Наблюдатели переменных состояния динамических систем, построенные на базе оценки параметров

Бобцов Алексей Алексеевич

Основная идея

Рассмотрим **пример** синтеза наблюдателя для объекта **второго порядка**

$$\dot{x}_1 = a(t)x_1 + x_2,$$
$$\dot{x}_2 = u,$$
$$y = x_1^2 + x_2$$

$$\dot{x} = A(t)x + Bu,$$
$$y = C(x)$$

x_1 и x_2

не измеряются

Основная идея

Рассмотрим **пример** синтеза наблюдателя для объекта **второго порядка**

$$\dot{x}_1 = a(t)x_1 + x_2,$$
$$\dot{x}_2 = u,$$
$$y = x_1^2 + x_2$$

$$\dot{x} = A(t)x + Bu,$$
$$y = C(x)$$

Шаг №1: переписываем модель системы $\dot{q} = A(t)q + Bu$

Наблюдатель

Основная идея

Рассмотрим **пример** синтеза наблюдателя для объекта **второго порядка**

$$\dot{x}_1 = a(t)x_1 + x_2,$$
$$\dot{x}_2 = u,$$
$$y = x_1^2 + x_2$$

$$\dot{x} = A(t)x + Bu,$$
$$y = C(x)$$

Наблюдатель

Шаг №1: переписываем модель системы $\dot{q} = A(t)q + Bu$

Шаг №2: вводим ошибку $e = q - x$

Основная идея

Рассмотрим **пример** синтеза наблюдателя для объекта **второго порядка**

$$\dot{x}_1 = a(t)x_1 + x_2,$$
$$\dot{x}_2 = u,$$
$$y = x_1^2 + x_2$$

$$\dot{x} = A(t)x + Bu,$$
$$y = C(x)$$

Наблюдатель

Шаг №1: переписываем модель системы $\dot{q} = A(t)q + Bu$

Шаг №2: вводим ошибку $e = q - x$

Шаг №3: дифференцируем ошибку

$$\dot{e} = A(t)(q - x) = A(t)e$$

Основная идея (продолжение)

Шаг №4: вспоминаем, что

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi$$

$$e(t) = \Phi(t)e_0$$

$$\Downarrow$$

Наблюдатель

$$x = q - \Phi(t)e_0$$

$\Rightarrow$ вектор неизвестных параметров

$$\hat{x} = q - \Phi(t)\hat{e}_0$$

Основная идея (продолжение)

ИТМО

Шаг №4: вспоминаем, что

$$e(t) = \Phi(t)e_0$$

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi$$

Наблюдатель

$$x = q - \Phi(t)e_0$$ → вектор неизвестных параметров

$$\hat{x} = q - \Phi(t)\hat{e}_0$$

$\hat{e}_0 \to e_0$ ⇒ $\hat{x} \to x$

Шаг №5: идентифицируем вектор неизвестных параметров

$\hat{e}_0$ → ???

Основная идея (продолжение)

Как найти e_0 ???

Вернемся к примеру

$$\dot{x}_1 = a(t)x_1 + x_2,$$

$$\dot{x}_2 = u,$$

$$y = x_1^2 + x_2$$

$$x = q - \Phi(t)e_0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{11}e_{10} + \phi_{12}e_{20} \\ \phi_{21}e_{10} + \phi_{22}e_{20} \end{bmatrix}$$

Основная идея (продолжение)

Как найти e_0 ???

Вернемся к примеру

$$\dot{x}_1 = a(t)x_1 + x_2,$$
$$\dot{x}_2 = u,$$
$$y = x_1^2 + x_2$$

$$x = q - \Phi(t)e_0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{11}e_{10} + \phi_{12}e_{20} \\ \phi_{21}e_{10} + \phi_{22}e_{20} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{y = x_1^2 + x_2 = (q_1 + \phi_{11}e_{10} + \phi_{12}e_{20})^2 + q_2 + \phi_{21}e_{10} + \phi_{22}e_{20}}$$

или классическая линейная регрессия

$$\boxed{\xi = \omega^T\theta}$$

$$\omega = \omega(q_i, \phi_{ij})$$
$$\theta = \theta(e_{i0}, {e_{i0}}^2)$$

Было ли что-то раньше?

