение равновесия в моделях рынка / Труды 14-й Международной конференции "Управление развитием крупномасштабных систем"(MLSD-2021). М.: ИПУ РАН, 2021. С. 646-653. (РИНЦ)
2. Алексеев А.В., Арутюнов А.А. Pseudodifferential operators on open manifolds // Conference handbook and proceedings of Quasilinear Equations, Inverse Problems and Their Applications (QIPA 2021, Sochi). Сочи: МФТИ, 2021
3. Котюков А.М., Братусь А.С., Математическая модель противоопухолевой терапии, основанной на инъекциях ДК и анти-PD-L1 / Материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа «СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ», 2021. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2021. С. 64-66. (РИНЦ)
4. Котюков А.М, Реализация итерационного процесса поиска точек совпадения двух отображений. Материалы международной конференции «Современные методы теории функций и смежные проблемы. Воронежская зимняя математическая школа». Воронеж Издательский дом ВГУ, 2021, С. 172. (РИНЦ)
5. Никаноров С.О. Исследование динамической непрерывной модели Вальраса-Эванса-Самуэльсона. Материалы международной конференции «Современные методы теории функций и смежные проблемы. Воронежская зимняя математическая школа». Воронеж Издательский дом ВГУ, 2021, С. 228. (РИНЦ)
6. Арутюнов А.В., Жуковская З.Т. Глобальная теорема о неявной функции / Материалы 3-го Международного семинара, посвящённого 75-летию академика А. И. Субботина «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби» (CGS’2020). Екатеринбург: УМЦ УПИ, 2020. С. 99. (РИНЦ)

ЗАЯВКА НА 2022–2024 ГГ.

Название: Исследование анормальных задач оптимизации средствами вариационного анализа и их приложения.

Цели:

- Исследовать задачу оптимального управления с различными концевыми ограничениями и с геометрическими ограничениями; исследовать свойства конечномерного минимума, вывести необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.
- Исследовать задачу оптимизации нелинейной по управлению стохастической системы диффузионно-скачкообразного типа; получить необходимые и достаточные условия локальной оптимальности; разработать численную процедуру последовательного улучшения заданной программы управления.
- Исследовать вырождающиеся системы абстрактных уравнений и неравенств с параметром, получить для них достаточное условие разрешимости при всех значениях параметра из некоторой окрестности заданного значения.
- Исследовать управляемые системы со смешанными ограничениями типа равенств и неравенств; получить достаточные условия существования допустимых позиционных и программных управлений.
- Для динамической непрерывной модели рыночного равновесия исследовать свойства эластичностей, получить явный вид функции эластичности, отображений спроса и предложения; получить условия существования положений равновесия.
- Получить условия существования положения равновесия для динамической моделей открытого и закрытого рынка. Исследовать задачу максимизации налоговых сборов в динамической модели рынка в случае неединственности положения равновесия.

Обязательства по числу публикаций участников МНШ, отражающих эти результаты, в высокорейтинговых научных журналах (планируемое на год количество):

- WoS – 4;
- Scopus – 6.

НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ВТОРОГО ГОДА ВЫПОЛНЕНИЯ ПРОЕКТА

Исследована задача оптимального управления со смешанными ограничениями:

$$\varphi(p) \to \min, \quad \dot{x} = f(x,u), \quad t \in [0,1],$$

$$e(p) \le 0, \quad r(x,u) \le 0, \quad p = (x(0), x(1)).$$

Введено понятие нормальности: Допустимый процесс $(\bar{x}, \bar{u})$ назовем нормальным, если

$$Q := AA^* + \int_0^1 B(t)P(t)B^*(t)dt > 0.$$

Здесь $A = e'_{p_0}(\bar{p}) + e'_{p_1}(\bar{p})\Phi(1)$, $\bar{p} = (\bar{x}(0), \bar{x}(1))$; $\Phi(\cdot)$ — решение задачи Коши

$$\dot{\Phi} = f'_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t))\Phi - f'_u(\bar{x}(t), \bar{u}(t)), \quad \Phi(0) = I;$$

$B(t) = e'_{p_1}(\bar{p})\Phi(1)\Phi(1)^{-1}f'_u(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$; $P(t)$ — матрица ортогональной проекции на ядро оператора $R(t) = r'_u(\bar{x}(t), \bar{u}(t))^* D(t) r'_u(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$; $D(t)$ — диагональная матрица, элемент которой $d_{i,j}(t) = 1$ если $i = j$ и i является активным индексом смешанного ограничения, и $d_{i,j}(t) = 0$ в противном случае.

