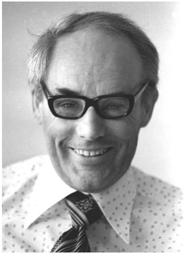
Оптимизация и планирование траекторий управляемых объектов

Галяев Андрей Алексеевич
Зав. лаб. 38, ИПУ РАН, Москва, Россия

Всероссийское совещание по проблемам управления
Июнь, 17, 2024

Лаб. 38 «Управление по неполным данным»



Петровский А.М.

Кузнецов Н.А.

Васильев С.Н.

Маслов Е.П.

Рубинович Е.Я.

Галяев А.А.

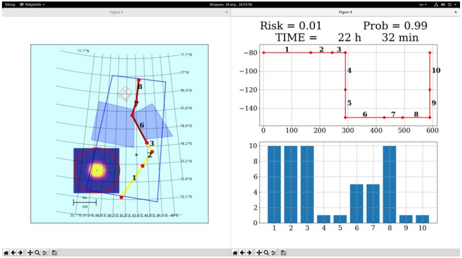
Лаб. 38 «Управление по неполным данным»

1. PP/TP задачи в условиях противодействия и неполноты информации.
2. Задачи траекторного управления наблюдениями.

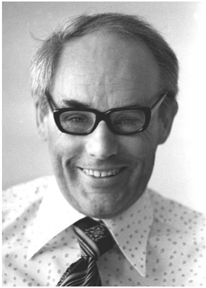
Теоретические результаты были использованы при решении задач управления управляемыми подвижными объектами морской и ракетной техники, а именно: под руководством Петровского А.М., Маслова Е.П. и далее Галяева А.А. в лаборатории был выполнен ряд НИР и ОКР в сотрудничестве с предприятиями МО: «Разлив», «Туман», «Жизнь», «Энтропия», «Эластик», «Ласта», «Физик», «Альманах», «Нимфа», «Батарея», «Странник», «Сложность», «Петарда», «Перехват» и многие другие.

Прикладные Задачи:

1. Разработка бортовых алгоритмов.
2. Разработка алгоритмов оперативно-советующих систем.
3. Разработка алгоритмов систем принятия решений.
4. Разработка алгоритмов тактических симуляторов.



Лаб. 38 «Управление по неполным данным»



Петровский А.М.(1925-1993)

В конце 1950-х годов А.М. Петровский начал исследования и разработку способов повышения эффективности управляемых снарядов. Исследования охватывали как разработку алгоритмов наведения, так и разработку моделей движения маневрирующих объектов. Результаты этих исследований составили сначала его кандидатскую, а затем и докторскую диссертацию, защищённую в ИАТе в 1966 году. На практике результаты проверялись на реальных объектах, в том числе и Вьетнаме для защиты моста через р. Меконг.

В конце 1960-х годов ведутся работы по задачам противовоздушной обороны на базе аналогового вычислительного комплекса Кунцевского механического завода. Работа продолжалась несколько лет и затем трансформировалась в теоретические разработки на тему «управление подвижными объектами в условиях неполной информации».

В 60-70-х годах проводились исследования, связанные с оптимальным управлением наблюдениями в задачах наведения снарядов на маневрирующие цели.

Дальнейшим развитием стали исследования, связанные с формализацией и решением задач противодействия подвижным объектам в условиях искусственно организованной неполноты информации.

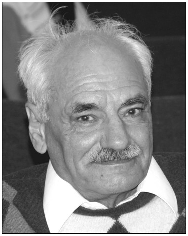
Лаб. 38 «Управление по неполным данным»

Маслов Е.П.(1936-2019)

Рубинович Е.Я.

Введен новый класс задач теории конфликтно управляемых процессов.
Предложено моделировать противодействие подвижных объектов дифференциально-игровыми и оптимизационными задачами преследования-уклонения групповой цели и дифференциально-игровыми и оптимизационными задачами поиска активно противодействующих подвижных объектов (поиск в условиях конфликта).
В ходе исследований формализованы для целей управления понятия ложной и групповой цели, впервые сформулированы, введены в научный оборот и решены дифференциальные игры совместного и поочередного преследования с групповой целью (В.К. Ольшанский, Е.Я. Рубинович, Е.П. Маслов).
Показано, что в дифференциальных играх поочередного преследования вектор управлений преследователя имеет специфическую структуру: он содержит собственно закон управления траекторией подвижного объекта и правило выбора очерёдности встреч с целями. Была предложена математическая формализация схемы выбора и решены дифференциальные игры с программным (Е.Я. Рубинович) и позиционным (Е.П. Маслов, Е.Я. Рубинович) выбором очерёдности.
Проведено сравнение ряда законов преследования при полностью и частично известном фазовом векторе групповой цели, найдены стратегии поиска в условиях конфликта, реализующие седловую точку.