Б. И. Прокопов, О построении адаптивных наблюдателей, *Автомат. и телемех.*, 1981, выпуск 5, 95–100

Рассмотрим стационарную систему следующего вида:

$$(1)\qquad \dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+\mathbf{b}u(t),\quad \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0,\quad y(t)=\mathbf{h}^T\mathbf{x}(t).$$

Здесь $\mathbf{x}(t)$ — $(n\times 1)$-вектор состояния системы; $u(t)$ — скалярный вход; $y(t)$ — скалярный выход;

$$(2)\qquad A=\begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0\ldots 0 \\ -a_2 & 0 & 1\ldots 0 \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0\ldots 1 \\ -a_n & 0 & 0\ldots 0 \end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},\quad \mathbf{h}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Постоянная матрица A размера $n\times n$ в первом столбце содержит неизвестные параметры, постоянный $(n\times 1)$-вектор $\mathbf{b}$ неизвестен, а $\mathbf{h}$ имеет размерность $(n\times 1)$.

Было ли что-то раньше?

Б. И. Прокопов, О построении адаптивных наблюдателей, *Автомат. и телемех.*, 1981, выпуск 5, 95–100

Рассмотрим стационарную систему следующего вида:

$$(1) \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad y(t) = \mathbf{h}^T\mathbf{x}(t).$$

Здесь $\mathbf{x}(t)$ – $(n\times 1)$-вектор состояния системы; $u(t)$ – скалярный вход; $y(t)$ – скалярный выход;

$$(2) \qquad A = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Постоянная матрица A размера $n\times n$ в первом столбце содержит неизвестные параметры, постоянный $(n\times 1)$-вектор $\mathbf{b}$ неизвестен, а $\mathbf{h}$ имеет размерность $(n\times 1)$.

Было ли что-то раньше? (продолжение)

(3) $$\dot{\mathbf{x}}(t)=C\mathbf{x}(t)+y(t)E\boldsymbol{\alpha}+u(t)E\boldsymbol{\beta},\quad \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0.$$

Здесь C — известная, постоянная, асимптотически устойчивая $(n\times n)$-матрица с собственными значениями, отличающимися от собственных значений матрицы A; E — единичная матрица размера $(n\times n)$; $\boldsymbol{\alpha}=(c_1-a_1,\ldots,c_n-a_n)^T$, $\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\ldots,b_n]^T$ — векторы неизвестных параметров. Матрица C имеет вид, аналогичный виду A:

$$C=\begin{pmatrix} -c_1 & 1 & 0\ldots 0 \\ -c_2 & 0 & 1\ldots 0 \\ \vdots & & \vdots \\ -c_{n-1} & 0 & 0\ldots 1 \\ -c_n & 0 & 0\ldots 0 \end{pmatrix}.$$

Решение уравнения (3) имеет вид

(4) $$\mathbf{x}(t)=\Phi(t)\mathbf{x}(0)+R(t)\boldsymbol{\alpha}+S(t)\boldsymbol{\beta},$$

$$\dot\Phi(t)=C\Phi(t),\quad \Phi(0)=E;$$
$$\dot R(t)=CR(t)+y(t)E,\quad R(0)=0;$$
$$\dot S(t)=CS(t)+u(t)E,\quad S(0)=0.$$

Промежуточный анализ

Рассмотрим **линейную нестационарную систему**

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

$$y = C(t)x$$

Промежуточный анализ

Рассмотрим **линейную нестационарную систему**

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

$$y = C(t)x$$

Рассмотрим **аналогичную модель**

$$\dot{q} = A(t)q + B(t)u$$

Промежуточный анализ

Рассмотрим **линейную нестационарную систему**

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$
$$y = C(t)x$$

Рассмотрим **аналогичную модель**

$$\dot{q} = A(t)q + B(t)u$$

Рассмотрим **вектор ошибки** и **фундаментальную** матрицу решения ДУ

$$e = q - x \qquad \dot{\Phi} = A(t)\Phi$$

Промежуточный анализ

Рассмотрим **линейную нестационарную систему**

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$
$$y = C(t)x$$

Рассмотрим **аналогичную модель**

$$\dot{q} = A(t)q + B(t)u$$

Рассмотрим **вектор ошибки** и **фундаментальную** матрицу решения ДУ

$$e = q - x \qquad \dot{\Phi} = A(t)\Phi$$

тогда

$$x = q - \Phi(t)e_0 \;\Rightarrow\; \boxed{y = Cx = Cq - C\Phi(t)e_0} \;\Rightarrow\; \boxed{\xi = \omega^T\theta}$$

$$\omega^T = -C\Phi(t)$$
$$\theta = e_0$$
$$\xi = y - Cq$$

Промежуточный анализ и что во всем этом хорошего?