Получено необходимое условие оптимальности. Положим

$$H(x, u, \psi) := \langle \psi, f(x, u) \rangle, \quad L(p, \lambda) := \lambda_0 \varphi(p) + \lambda_1 e(p).$$

Будем говорить, что для допустимого процесса $(\bar{x}, \bar{u})$ выполняется принцип максимума, если существуют вектор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1) \neq 0$, $\lambda_0 \geq 0$, функция $\psi \in AC_\infty[0, 1]$ и неотрицательная функция $\nu \in L_\infty[0, 1]$ такие, что

$$\dot{\psi}(t) = -H'_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) + \nu(t) r'_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t)),$$

$$\psi(\alpha) = (-1)^\alpha L'_{p_\alpha}(\bar{p}, \lambda), \quad \alpha \in \{0, 1\},$$

$$\max_{u \in \Theta(t)} H(\bar{x}(t), u, \psi(t)) = H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)),$$

$$H'_u(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - \nu(t) r'_u(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0,$$

$$\lambda_1 e(\bar{p}) + \int_0^1 \langle \nu(t), r(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \rangle \, dt = 0.$$

Здесь $\Theta(t) := \operatorname{clos} U_R(t)$, $U_R(t)$ — множество всех векторов u таких, что $r(\bar{x}(t), u) \leq 0$ и строки матрицы $r'_u(\bar{x}(t), u)$ положительно линейно независимы.

Обозначим через Λ множество соответствующих векторов λ. Положим

$$K := \{(\delta x_0, \delta u) \in \mathbb{R}^n \times L_2^m[0,1] : \; e'(\bar{p})\delta p \leq 0,$$

$$D(t)(r_x'(\bar{x}(t), \bar{u}(t))\delta x(t) + r_u'(\bar{x}(t), \bar{u}(t))\delta u(t)) \leq 0\}$$

(здесь δx — соответствующее δu и δx_0 решение уравнения в вариациях, $\delta p = (\delta x(0), \delta x(1))$),

$$\Omega_\lambda[(\delta x_0, \delta u)]^2 = L_{pp}''[\delta p]^2 - \int_0^1 H_{ww}''(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t))[(\delta x(t), \delta u(t))]^2 dt +$$

$$+ \int_0^1 \langle \nu(t), r_{ww}''(\bar{x}(t), \bar{u}(t))[(\delta x(t), \delta u(t))]^2 \rangle dt$$

(здесь $w = (x, u)$).

Theorem

Пусть выполнено условие нормальности. Тогда если $(\bar{x}, \bar{u})$ является решением рассматриваемой задачи, то $\Lambda \neq \emptyset$, $\dim \operatorname{span} \Lambda = 1$ и

$$\Omega_\lambda[(\delta x_0, \delta u)]^2 \geq 0 \quad \forall\, (\delta x_0, \delta u) \in K.$$

Исследованы свойства абстрактной задачи оптимизации с вырождающимися ограничениями:

$$\varphi(x) \to \min, \quad f(x) = 0.$$

Здесь $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — заданные гладкие отображения. Получены

- условия открытости расширенного отображения $x \mapsto (\varphi(x), f(x))$ в заданной допустимой точке $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ в терминах старших производных;
- условия существования допустимых точек в окрестности заданной допустимой точки $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ в терминах старших производных;

Для ограничения

$$f(x) = y$$

с параметром $y \in \mathbb{R}^k$ получены

- условия регулярности, гарантирующие существование и непрерывную зависимость от параметра допустимых точек $x(y)$ при любом y из заданного подмножества $Y \subset \mathbb{R}^k$;
- оценки расстояния от заданной допустимой точки $\bar{x}$, соответствующей параметру $\bar{y} := f(\bar{x})$ до множества допустимых точек $x(y)$, соответствующих каждому значению параметра y.

Положим

$$\mathrm{cov} A = \sup\{r \geq 0 : \ AB_{\mathbb{R}^n}(0,1) \supset B_{\mathbb{R}^k}(0,r)\},$$
$$a(t) := \inf\{\mathrm{cov} f'(x) : \ |x - \bar{x}| \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Здесь $B_{\mathbb{R}^k}(y,r)$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^k$ с центром в точке y радиуса r, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — произвольный линейный оператор.

Theorem

Предположим, что $a(t) > 0$ при некотором $t > 0$. Тогда для любого $R \in (0, +\infty]$ и $\varepsilon > 0$, для которых

$$R \leq (1+\varepsilon) \int_0^{+\infty} a(t)\, dt,$$

существует непрерывное отображение $g : B_{\mathbb{R}^k}(\bar{y}, R) \to \mathbb{R}^n$ такое, что

$$f(g(y)) = y, \qquad \int_0^{|g(y)-\bar{x}|} a(t)\, dt \leq (1+\varepsilon)|y - \bar{y}| \quad \forall\, y \in B_{\mathbb{R}^k}(\bar{y}, R).$$

В рамках выполнения нового проекта планируется

- исследовать задачу оптимального управления с различными концевыми ограничениями и с геометрическими ограничениями. Ставится цель исследовать свойства конечномерного минимума в этой задаче, вывести необходимые условия оптимальности первого и второго порядков;
- исследовать системы абстрактных уравнений и неравенств с параметром, получить для них достаточное условие разрешимости при всех значениях параметра из некоторой окрестности заданного значения. Соответствующие достаточные условия должны быть сформулированы в терминах λ-укорочения.

НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ВТОРОГО ГОДА ВЫПОЛНЕНИЯ ПРОЕКТА (К.А. Царьков)

Исследована задача оптимального управления:

$$dx(t) = A(u(t))x(t)dt + G(u(t))x(t)dw(t), \quad t \in [0; +\infty), \quad x(0) = x_0,$$

$$J(u) = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} x(t)^{\mathrm{T}} Q(u(t))x(t)dt\right] \to \inf_{u \in \mathcal{U}},$$

где x_0 – n-мерный случайный вектор с известной конечной матрицей вторых начальных моментов, отображения A, G, $Q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n \times n}$ непрерывно дифференцируемы, $Q(u) \succcurlyeq 0 \;\; \forall u \in \mathbb{R}^m$,

$$\mathcal{U} = \bigcup_{T \geq 0} \mathcal{U}_T,$$

где $\mathcal{U}_T$ – множество функций $u : [0; +\infty) \to \mathbb{R}^m$ таких, что выполнены условия:

1. $u|_{[0;T]} \in L_\infty^m([0; T])$, если $T > 0$;
2. $u(t) = u_T \;\forall t \geq T$, причем матрица $A(u_T) \oplus A(u_T) + G(u_T) \otimes G(u_T)$ гурвицева.

Пусть $\mathcal{S}$ обозначает множество тех векторов $v \in \mathbb{R}^m$, для которых матрица $A(v) \oplus A(v) + G(v) \otimes G(v)$ гурвицева. Рассмотрим первую вспомогательную задачу

$$J_c(u) = \mathbb{E}\left[\int\limits_0^{+\infty} x(t)^{\mathrm{T}} Q(u) x(t) dt\right] \to \inf_{u \in \mathcal{S}}.$$

Утверждение 1. Компоненты градиента функционала J_c в произвольной точке $u \in \mathcal{S}$ имеют вид

$$\frac{\partial J_c(u)}{\partial u_j} = \mathrm{tr}\left[\left(\frac{\partial Q(u)}{\partial u_j} - 2M_T\frac{\partial A(u)}{\partial u_j} - 2G(u)^{\mathrm{T}} M_T \frac{\partial G(u)}{\partial u_j}\right) N_T\right], \quad j = \overline{1, m},$$

где матрица $N_T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ является единственным решением уравнения

$$A(u)N_T + N_T A(u)^{\mathrm{T}} + G(u)N_T G(u)^{\mathrm{T}} + N_0 = 0,$$

а матрица $M_T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – единственным решением уравнения

$$Q(u) - M_T A(u) - A(u)^{\mathrm{T}} M_T - G(u)^{\mathrm{T}} M_T G(u) = 0,$$

причем

$$J_c(u) = -\mathrm{tr}\left[M_T N_0\right].$$

Пусть число $T > 0$ фиксировано, $\alpha \geq 0$ – скалярный коэффициент, а I – единичная матрица размеров $n \times n$. Рассмотрим вторую вспомогательную задачу

$$J_\alpha(u) = \mathbb{E}\left[\int\limits_0^T x(t)^{\mathrm{T}} Q(u(t)) x(t) dt + x(T)^{\mathrm{T}} \alpha I x(T)\right] \to \inf_{u \in L_\infty^m([0;T])}.$$

Утверждение 2. Компоненты градиента функционала J_α в произвольной точке $u \in L_\infty^m([0;T])$ имеют вид

$$\frac{\partial J_\alpha(u)}{\partial u_j(\cdot)} = t \to \mathrm{tr}\left[\left(\frac{\partial Q(u(t))}{\partial u_j} - 2M(t)\frac{\partial A(u(t))}{\partial u_j} - 2G(u(t))^{\mathrm{T}} M(t)\frac{\partial G(u(t))}{\partial u_j}\right) N(t)\right],$$

$j = \overline{1, m}$, где матричная функция $N : [0;T] \to \mathbb{R}^{n \times n}$ является единственным решением задачи Коши

$$\dot{N}(t) = A(u(t))N(t) + N(t)A(u(t))^{\mathrm{T}} + G(u(t))N(t)G(u(t))^{\mathrm{T}}, \quad N(0) = N_0,$$

а матричная функция $M : [0;T] \to \mathbb{R}^{n \times n}$ – единственным решением задачи Коши

$$\dot{M}(t) = -M(t)A(u(t)) - A(u(t))^{\mathrm{T}} M(t) - G(u(t))^{\mathrm{T}} M(t) G(u(t)) + Q(u(t)), \;\; M(T) = -\alpha I,$$

причем

$$J_\alpha(u) = -\mathrm{tr}\left[M(0)N_0\right].$$

Пусть число $T > 0$ фиксировано. Рассмотрим третью вспомогательную задачу

$$J_*(u) = \mathbb{E}\left[\int\limits_0^{+\infty} x(t)^{\mathrm{T}} Q(u(t))x(t)dt\right] \to \inf_{u\in\mathcal{U}_T}.$$

Утверждение 3. Градиент функционала J_* в произвольной точке $u \in \mathcal{U}_T$ имеет вид

$$\nabla_u J_*(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial J_*(u)}{\partial u(\cdot)} \\ \frac{\partial J_*(u)}{\partial u_T} \end{pmatrix} \in L_\infty^m([0;T]) \times \mathbb{R}^m,$$

$$\frac{\partial J_*(u)}{\partial u_j(\cdot)} = t \to \mathrm{tr}\left[\left(\frac{\partial Q(u(t))}{\partial u_j} - 2M(t)\frac{\partial A(u(t))}{\partial u_j} - 2G(u(t))^{\mathrm{T}} M(t)\frac{\partial G(u(t))}{\partial u_j}\right) N(t)\right],$$

$$\frac{\partial J_*(u)}{\partial u_{T_j}} = \mathrm{tr}\left[\left(\frac{\partial Q(u_T)}{\partial u_j} - 2M_T\frac{\partial A(u_T)}{\partial u_j} - 2G(u_T)^{\mathrm{T}} M_T\frac{\partial G(u_T)}{\partial u_j}\right) N_T\right], \quad j = \overline{1,m},$$