Лаб. 38 «Управление по неполным данным»

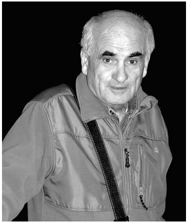


Червоненкис А.Я. (1938-2014)

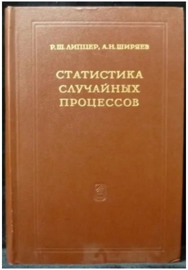
Вапник В.Н.

Теория Вапника –Червоненкиса (также известная как теория VC) была разработана в 1960-1990 годах В.Н. Вапником и А.Я. Червоненкисом. Теория представляет собой форму вычислительной теории обучения, которая объясняет процесс обучения со статистической точки зрения. Теоретические исследования основывались на фундаментальном результате—условиях равномерной сходимости частот к вероятностям по классу событий. Аналогичные условия были получены для равномерной сходимости средних к математическим ожиданиям по семейству случайных величин. Алгоритмы распознавания образов связаны с методом обобщённого портрета, разработанного В.Н. Вапником и А.Я. Червоненкисом в 1964 - 1974 гг.
Под руководством А.Я. Червоненкиса были построены модели крупных рудных месторождений по данным геологической разведки. В 1980—1985 гг. совместно с Институтом геологии рудных месторождений АН СССР была создана система для оптимального автоматического оконтуривания руд по данным эксплуатационной разведки и для построения сортовых планов в ходе отработки месторождений. Эта работа получила Государственную премию СССР за 1987 год.
Условия равномерной сходимости позволили обосновать сходимость методов обучения, основанных на минимизации эмпирического риска и получить оценки скорости сходимости. К таким методам обучения относятся, том числе, методы построения кусочно-линейных решающих правил, минимизирующих число ошибок на материале обучения. Поскольку одним из формальных средств, реализующих кусочно-линейные правила, являются нейронные сети, то эта теория используется во всём мире для анализа работы нейронных сетей.
Методы решения получили название методов структурной минимизации риска. Сегодня они широко применяются в задачах распознавания образов, восстановления регрессионных зависимостей и при решении обратных задач физики, статистики и других научных дисциплин.

Лаб. 38 «Управление по неполным данным»



Липцер Р.Ш.
(1936-2019)



В 1968 г. Р.Ш. Липцер оказался в только что созданной лаборатории А.М. Петровского, куда из расформированной (в связи со смертью заведующего) лаборатории Фельдбаума перешла группа сотрудников во главе с Е.П. Масловым. В том же году защитил кандидатскую диссертацию по физико-математическим наукам, а в 1978 г. — докторскую, но уже по техническим (так решил В.А. Трапезников: в Институте тогда ещё не было Совета, который бы имел право присуждать степень д.ф.-м.н.).

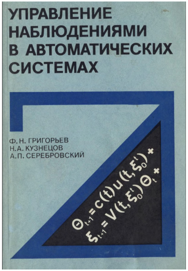
Область научных интересов: теория линейной и нелинейной фильтрации, динамика стохастических систем, мартингалы — как аппарат приближённого описания вероятностных процессов, диффузионные аппроксимации систем массового обслуживания, теория больших уклонений для полумартингалов.

За свою жизнь написал и опубликовал, 10 монографий и более 100 статей (в ведущих научных журналах мира).

Р.Ш. Липцер внес несколько важных вкладов в теорию мартингалов и в их приложения в инженерном деле и статистике: установление свойств условно гауссовых процессов, которые играют важную роль в принципе разделения в стохастическом управлении. Его монография «Статистика случайных процессов: нелинейная фильтрация и смежные вопросы», написанная совместно с А.Н. Ширяевым в 1974 году, стала всемирно известным справочником среди ученых, работающих в области стохастического анализа и смежных областях.

Лаб. 38 «Управление по неполным данным»

Кузнецов Н.А.
Академик РАН



Придя в группу А.М. Петровского в 1962 г., Н.А. Кузнецов в 1966 г. защищает кандидатскую диссертацию «Синтез алгоритмов управления по критерию качества, зависящий от состояния управляемого объекта». Вскоре он корректирует направление исследований и начинает заниматься задачами оптимальной фильтрации и их приложениями к различным специальным объектам. Затем его главной научной темой становятся системы управления с переменным критерием качества. Семь лет работы приносят результат: в 1973 г. защищена докторская диссертация. В 1985 г., за работы по созданию системы автоматизации транспортных судов Морфлота СССР Н.А. Кузнецову присуждена Государственная премия СССР.