Было

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$
$$y = C(t)x$$

Стало

$$\xi = \omega^T\theta$$

Задача поиска динамической переменной x была заменена задачей поиска вектора неизвестных параметров θ

Промежуточный анализ и что во всем этом хорошего?

Было

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$
$$y = C(t)x$$

Стало

$$\xi = \omega^T \theta$$

Задача поиска динамической переменной x была заменена задачей поиска вектора неизвестных параметров θ

хорошо это

огромные возможности использования современных методов идентификации

или плохо

важно точно оценить θ

Что во всем этом хорошего? Примеры

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad y = C(t)x$$

$$C(t) = C_0 \quad \text{при} \quad t < t_1$$

$$C(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \geq t_1$$

! наблюдаемость на интервале !

$$\xi = \omega^T \theta$$

! возбуждение на интервале !

с это проблемой научились бороться

Что во всем этом хорошего? Примеры

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad y = C(t)x$$

$$C(t) = C_0 \quad \text{при} \quad t < t_1$$

$$C(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \geq t_1$$

! наблюдаемость на интервале !

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad y = C(t)x + \delta$$

Фильтр Калмана и его вариации

НО: наблюдаемость на интервале

$$\xi = \omega^T \theta$$

! возбуждение на интервале !

с это проблемой научились бороться

$$\xi = \omega^T \theta + \sigma$$

и с это проблемой тоже научились бороться

Из уже опубликованного

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}(u,y,t)x(t) + \mathbf{b}(u,y,t),\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$
$$y(t) = \mathbf{C}(u,t)x(t), \tag{1}$$

with $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}$, $u(t) \in \mathbb{R}$ and initial time $t_0 \geq 0$. Following the standard procedure we write the system (1) as an LTV system

$$\dot{x} = A(t)x + b(t),\ x(t_0) = x_0$$
$$y = C(t)x \tag{2}$$

where we defined $A(t) := \mathbf{A}(u(t), y(t), t)$, $b(t) := \mathbf{b}(u(t), y(t), t)$, and $C(t) := \mathbf{C}(u(t), t)$. Note that, as $\mathbf{A}, \mathbf{b}$ are functions of the output y, the matrices A, b *depend on the initial conditions* (t_0, x_0).[3]

The observability Grammian of the system (2) is defined as

$$W(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \Phi^\top(\tau, t_0)C^\top(\tau)C(\tau)\Phi(\tau, t_0)d\tau \tag{3}$$

ELSEVIER

Automatica

Volume 149, March 2023, 110838

Brief paper

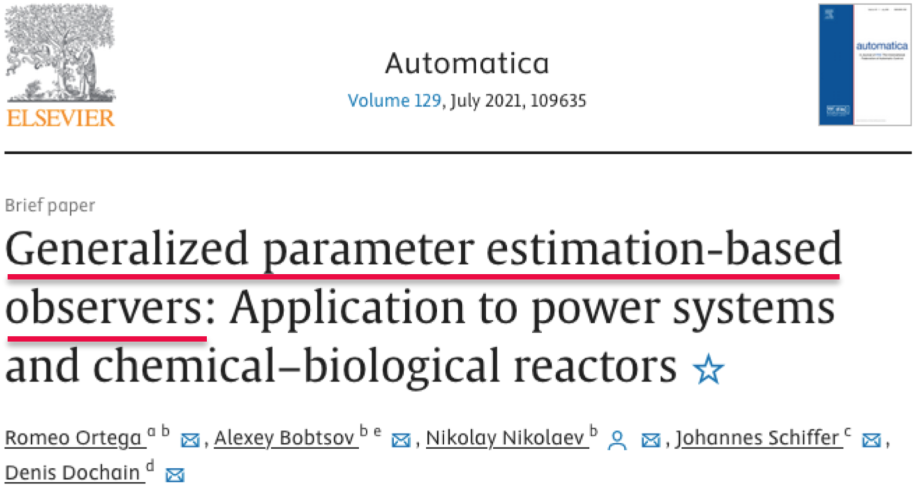
Observability is sufficient for the design of globally exponentially stable state observers for state-affine nonlinear systems ☆

Lei Wang [a], Romeo Ortega [b c], Alexey Bobtsov [c]

Некоторые примеры использования GPEBO (прикладные задачи)

$$\dot{x} = f(x, u)$$
$$y = h(x, u),$$

$$\dot{x} = \Lambda(u, y)x + B(u, y)$$


Automatica
Volume 129, July 2021, 109635

Brief paper

Generalized parameter estimation-based observers: Application to power systems and chemical–biological reactors ☆

Romeo Ortega [a b], Alexey Bobtsov [b e], Nikolay Nikolaev [b], Johannes Schiffer [c], Denis Dochain [d]

GPEBO

Некоторые примеры использования GPEBO (прикладные задачи)

Сеть генераторов

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_i &= \omega_i\\ M_i\dot{\omega}_i &= -D_{mi}\omega_i + \omega_0(P_{mi} - P_{ei})\\ \tau_i\dot{E}_i &= -E_i - (x_{di} - x'_{di})I_{di} + E_{fi} + \nu_i,\\ i \in \bar{n} &:= \{1, ..., n\},\end{aligned}$$

It is fair to say that the assumption of knowledge of δ_i is far from realistic.