где

$$\dot N(t) = A(u(t))N(t) + N(t)A(u(t))^{\mathrm{T}} + G(u(t))N(t)G(u(t))^{\mathrm{T}}, \quad N(0) = N_0,$$

$$\dot M(t) = -M(t)A(u(t)) - A(u(t))^{\mathrm{T}} M(t) - G(u(t))^{\mathrm{T}} M(t)G(u(t)) + Q(u(t)), \ \ M(T) = M_T,$$

$$A(u_T)N_T + N_T A(u_T)^{\mathrm{T}} + G(u_T)N_T G(u_T)^{\mathrm{T}} + N(T) = 0,$$

$$Q(u_T) - M_T A(u_T) - A(u_T)^{\mathrm{T}} M_T - G(u_T)^{\mathrm{T}} M_T G(u_T) = 0,$$

причем

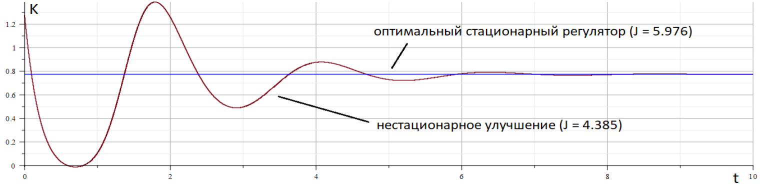
$$J_*(u) = -\mathrm{tr}\left[M(0)N_0\right].$$

На основе утверждений 1–3 **разработано** несколько эффективных алгоритмов последовательного улучшения заданной нестационарной программы управления.

В частности, для задачи линейного регулирования

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u = Ky, \quad y = Cx, \quad J = \int_0^{+\infty} \left[\langle Rx, x \rangle + \langle Su, u \rangle \right] dt \to \inf_K$$

построен нестационарный регулятор, улучшающий оптимальный стационарный:



В рамках выполнения нового проекта планируется:

- исследовать задачу оптимизации нелинейной по управлению стохастической системы диффузионно-скачкообразного типа;
- получить необходимые и достаточные условия локальной оптимальности;
- разработать численную процедуру последовательного улучшения заданной программы управления.

НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ВТОРОГО ГОДА ВЫПОЛНЕНИЯ ПРОЕКТА (З.Т. Жуковская)

Исследованы функционалы специального вида

$$J : L_\infty([0,1],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \quad J(x) = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,1]} f(t, x(t)), \quad x \in L_\infty([0,1],\mathbb{R}^n).$$

Здесь $f : [0,1]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — заданная функция, удовлетворяющая условиям Каратеодори:

- функция $f(\cdot, x)$ измерима при всех $x \in \mathbb{R}^n$;
- функция $f(t, \cdot)$ непрерывна при п.в. $t \in [0,1]$;
- для любого $r > 0$ существует $d > 0$ такое, что $|f(t,x)| \le d$ при п.в. $t \in [0,1]$, для любого x, для которого $|x| \le r$.

Получены достаточные условия существования минимума функционала J.

Предположим, что $f(t,x) \geq 0$ для п.в. $t \in [0,1]$, для любого $x \in \mathbb{R}^n$.

Theorem

Пусть $k > 0$ задано. Если при п.в. $t \in [0,1]$ выполняется условие Каристи

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad f(t,x) > 0 \quad \exists y \neq x : \quad f(t,y) + k|x-y| \leq f(t,x),$$

то для любой функции $x_0 \in L_\infty([0,1],\mathbb{R}^n)$ существует функция $\bar{x} \in L_\infty([0,1],\mathbb{R}^n)$, для которой

$$J(\bar{x}) = 0, \quad |\bar{x}(t) - x_0(t)| \leq \frac{f(t,x_0(t))}{k} \quad \dot{\forall}\, t \in [0,1].$$

В качестве приложения исследована задача Коши для неявного ОДУ:

$$f(t,x,\dot{x}) = 0, \quad x(0) = a. \tag{1}$$

Здесь $a \in \mathbb{R}^n$ — заданный вектор, $f : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — заданное отображение, удовлетворяющее условиям Каратеодори:

- отображение $f(\cdot,x,u)$ измеримо при всех $(x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$;
- отображение $f(t,\cdot,\cdot)$ непрерывно при п.в. $t \in [0,1]$;
- для любого $r > 0$ существует $d > 0$ такое, что $|f(t,x,u)| \leq d$ при п.в. $t \in [0,1]$, для любых x и u, для которых $|x| \leq r$, $|u| \leq r$.

Theorem

Пусть $k > 0$ задано. Предположим, что

- *отображение $f(t,\cdot,v)$ липшицево при п.в. $t \in [0,1]$, для любого $v \in \mathbb{R}^n$ с константой Липшица, не зависящей от (t,v);*
- *при п.в. $t \in [0,1]$, для любого $x \in \mathbb{R}^n$ отображение $f(t,x,\cdot)$ удовлетворяет условию Каристи:*

$$\forall\, v \in \mathbb{R}^n : \quad f(t,x,v) \neq 0 \quad \exists\, u \neq v : \quad |f(t,x,u)| + k|u-v| \leq |f(t,x,v)|.$$

Тогда задача Коши (1) имеет решение.