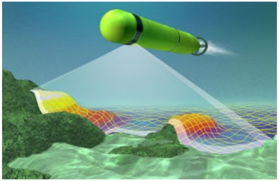
В 1986 г. выходит книга в соавторстве с Ф.Н. Григорьевым и А.П. Серебровским «Управление наблюдениями в автоматических системах», в которой дается систематическое изложение важнейших результатов теории оценивания компонентов условно-гауссовских случайных последовательностей и на их основе решаются различные задачи автоматического управления по неполным данным для систем с управляемыми наблюдениями. Рассматриваются задачи выбора управления переключением каналов наблюдения и методы их решения, задачи совместной оптимизации управления динамической системой и процессом наблюдения за ее координатами, обосновывается принцип разделения.

Кузнецов Н.А., Липцер Р.Ш., Серебровский А.П. Обобщенное управление наблюдениями в задачах стохастической оптимизации. - VIII Всесоюзное совещание по проблемам управления. Таллин. 1980. Тезисы докладов. М.: ПИК ВИНИТИ.

РР/ТР задачи в условиях противодействия и неполноты информации

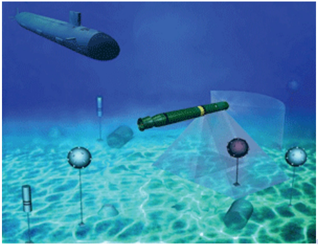
Задачи:

1. Задачи наведения и перехвата, в том числе групповых целей.
2. Задачи уклонения от обнаружения поисковыми системами, обратная задача поиска.
3. Задачи защиты заданной области.



Критерии:

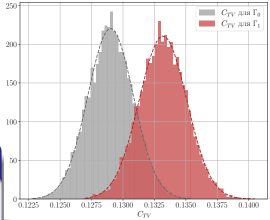
1. Ресурсные критерии.
2. Вероятностные критерии.
3. Информационные критерии.
4. Временной критерий.
5. Точностные критерии.
6. Смешанные критерии.
7. Многокритериальная оптимизация.



Задача индикации появления полезного сигнала в сильно зашумленной смеси

Задача обнаружения полезного сигнала $s(n)$ традиционно сводится к задаче различения двух гипотез

$$\begin{cases} \Gamma_0 : x(n) = w(n), \\ \Gamma_1 : x(n) = s(n) + w(n), \; n = 1, \ldots, N. \end{cases}$$



Лемма 1

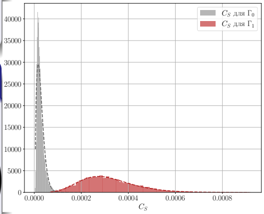
Нормированное упорядоченное распределение спектра имеет вид

$$n_k(N) = -\frac{1}{N \cdot K_N} \ln \frac{k}{N+1}, \quad \text{где } K_N = -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \ln \frac{k}{N+1}.$$

Определение 1

Спектральной сложностью относительно спектрального распределения (1) назовем величину

$$C_S(p) = -\frac{1}{4 \log_2 N} \left(\sum_{k=1}^{N} p_k \log_2 p_k \right) \left(\sum_{k=1}^{N} \left| p_k + \frac{1}{N \cdot K_N} \ln \frac{k}{N+1} \right| \right)$$



А.А. Галяев, В.Г. Бабиков, П.В. Лысенко, Л.М. Берлин Новая спектральная мера сложности и ее возможности по обнаружению сигналов в шуме // Доклады академии наук. 2024. (в печати)

Трёхмерная космодинамическая задача перехвата одного объекта в космосе

Сквозная оптимизации траектории межпланетного перелёта космического аппарата с единым функционалом.

Сложная динамика, громоздкие постановки, фазирование.

