Конечномерные динамики и симметрии в нелинейных задачах математической физики и теории управления

Д.ф.м.н., г.н.с., зав. лаб. 6
А.Г. Кушнер

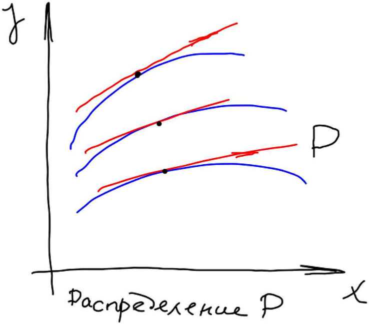
Заявка на проект МНШ
июнь 2022 – май 2024

Докладчик: Светлана Сергеевна Мухина

Участники МНШ

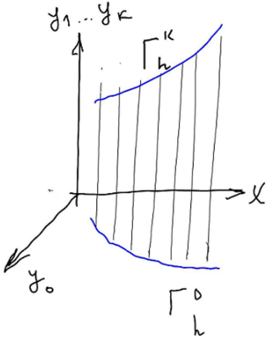
ФИО	Возраст	Должность	Примечание
Мухина С.С.	23	математик	Магистрант ВШЭ
Гаврилов В.Р.	22	техник	Студент МГУ
Вольных М.М.	23	математик	Магистрант МГУ
Олейник В.Н.	20	техник	Студент МГУ
Кушнер А.Г.	64	г.н.с.	Руководитель

$$\boxed{y' = f(x, y)}$$



$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x} + f(x, y)\frac{\partial}{\partial y}, \quad \omega = dy - f(x, y)dx$$

$$\boxed{y^{(k+1)} = f(x, y, y', \dots, y^{(k)})}$$



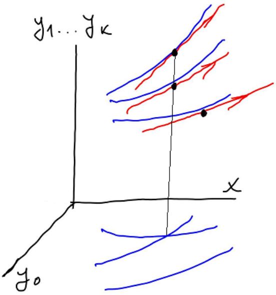
Пространство k-джетов $J^k(\mathbf{R})$: координаты $x, y_0, y_1, \dots, y_k$

$$\theta = [h]_a^k \in J^k(\mathbf{R})$$

$$x(\theta) = a, y_0(\theta) = h(a),$$

$$y_1(\theta) = h'(a), \dots y_k(\theta) = h^{(k)}(a).$$

$$\Gamma_h^k = \{y_0 = h(x), y_1 = h'(x), \dots, y_k = h^{(k)}(x)\}$$



Распределение P в J^k

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_0} + \cdots + f \frac{\partial}{\partial y_k}$$

$$\omega_0 = dy_0 - y_1 dx,$$

$$\omega_1 = dy_1 - y_2 dx, \dots$$

$$\vdots$$

$$\omega_{k-1} = dy_{k-1} - y_k dx$$

$$\omega_k = dy_k - f dx$$

Симметрия ОДУ — преобразование Φ пространства J^k, сохраняющий распределение P: $\Phi_*(P) = P$, т.е. $\Phi_*(\mathcal{D}) = \lambda \mathcal{D}$ или эквивалентно

$$\Phi^*(\omega_i) = \sum_{j=0}^{k} \lambda_{ij} \omega_j \quad \text{или} \quad \Phi^*(\omega_i) \wedge \omega_0 \cdots \wedge \omega_k = 0$$

Инфинитезимальная симметрия — векторное поле X, сдвиги вдоль которого являются симметриями ОДУ:

$$\boxed{L_X(\omega_i) \wedge \omega_0 \cdots \wedge \omega_k = 0}$$

Симметрии бывают двух типов: характеристические и тасующие. Характетристические симметрии оставляют каждую интегральную кривую распределения на месте, а тасующие – перемешивают (тасуют).
Инфинитезимальные тасующие симметрии однозначно определяются некоторой функцией φ на пространстве k-джетов:

$$\boxed{S = \sum_{i=0}^{k} \mathcal{D}^i(\varphi) \frac{\partial}{\partial y_i}.}$$

Динамики эволюционных систем уравнений

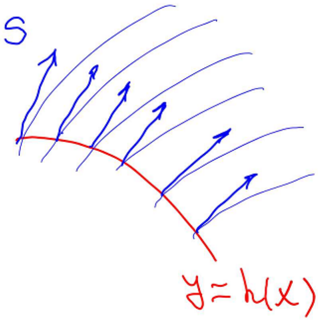
$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \varphi\left(x, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^k \mathbf{u}}{\partial x^k}\right)}$$

Пусть $\varphi(x, \mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_k)$ — производящая вектор-функция тасующих симметрий системы ОДУ

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{f}\left(x, \mathbf{y}, \ldots, \mathbf{y}^{(k)}\right).$$

Эта система ОДУ называется **конечномерной динамикой** системы эволюционных уравнений.

Если известно решение динамики (т.е. системы обыкновенных дифференциальных уравнений), то сдвигая его вдоль траекторий векторного поля тасующей симметрий, мы получим решение эволюционной системы уравнений.


S
y=h(x)

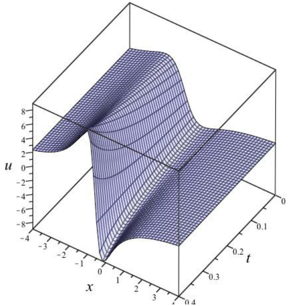


График точного решения уравнения реакции-диффузии с конвективным членом

$$u_t = u_{xx} - (u+1)u_x + \frac{1}{8}u^3$$

План работы

Этап 1 (июнь 2022 – май 2023)

1. Будет предложен численный метод для расчета оптимального управления термодинамическими состояниями реальных газов (Ван дер Ваальса и др.) [Гаврилов]
2. Будет исследована на интегрируемость система эволюционных уравнений, описывающая глубокую фильтрацию в пористой среде. [Мухина]
3. Будет проведен групповой анализ уравнения теплопроводности с учетом излучения по закону Стефана–Больцмана [Олейник]
4. Будут найдены конечномерные динамики и симметрии уравнения нелинейной теплопроводности [Вольных].

Этап 2 (июнь 2023 – май 2024)

1. Будет исследована возможность возникновения аттракторов у эволюционных уравнений.
2. Будет разработана компьютерная программа для расчета конечномерных динамик эволюционных систем уравнений в частных производных.
3. Будут исследованы конечномерные динамики уравнений распространения волн в неоднородной среде.
4. Построенные динамики будут применены для построения точных решений эволюционных уравнений.