Исследованы свойства суперпозиционного оператора. Пусть Σ — компактное топологическое пространство, $f : \Sigma \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — непрерывное отображение, гладкое по x. Зададим суперпозиционный оператор

$$N : C(\Sigma, \mathbb{R}^n) \to C(\Sigma, \mathbb{R}^k)$$

по формуле

$$N(x)(\sigma) = f(\sigma, x(\sigma)), \quad x \in C(\Sigma, \mathbb{R}^n).$$

Получены достаточные условия существования решения нелинейного уравнения

$$N(x) = y.$$

Положим

$$\operatorname{cov} A = \sup\{r \geq 0 : \ AB_{\mathbb{R}^n}(0,1) \supset B_{\mathbb{R}^k}(0,r)\},$$

Здесь $B_{\mathbb{R}^k}(y,r)$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^k$ с центром в точке $y \in \mathbb{R}^k$ радиуса $r > 0$, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — произвольный линейный оператор.

Пусть $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ и $\alpha > 0$ заданы. Положим

$$\bar{y}(\sigma) := f(\bar{x},\sigma), \quad \sigma \in \Sigma.$$

Theorem

Предположим, что

$$\operatorname{cov} f'_x(\sigma,x) > \alpha \quad \forall\,(\sigma,x) \in \Sigma \times B_{\mathbb{R}^n}(\bar{x},r).$$

Тогда для любой функции $y \in C(\Sigma,\mathbb{R}^k)$, для которой $\|y - \bar{y}\|_C \leq \alpha r$ существует функция $x \in C(\Sigma,\mathbb{R}^n)$, для которой

$$N(x) = y, \quad |x(\sigma) - \bar{x}| \leq \frac{|f(\sigma,\bar{x})|}{\alpha} \quad \forall\,\sigma \in \Sigma.$$

Публикации по результатам проекта:

- Zhukovskiy E.S., Zhukovskaya Z.T., Zhukovskiy S.E. Kantorovich's Fixed Point Theorem and Coincidence Point Theorems for Mappings in Vector Metric Spaces // Set-Valued and Variational Analysis, 2021, https://doi.org/10.1007/s11228-021-00588-y (WoS, Scopus).
- З.Т. Жуковская, О свойствах решений неявных дифференциальных уравнений и управляемых систем, Вестник российских университетов. Математика, 2022 [принята к печати]. (РИНЦ)
- S. Benarab , Z.T. Zhukovskaya, E.S. Zhukovskiy, S.E. Zhukovskiy, Functional and Differential Inequalities and Their Applications to Control Problems // Diff. Equat., 2020, V. 56, P. 1440–1451. (WoS, Scopus, РИНЦ)

В рамках выполнения нового проекта планируется исследовать управляемые системы со смешанными ограничениями типа равенств и неравенств

$$\dot{x} = F(t, x, u), \quad x(0) = x_0, \quad G_1(t, x, u) = 0, \quad G_2(t, x, u) \leq 0.$$

Для этих систем планируется

- получить достаточные условия существования допустимых позиционных управлений $u(t, x)$ в классе непрерывных управлений;
- получить достаточные условия существования допустимых программных управлений $u(t)$ в классе измеримых управлений.

Планируется продолжить исследование уравнений, порожденных суперпозиционным оператором. Планируется получить условие устойчивости решений этих уравнений.

НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ВТОРОГО ГОДА (С.О. Никаноров)

Исследована динамическая непрерывная модель рыночного равновесия.

Имеется $n \in \mathbb{N}$ товаров, i-ый товар в момент времени $t \in [t_1; t_2]$ для потребителя имеет цену $p_i(t) > 0$, $i = \overline{1, n}$, $p(t_1) = \bar{p}$, $\dot{p}(t) = (\dot{p}_1(t), \dot{p}_2(t), \dots, \dot{p}_n(t)) \in P$ для п.в. t, где $P \subseteq \mathbb{R}^n$ — заданное замкнутое множество.
Функция $\rho_X : X \times X \to \mathbb{R}^+$, $\rho_X(x; y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $\rho_X(x; y) \leq q_0 \rho_X(y; x)$ $\forall x, y \in X$, $\rho_X(x; z) \leq q_1 \rho_X(x; y) + q_2 \rho_X(y; z)$ $\forall x, y, z \in X$, X — пространство цен, $X = [c_{11}; c_{21}] \times [c_{12}; c_{22}] \times \ldots \times [c_{1n}; c_{2n}]$, c_{1i}, c_{2i} — ограничения на цены товаров.