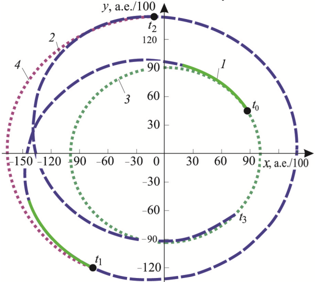
Управление совокупностью динамических систем.

$$\begin{cases} \dot{x}_i = u_i, \quad \dot{y}_i = v_i, \quad \dot{z}_i = w_i, \quad \dot{m}_i = -P_i/C_i, \\ \dot{u}_i = -g_{xi} - \sum \mu_B \dfrac{x_{Bi}}{r_{Bi}^3} + \dfrac{P_i}{m_i} \cos\xi_i \cos\eta_i, \\ \dot{v}_i = -g_{yi} - \sum \mu_B \dfrac{y_{Bi}}{r_{Bi}^3} + \dfrac{P_i}{m_i} \sin\xi_i \cos\eta_i, \\ \dot{w}_i = -g_{zi} - \sum \mu_B \dfrac{z_{Bi}}{r_{Bi}^3} + \dfrac{P_i}{m_i} \sin\eta_i. \end{cases}$$

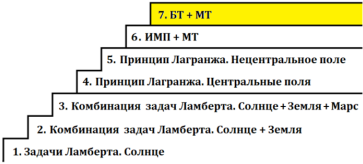
Samokhin A., Samokhina M., Grigoriev I., Zapletin M. Base on Phobos – Much Safer Exploration of Mars without the Need for Humans on the Surface of the Planet // Acta Astronautica. 2023. vol. 204. P. 920-925.

Экспедиция к Фобосу.

9-точечная краевая задача многих тел 70-го порядка.



Лестница задач.



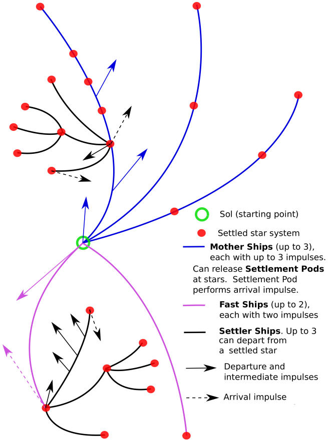
Перехват множества целей, движущихся по заданным траекториям в космосе, группой управляемых объектов с оптимизацией по единому критерию

Обход движущихся целей — NP-трудная динамическая задача коммивояжёра (DTSP).

Разбиение на подзадачи.

Склейка различных сортов решений.

- Элементарная операция: перехват одним перехватчиком одной цели.
- Перехват множества целей одним управляемым подвижным объектом.
- Перехват множества целей группой управляемых подвижных объектов.
- Решение задачи сквозной оптимизации с единым критерием оптимизации всей миссии, без разбивания её на подзадачи с разными критериями.

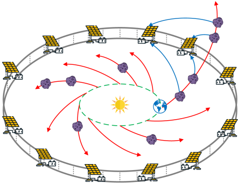


GTOC 10 scheme

Результат GTOC 10 (Global Trajectory Optimization Competition): построено дерево перехвата 968 объектов.

Samokhina M., Samokhin A. About the 10th edition of GTOC – Settlers of the Galaxy // AIP Conf. Proc., 2021, vol. 2318, No 1, 6 p.

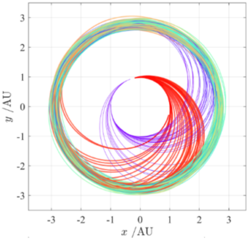
Задачи обслуживания: ремонт, дозаправка, увод с орбиты, установка оборудования, взятие проб, добыча ресурсов.



GTOC 11, 12 schemes

Функционалы:

$J = m_f|\vec{U}_{rel}\vec{v}_{ast}|$ – сила удара по цели;
$J = N_T$ – количество перехваченных целей;
$J = N_i$ – количество перехватчиков, задействованных для выполнения миссии;
$J = \sum \Delta_i$ или M_f – сумма импульсов, затраты топлива;
$J = \sum M_i$ – добытая масса;
$J = T$ – задача быстродействия.



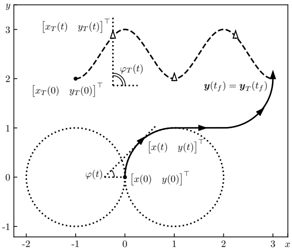
Метод решения подзадач:

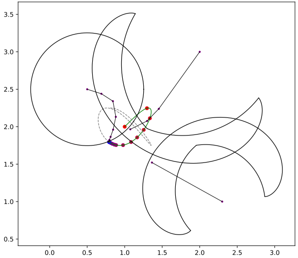
Ламберт $\to$ Лагранж $\to$ идеально рег. тяга $\to$ конечная тяга

ИПУ РАН представлял Россию в международных соревнованиях GTOC 12 (2023). Результат: разработана миссия по добыче ресурсов с 74 астероидов из 60 тыс. заданных 12-ю аппаратами, каждый астероид посещён дважды.