Некоторые примеры использования GPEBO (прикладные задачи)

Химико-биологические реакторы

$$\dot{y} = -uy + K_y r(y, x) + \chi_y$$
$$\dot{x} = -ux + K_x r(y, x) + \chi_x$$

- известные или измеряемые сигналы

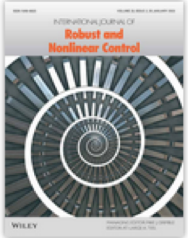
Некоторые примеры использования GPEBO (теоретические задачи)

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A(t)x(t)+\kappa C^{\top}(t)x(t)+B(t)u(t),\ \ x(0)=x_0\in\mathbb{R}^n,\ \ t\geq 0,\\ y(t)=C^{\top}(\phi(t))x(\phi(t)),\end{cases}$$

вектор неизвестных постоянных параметров

переменное запаздывание

INTERNATIONAL JOURNAL OF
Robust and Nonlinear Control



Volume 33, Issue 2
25 January 2023
Pages 1203-1213

RESEARCH ARTICLE

Adaptive state observation of linear time-varying systems with delayed measurements and unknown parameters

Valentin Bezzubov, Alexey Bobtsov, Denis Efimov, Romeo Ortega, Nikolay Nikolaev

Некоторые примеры использования GPEBO (теоретические задачи)

$$\dot{x}(t) = [A + \theta(t)\mathbf{e}_1^\top]x(t) + B(t)u(t) + \mathbf{e}_n\delta(t),$$
$$y(t) = \mathbf{e}_1^\top x(t),$$

векторы неизвестных переменных параметров

возмущение

$$\dot{w}(t) = S(\rho)w(t)$$
$$\delta(t) = h_\delta^\top w(t),$$

ELSEVIER

Automatica
Volume 147, January 2023, 110677

An adaptive observer for uncertain linear time-varying systems with unknown additive perturbations ☆

Anton Pyrkin [a b], Alexey Bobtsov [b], Romeo Ortega [c b], Alberto Isidori [d]

Некоторые перспективы (нелинейные операторы)

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$
$$y = C(t)x + \delta,$$

δ – неизвестное возмущение

GPEBO

$$\xi = \omega^T\theta + \sigma$$

Некоторые перспективы (нелинейные операторы)

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$
$$y = C(t)x + \delta,$$

δ – неизвестное возмущение

GPEBO

$$\xi = \omega^T\theta + \sigma$$

DREM

$$m_i = \varphi_i\theta_i + \bar{\delta}_i$$

скалярное уравнение

Использование нелинейных операторов

Допущение. Неизвестная функция $\bar{\delta}_i$ такая, что: $|\bar{\delta}_i| < 1$

Некоторые перспективы (нелинейные операторы)

$$m_i = \varphi_i \theta_i + \bar{\delta}_i$$

$$\Downarrow$$

$$m_i - \varphi_i \theta_i = \bar{\delta}_i$$

$$\Downarrow$$

$$(m_i - \varphi_i \theta_i)^q = \left(\delta_{1_i}\right)^q$$

$$\Downarrow$$

$$\varsigma_i = \boldsymbol{\psi}_i^T \boldsymbol{\Theta} + v_i,$$

$$\varsigma_i = (m_i)^q,$$

$$\psi_i^T = [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \ldots \quad \psi_q],$$

$$\boldsymbol{\Theta} = col\left(\theta_i \quad \theta_i^2 \quad \theta_i^3 \ldots \theta_i^q\right),$$

$v_i = \left(\bar{\delta}_i\right)^q$ – новое возмущение

Некоторые перспективы (дескрипторные системы)

Дескрипторные системы

$$E\dot{x} = A(y)x + B(u) + \theta(t)y + D(t)w(t),$$

$$\dot{\theta} = G(t)\theta,$$

$$y = C(x),$$

$A(y), B(u), D(t), G(t)$ - известны

$w(t)$ - возмущающее воздействие