Спрос совокупного потребителя описывается отображением

$$D : P \times \mathbb{R}^n \times [t_1; t_2] \to \mathbb{R}^n,\ D = (D_1(\dot{p}(t), p(t), t), \ldots, D_n(\dot{p}(t), p(t), t)),$$

Предложение совокупного производителя описывается отображением

$$S : P \times \mathbb{R}^n \times [t_1; t_2] \to \mathbb{R}^n,\ S = (S_1(\dot{p}(t), p(t), t), \ldots, S_n(\dot{p}(t), p(t), t)),$$

Рассмотрим динамическую модель «спрос-предложение» с непрерывным временем

$$\sigma = (D(\dot{p}(t), p(t), t), S(\dot{p}(t), p(t), t), t_1, t_2, \bar{p}, P, q_0, q_1, q_2). \qquad (2)$$

Пусть $\delta \in (0; 1)$. Положением равновесия в модели (2) называется абсолютно непрерывная функция $p : [0; \delta] \to \mathbb{R}^n_+$ такая, что

$$D(\dot{p}(t), p(t), t) = S(\dot{p}(t), p(t), t), \quad \dot{p}(t) \in P \quad \dot{\forall} t \in [t_1; t_2]; \quad p(t_1) = \bar{p}. \qquad (3)$$

Theorem

Предположим, что существуют числа $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, $\nu > 0$, $\delta \in (0, t_2 - t_1]$ *и функция* $u_0 \in L_\infty([t_1, t_2], P)$, *такие, что выполняются следующие условия:*
1) Существует число $\alpha > 0$, *такое, что для п.в.* $t \in [t_1, t_1 + \delta]$ *и всех* $p \in B_{\mathbb{R}^n}(\bar{p}, \nu)$ *отображение* $S(\cdot, p, t) : P \to \mathbb{R}^n_+$ *является условно* α *- накрывающим относительно шаров*

$$U(t) = B_P(u_0(t), R_1),\ \ V(p, t) = B_{\mathbb{R}^n_+}(S(u_0(t), p, t), \alpha R_2).$$

2) Существует число $\beta > 0$ *(*$\beta < \alpha$*), такое, что*

$$\max_{i=\overline{1,n}} |D_i(u, p, t) - D_i(\tilde{u}, p, t)| \leq \beta \max_{i=\overline{1,n}} |u_i - \tilde{u}_i|$$

для всех $p \in B_{\mathbb{R}^n_+}(\bar{p}, \nu)$, *для всех* $u, \tilde{u} \in P$ *и для п.в.* $t \in [t_1, t_1 + \delta]$.
3) Для п.в. $t \in [t_1, t_1 + \delta]$ *и всех* $p \in B_{\mathbb{R}^n_+}(\bar{p}, \nu)$

$$0 \in S(U(t), p, t) - D(U(t), p, t).$$

4) Существуют числа $L_S \geq 0$ *и* $L_D \geq 0$, *такие, что для всех* $p, \tilde{p} \in B_{\mathbb{R}^n_+}(\bar{p}, \nu)$, *для всех* $u \in U(t)$ *и для почти всех* $t \in [t_1, t_1 + \delta]$ *выполняются неравенства*

$$\max_{i=\overline{1,n}} |S_i(u, p, t) - S_i(u, \tilde{p}, t)| \leq L_S \max_{i=\overline{1,n}} |p_i - \tilde{p}_i|,$$

$$\max_{i=\overline{1,n}} |D_i(u, p, t) - D_i(u, \tilde{p}, t)| \leq L_D \max_{i=\overline{1,n}} |p_i - \tilde{p}_i|.$$

Theorem

5) Выполняется неравенство $r_0 < R_{\min}$, *где*

$$r_0 := (\alpha - \beta)^{-1} \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [t_1, t_1 + \delta]} \max_{i = \overline{1,n}} |S_i(u_0(t), \bar{p}, t) - D_i(u_0(t), \bar{p}, t)|.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta_\varepsilon \in (0, \delta]$ *и вектор-функция равновесных цен*

$$p^{\delta_\varepsilon} \in AC_\infty([t_1, t_1 + \delta_\varepsilon], \bar{p}, P)$$

в модели (2), *такие, что* $\rho_{L_\infty([t_1, t_1 + \delta_\varepsilon], P)}\left(\dot{p}^{\delta_\varepsilon}, u_0^{\delta_\varepsilon}\right) < r_0 + \varepsilon$, *где* $u_0^{\delta_\varepsilon}$ — *сужение функции* u_0 *на* $[t_1, t_1 + \delta_\varepsilon]$.

Исследован вопрос нахождения эластичности спроса и предложения по ценам в модели "спрос-предложение" в модели рынка.

Эластичность показывает, как реагирует один параметр на изменение другого. В модели "спрос-предложение" эластичность спроса $E_D^p = \frac{p}{D(p)} \times \frac{dD(p)}{p}$ $(E_D^p = \frac{\Delta Q}{\Delta p} \times \frac{p_0}{q_0})$ позволяет судить об изменении величины спроса при изменении цены. Аналогично определяется эластичность предложения. Она показывает степень изменения объемов предложения. При значительных величинах спроса и предложения используется дуговая эластичность $E_D^p = \frac{\Delta Q}{\Delta p} \times \frac{p_1+p_2}{Q_1+Q_2}$.

Задача состоит в нахождении эластичностей спроса и предложения по ценам, используя модель рынка. Нахождения функций эластичности спроса и предложения $E_D^p : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}^n$ и $E_S^p : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}^n$. И дальнейшем восстановлении функций спроса и предложения, с использованием найденных отображений эластичности.