Samokhin A.S., Samokhina M.A., Galyaev A.A. About the GTOC XII problem // 14th Moscow Solar System Symposium, IKI RAS, 2023, p. 284.

Перехват цели, движущейся вдоль известной траектории





- Решена задача наискорейшего перехвата движущейся цели машиной Дубинса (угол перехвата не важен);
- Решена задача наискорейшего бокового перехвата движущейся цели машиной Дубинса;
- Решена задача наискорейшего перехвата частицей в вязкой среде.

Иной взгляд на такие задачи состоит в том, чтобы считать перехватчика препятствием, которое движется *неизвестным образом*, при этом траектория цели — это опорная траектория для объекта управления. Задача состоит в том, чтобы спрогнозировать возможное столкновение при *неполноте данных* о движении препятствия.

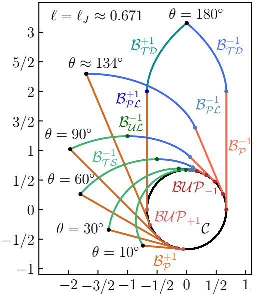
Бузиков М.Э., Галяев А.А. Перехват подвижной цели машиной Дубинса за кратчайшее время // *АиТ*. 2021. № 5. С. 3-19.

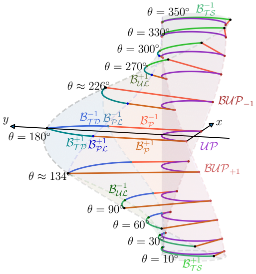
Buzikov M.E., Galyaev A.A. Minimum-time lateral interception of a moving target by a Dubins car // *Automatica*. 2022. V. 135. Art. No. 109968.

Buzikov M.E., Mayer A.M. Minimum-time interception of a moving target by a material point in a viscous medium // *Automatica*. 2024. Vol. 167. Art. No. 111795.

Гарантированные управления в игре двух автомобилей

Две машины Дубинса имеют одинаковые скорости и маневренности. Одна пытается обеспечить столкновение, вторая — избежать. *Неполнота данных* заключается в незнании стратегии оппонента в игре. Здесь барьером $\mathcal{B}$ — это поверхность, которая отделяет область гарантированного избежания столкновения от остального пространства.



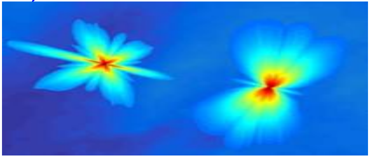


- Получен специальный вид представления частей барьера через вектор состояния $\boldsymbol{z}$
$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{z} \in \mathcal{F}^{\ell}_{\mathcal{P}} : \ell = \ell_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{z})\} \subset \mathcal{B}.$$
- Получена явная аналитическая форма индикатора вхождения в область избежания столкновения.
- Предложена нечувствительная к плавающей точке схема использования управлений на барьере, гарантирующая избежание столкновений.

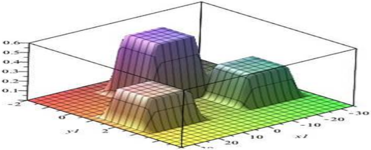
Buzikov M., Galyaev A. The game of two identical cars: An analytical description of the barrier // *J Optim Th Appl.* 2023. V. 198. P. 998–1018.

Построение поля рисков (угроз)

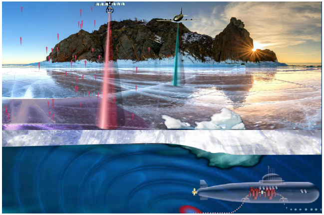
Подход к построению поля угроз состоит в методах и алгоритмах обнаружения УО по сигналам **первичных и/или вторичных физических полей**. По известным данным и по излучаемым объектом сигналам полей создается **карта распределения уровней рисков (угроз)**.



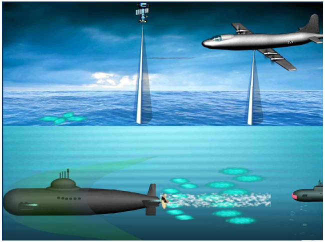
Карта угроз (СГАС на разных глубинах)



Нормированный риск



Обнаружение контраста



Обнаружение аномалий

Иерархия задач, алгоритмов и формирование критерия

1. **Наблюдение и измерение физического сигнала** **Непрерывный → дискретный.**
2. **Исследование статистических свойств** **Дискретный → непрерывный.**
   Вероятность необнаружения на каждом цикле наблюдения
   $$\mathrm{P}(Q \le h|H_1) = \Phi\left(\frac{\sqrt{\mathrm{D}[Q|\mathrm{H}_0]}}{\sqrt{\mathrm{D}[Q|\mathrm{H}_1]}}\Phi^{-1}(1-\alpha) - \frac{\mathrm{E}[Q|\mathrm{H}_1]-\mathrm{E}[Q|\mathrm{H}_0]}{\sqrt{\mathrm{D}[Q|\mathrm{H}_1]}}\right),$$
   где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp(-t^2/2)dt.$
3. **Применение решающего правила** **Непрерывный → дискретный.**
   В отсутствие связи между гидрофонами $K_\xi(f) = \sigma_\xi^2 I,\ R_s(f) = I$ (I единичная матрица),
   $$\mathrm{P}(Q \le h|\mathrm{H}_1) = \Phi\left(\frac{\sigma_\xi^2\Phi^{-1}(1-\alpha)}{\sigma_s^2+\sigma_\xi^2} - \frac{\sigma_s^2\sqrt{N_\mathrm{F}N_\mathrm{H}}}{(\sigma_s^2+\sigma_\xi^2)\sqrt{2}}\right).$$
   Малое отношение сигнал/помеха
   $$\mathrm{P}_{\mathrm{nd}\ i} = 1-\alpha-\Phi'\left(\Phi^{-1}(1-\alpha)\right)\cdot\left(\Phi^{-1}(1-\alpha)+\frac{\sqrt{N_\mathrm{F}N_\mathrm{H}}}{\sqrt{2}}\right)\frac{\sigma_s^2(i)}{\sigma_\xi^2(i)}.$$
4. **Формирование критерия** **Дискретный → непрерывный.**
   Полный риск
   $$R = \sum_{i=1}^{N} R_i,\quad R_i = -\ln \mathrm{P}_{\mathrm{nd}\ i} \quad \text{риск на } i\text{-м цикле.}$$
   Функционал риска в задаче уклонения
   $$R = \int_0^T \frac{\sigma_s^2(\cdot,t)}{\sigma_\xi^2(\cdot,t)}dt.$$
5. **PP/TP алгоритм** **Непрерывный → дискретный.**

Вероятностный критерий обнаружения УО

Основным критерием в задачах уклонения УО от обнаружения является вероятность обнаружения,т.е. вероятность обнаружения хотя бы один раз и хотя бы одним наблюдателем за время движения подвижного объекта по маршруту. Оптимизация сводится к нахождению траектории и закона изменения скорости объекта, доставляющих **минимум** указанному критерию, а именно

$$P_{\text{обн}} = 1 - (1 - P_{\text{стац}})(1 - P_{\text{ман}}),$$

где $P_{\text{обн}}$, $P_{\text{стац}}$, $P_{\text{ман}}$ – вероятности обнаружения УО всей системой средств, стационарными и маневренными средствами, соответственно.

Вероятность необнаружения УО отдельным сенсором по результатам обработки последовательности наблюдений за все время его движения

$$P_{\text{необн}}(v, D_i) = \exp\left\{-\frac{1}{t_0}\int_0^T \left[\eta + q\frac{\sigma_s^2(v_0, D_0)D_0^k A(f)}{\sigma_\xi^2(t)v_0^m}\frac{v^m}{D_i^k}\right] dt\right\}.$$

Вероятность необнаружения УО маневренными силами и средствами. Известны:

– расположение и характеристики района, в котором происходит противодействие сторон,

– состав сил и средств обнаружения и тактика их применения.

Основная характеристика модели: **интенсивность поиска** $\gamma(t, \mathbf{r}, v)$ – среднее число обнаружений УО в единицу времени.

$$P_{\text{обн}} = 1 - \exp\left(-\int_0^T \gamma(t, \mathbf{r}, v) dt\right).$$

Интеграл в круглых скобках – **потенциал поиска**, его значение определяется ТТХ средств обнаружения. Предположение: все средства обнаружения действуют независимо.