Публикации по проекту:

- Pavlova N.G., Kotyukov A.M., Nikanorov S.O. Local Normal Forms of Autonomous Quasi-Linear Constrained Differential Systems // Advances in Systems Science and Applications. 2020. T.20 №1. C. 119-127. (Scopus, РИНЦ)
- Никаноров С.О. Исследование математических моделей экономических процессов методами теории накрывающих отображений/ Материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы», 2021. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2021. С. 171.
- Nikanorov S.O. Equilibrium in dynamic market models// Advances in Systems Science and Applications. 2022 V. 22, N 2. (Scopus, РИНЦ)

В рамках выполнения нового проекта планируется:

- применить полученное утверждение при исследовании модели Вальраса-Эванса-Самуэльсона;
- создать алгоритм расчетов для различных моделей рынка и провести численные эксперименты;
- исследовать вопрос существования множества положений равновесия в модели рынка.

Definition

Пусть задано $\alpha > 0$. Отображение $\Psi : X \to Y$ называется α-накрывающим, если

$$B_Y(\Psi(x), \alpha r) \subseteq \Psi(B_X(x, r)) \ \ \forall r \geq 0, x \in X.$$

Definition

Пусть задано $\beta > 0$. Отображение $\Phi : X \to Y$ называется β- липшицевым, если

$$\rho_Y(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \leq \beta \rho_X(x_1, x_2) \ \ \forall x_1, x_2 \in X.$$

Theorem

(о существовании точек совпадения) Предположим, что q_0*- симметрическое* $(q1, q2)$ *- квазиметрическое пространство* (X, ρ_X) *является полным. Пусть отображение* Ψ *является* α*-накрывающим и замкнутым, а отображение* Φ *является липшицевым с константой* $\beta < \alpha$*. Зафиксируем произвольную точку* $x_0 \in X$*. Тогда у отображений* Ψ *и* Φ *существует такая точка совпадения* ξ*, что имеет место оценка*

$$\varliminf_{\eta\to\xi} \rho_X(x_0,\eta) \le \frac{q_1^2\alpha^{m_0-1} S\left(q_2\beta/\alpha, m_0-1\right) + q_1(q_2\beta)^{m_0-1}}{\alpha^{m_0} - q_2\beta^{m_0}} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)).$$

Если выполняется дополнительное условие $q_0^2\beta < \alpha$*, то имеют место оценки*

$$\rho_X(\xi, x_0) \le q_0 q_2^2 \frac{q_2\alpha^{n_0-1} S\left(q_1 q_0^2\beta/\alpha, n_0-1\right) + (q_1 q_0^2\beta)^{n_0-1}}{\alpha^{n_0} - q_1\left(q_0^2\beta\right)^{n_0}} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)),$$

$$\varliminf_{\eta\to\xi} \rho_X(\eta, x_0) \le q_0 q_2 \frac{q_2\alpha^{n_0-1} S\left(q_1 q_0^2\beta/\alpha, n_0-1\right) + (q_1 q_0^2\beta)^{n_0-1}}{\alpha^{n_0} - q_1\left(q_0^2\beta\right)^{n_0}} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)).$$

Исследована модель закрытого и открытого рынков.
Рассмотрим модель Маршала-Эванса

$$n \in \mathbb{N}, \bar{p} = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n, \bar{a} = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n_+,$$
$$\bar{c}_1 = (c_{11}, ..., c_{1n}), \bar{c}_2 = (c_{21}, ..., c_{2n}) \in \mathbb{R}^n_+ : c_{1i} \leq p_i \leq c_{2i} \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Пусть также для фиксированных цен $\bar{p}^* = (p_1^*, ..., p_n^*) \in \mathbb{R}^n_+$ известны значения спроса и предложения $\bar{D}^* = D(\bar{p}^*), \bar{S}^* = S(\bar{p}^*) \in \mathbb{R}^n$.
Помимо этого, мы полагаем известными матрицы эластичностей спроса и предложения по цене:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= (E_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}, \quad E_{ij} = \frac{\partial D_i}{\partial p_j} \frac{p_j}{D_i}, \quad i, j = \overline{1, n}, \\ \tilde{\mathcal{E}} &= (\tilde{E}_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}, \quad \tilde{E}_{ij} = \frac{\partial S_i}{\partial p_j} \frac{p_j}{S_i}, \quad i, j = \overline{1, n}, \end{aligned} \tag{4}$$

Решая системы уравнений (4), получим явное выражение для отображений спроса и предложения:

$$D_i(\bar{p}) = D_i^* \prod_{j=1}^{n} (p_j^*)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}}, \quad S_i(\bar{p}) = S_i^* \prod_{j=1}^{n} (p_j^*)^{-\tilde{E}_{ij}} p_j^{\tilde{E}_{ij}}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{5}$$

Модель закрытого рынка: $\sigma_c = (\mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}}, \bar{D}^*, \bar{S}^*, \bar{p}^*, \bar{c}_1, \bar{c}_2)$.
Положение равновесия: $\exists \bar{p} : c_{1i} \leq p_i \leq c_{2i} \quad \forall i = \overline{1, n}; \quad S(\bar{p}) = D(\bar{p})$.
Модель открытого рынка: $\sigma_o = (a, \mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}}, \bar{D}^*, \bar{S}^*, \bar{p}^*, \bar{c}_1, \bar{c}_2)$.
Положение равновесия: $\exists \bar{p} : c_{1i} \leq p_i \leq c_{2i} \quad \forall i = \overline{1, n}; \quad S(\bar{p}) + \bar{a} = D(\bar{p})$.