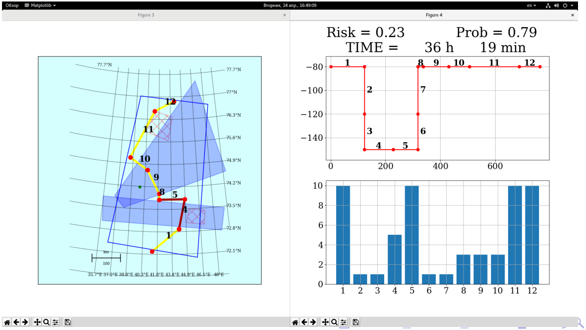
Энергетический критерий обнаружения

Функционал риска

$$G=\int_0^T\left[\sum_{i=1}^{N}Q_i\frac{v^m}{D_i^K}+\chi_б\frac{2n_0\theta_0D_б(v)}{S}v+\chi_{пн}\frac{2D_{пн}(v,u)}{S}v_{отн}\right]dt.$$

где Q_i – некоторая константа, v – скорость движения подвижного объекта, D_i – текущее расстояние до УО, $D_б$ – дальность обнаружения объекта пассивным буем, зависящая от скорости движения УО; n_0 – число буев в подрайоне, через который проходит объект; θ_0 - доля одновременно контролируемых буев; S – площадь района поиска, u – скорость патрулирования подвижного наблюдателя; $v_{отн}$ – средняя скорость движения УО относительно наблюдателя, $D_{пн}(v,u)$ – дальность обнаружения УО подвижным наблюдателем.

Галяев А.А., Маслов Е.П., Яхно В.П., Абрамянц Т.Г. Уклонение подвижного объекта от обнаружения системой наблюдателей: сенсор - маневренное средство // Автоматика и Телемеханика. **2017**. *№8*. 113–126.



Обобщение PP/TP задачи

- **Функционал риска на одном звене**

$$G_i = \int_0^{T_i} \left[\Phi(x,y,v_i,H_i) + \sum_{k=1}^{N_{\text{пн}}} \mathbb{E}(\chi(M_k))(x,y)\gamma_{\text{пн}k}(x,y,v_i,H_i) \right] dt.$$

где G_i – риск на одном звене, l_i – длина прямолинейного участка траектории (звена), N_l – количество звеньев, M_k – район действия подвижного поискового средства, v – модуль скорости движения УО, H – глубина УО.

- **Управления**: координаты звеньев, $v \in [v_1, ..., v_{N_v}]$, $H \in [H_1, ..., H_{N_H}]$.

- **Функционал риска**

$$G = \sum_i^{N_l} G_i \to \min_{v,H,\text{звеньям}}.$$

- **Дополнительный функционал**

$$\min N_l, \quad N_l = 1, ..., N.$$

- **Дополнительное ограничение**

$$|G(N_l) - G(N)| \leq \delta.$$

- **Ограничения 1 типа**

$$\sum_i^{N-l} \frac{l_i}{v_i} \in [T - \Delta T, T + \Delta T].$$

- **Ограничения 2 типа**

$$\sum_{i=1}^{N_l} \int_0^{T_i} [\Phi(x,y,v_i,H_i)]\, dt \leq C.$$

- **Ограничения 3 типа**

$$\sum_{i=1}^{N_l} \int_0^{T_i} [\mathbb{E}(\chi(M_k))(x,y)\gamma_{\text{пн}k}(x,y,v_i,H_i)]\, dt \leq C_k.$$

Развитие постановок задачи уклонения

Zabarankin M., Uryasev S., Pardalos P. Optimal Risk Path Algorithms Cooperative Control and Optimization. *Eds. R. Murphey, P. Pardalos. Dordrecht: Kluwer Acad* **2002**, *V. 66*, 271–303.

Задача 1

Нужно найти маршрут l из т. A в т. B, который минимизирует функционал

$$R(l) = \int_l \frac{dl}{r^2},$$

где r дистанция между сенсором и УО.

Дополнительная задача

v скорость УО постоянна, $dl = vdt$. Время T движения по маршруту из т. A в т. B фиксировано.

Задача 2

Нужно найти траекторию $(r^*(t), \varphi^*(t))$, которая минимизирует функционал

$$R(r(\cdot), \varphi(\cdot)) = \int_0^T \frac{v^2}{r^2} dt,$$

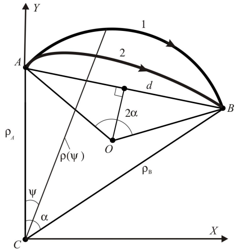
где v – скорость УО, r – дистанция. Граничные условия

$$r(0) = r_A,\ r(T) = r_B,\ \varphi(0) = \varphi_A,\ \varphi(T) = \varphi_B.$$

Время T движения по траектории из т. A в т. B задано.

Galyaev, A.A., Maslov, E.P., Rubinovich, E.Y. On a motion control problem for an object in a conflict environment **2009** Journal of Computer and Systems Sciences International, *48 (3)*, pp. 458-464.

Оптимальные траектории



Центр окружности лежит на срединном перпендикуляре к AB ; положение центра совпадает с вершиной равнобедренного треугольника; величина угла при этой вершине – 2α. Положение сенсора – т. C; центр окружности – т.O.