Получены необходимые и достаточные условия существования положения равновесия в модели закрытого рынка:

Theorem

Пусть в модели $\sigma_c \in \Sigma_c$ существует вектор равновесных цен. Тогда для параметров этой модели выполняется следующее условие: $rang(\mathcal{E} - \tilde{\mathcal{E}}) = rang A$, где элементы матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ определяются по формулам:

$$a_{ij} = \begin{cases} \tilde{E}_{ij} - E_{ij}, & i,j = \overline{1,n}; \\ \ln \frac{D_i^*}{S_i^*} + \sum_{k=1}^{n} (\tilde{E}_{ik} - E_{ik}) \ln p_k^*, & i = \overline{1,n}, j = n+1. \end{cases}$$

Theorem

Пусть параметры модели закрытого рынка $\sigma_c \in \Sigma_c$ удовлетворяют условиям:
$\forall m = \overline{1,n}$ $\det F_m = 0, \det G_m \geq 0,$ *где* $F_m = (f_{mij})_{i,j=\overline{1,n+1}}$, $G_m = (G_{mij})_{i,j=\overline{1,n+1}}$,

$$f_{mij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i,j = \overline{1,n}; \\ c_{1i}, & i = \overline{1,n}, j = n+1; \\ \tilde{E}_{ij} - E_{ij}, & i = n+1, j = \overline{1,n}; \\ \ln \frac{D_i^*}{S_i^*} + \sum_{j=1}^{n} (\tilde{E}_{ij} - E_{ij}) \ln p_j^*, & i,j = n+1; \end{cases} \qquad g_{mij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i,j = \overline{1,n}; \\ c_{1i}, & i = \overline{1,n}, j = n+1; \\ -\delta_{mj}, & i = n+1, j = \overline{1,n}; \\ c_{1m}, & i,j = n+1. \end{cases}$$

Тогда в модели $\sigma_c \in \Sigma_c$ существует вектор равновесных цен.

Получены достаточные условия существования положения равновесия в модели открытого рынка:
Введем обозначения:

$$\alpha(\sigma) = \left[\max_{i=\overline{1,n}}\left(S_i^* \prod_{j=1}^{n}(p_j^*)^{-\tilde{E}_{ij}} \min\left\{c_{1j}^{|\tilde{E}_{ij}|}, c_{2j}^{-|\tilde{E}_{ij}|}\right\}\right)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{c_{2k} - c_{1k}}{2} c_{2k}|\tilde{E}_{ki}^{-1}|\right]^{-1}, \qquad (6)$$

$$\beta(\sigma) = \max_{i=\overline{1,n}}\left(D_i^* \prod_{j=1}^{n}(p_j^*)^{-E_{ij}} \max\left\{c_{2j}^{|E_{ij}|}, c_{1j}^{-|E_{ij}|}\right\}\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{c_{k2} - c_{1k}}{2c_{1k}} |E_{ik}|, \qquad (7)$$

$$\gamma(\sigma) = \max_{i=\overline{1,n}} |S_i(\tilde{c}) + a_i - D_i(\tilde{c})|,$$

где $\tilde{c} = (c_1 + c_2)/2$, $\tilde{E}_{ki}^{-1}$ — элемент матрицы $\tilde{E}^{-1}$, обратной к матрице $\tilde{E}$.

Theorem

Пусть параметры модели $\sigma_o \in \Sigma_o$ удовлетворяют следующему условию:

$$\gamma(\sigma) < \alpha(\sigma) - \beta(\sigma).$$

Тогда в модели σ_o существует вектор равновесных цен $\bar{p} \in \mathbb{R}_+^n$ такой, что $c_{1i} \leq p_i \leq c_{2i}, i = \overline{1,n}$.

Полученные результаты подкреплены численными экспериментами.

Публикации по проекту:

1. Котюков А.М. Итерационный процесс поиска точек совпадения / Материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы», 2021. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2021. С. 171. (РИНЦ)
2. Котюков А.М., Павлова Н.Г., Жуковский С.Е. Положение равновесия в моделях рынка / Труды 14-й Международной конференции "Управление развитием крупномасштабных систем"(MLSD-2021). М.: ИПУ РАН, 2021. С. 646-653. (РИНЦ)
3. Kotyukov A.M., Pavlova N.G. Equilibrium in Market Models / Proceedings of the 14th International Conference "Management of Large-Scale System Development"(MLSD). (Scopus)
4. Arutyunov A.V., Kotyukov A.M., Pavlova N.G. Equilibrium in Market Models with Known Elasticities // ASSA 2021. Vol 24 № 4. C. 130-144. (Scopus)

В рамках выполнения нового проекта

- Планируется получить условия существования положения равновесия для динамической модели рынка.
- Предполагается разработать алгоритм поиска положения равновесия для динамической модели.
- Планируется решить задачу максимизации бюджета на множестве положений равновесия в динамической модели рынка и провести численные эксперименты на реальных статистических данных.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