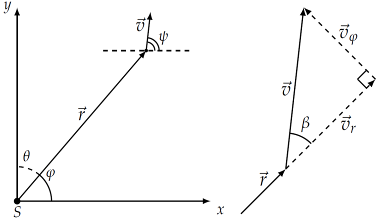
Галяев А.А., Лысенко П.В., Яхно В.П. Уклонение подвижного объекта от одиночного обнаружителя на заданной скорости // Проблемы управления. **2020**. № 1. С. 83-91.

Galyaev A.A., Dobrovidov A.V., Lysenko P.V., Shaikin M.E., Yakhno V.P. Path Planning in Threat Environment for UUV with Non-Uniform Radiation Pattern. Sensors **2020**, 20, 2076.

Мгновенный уровень сигнала

$$S = \left(\frac{v}{r}\right)^{\mu} G(\varphi)\gamma(r,\varphi)g(\beta),$$

$G(\varphi)$ – диаграмма направленности антенны, $g(\beta)$ – индикатриса излучения, r – дистанция, v – скорость, $\gamma(r,\varphi)$ – затухание.



TP задача для УО с неоднородной индикатрисой

Задача 3

Нужно найти траекторию $(\rho^*(t), \varphi^*(t))$, *минимизирующую функционал*

$$R(\rho(\cdot), \varphi(\cdot)) = \int_0^T S(\rho, \dot\rho, \varphi, \dot\varphi)dt = \int_0^T \left(\dot\rho^2 + \dot\varphi^2\right)^{\mu/2} g\left(\arctan\frac{\dot\varphi}{\dot\rho}\right) dt \to \min_{\rho(\cdot),\varphi(\cdot)} \qquad (1)$$

с граничными условиями $\rho(0) = \rho_A,\ \rho(T) = \rho_B,\ \varphi(0) = \varphi_A,\ \varphi(T) = \varphi_B.$

Теорема 1

Пусть $0 < g_1 < g(\beta) < g_2$ *для всех* $\beta \in [0, 2\pi]$ *является дважды дифференцируемой функцией от* β, *где* g_1, g_2 *- постоянные, и* $\ddot\rho(t)$, $\ddot\varphi(t)$ *существуют и непрерывны. Тогда оптимальная траектория удовлетворяет системе уравнений*

$$\begin{cases} \dot\rho = const, \\ \dot\varphi = const. \end{cases} \qquad (2)$$

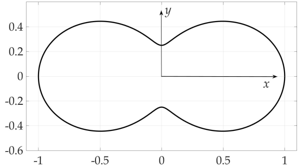
$$\det \mathbf{H} = \left(\dot\varphi^2 + \dot\rho^2\right)^{\mu-2} (\mu - 1)\left(g^2(\beta)\mu^2 + g(\beta)g''(\beta)\mu - g'^2(\beta)(\mu - 1)\right). \qquad (3)$$

Теорема 2

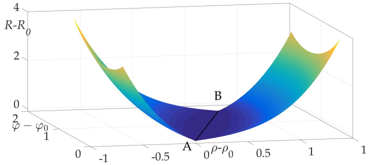
Пусть выполнены условия теоремы 1, $g(\beta)$ *– трижды дифференцируемая функция* β *и* $\det \mathbf{H} > 0$ *для всех* β. *Тогда траектория, удовлетворяющая (2), дает сильный минимум функционалу (1).*

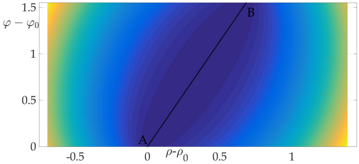
Индикатриса излучения

$$g(\beta) = K_1 + K_2 \cos^2(\beta).$$



$g(\beta)$ при $K_1 = 0.25$, $K_2 = 0.75$





Условие нормировки $K_1 + K_2 = 1$.
Матрица Гессе

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2K_1 & 0 \\ 0 & 2(K_1 + K_2) \end{pmatrix}.$$

Гессиан $\det \mathbf{H} = 4K_1(K_1 + K_2) = 4K_1$.

Следствие 1

На оптимальной траектории значение риска равно

$$R^* = \frac{1}{T}\left(\ln^2 \frac{r_B}{r_A} + K_1^2 (\varphi_B - \varphi_A)^2\right)$$

и зависит только от граничных условий.

Galyaev A.A., Lysenko P.V., Yakhno V.P. Trajectory Optimality Conditions for Moving Object with Nonuniform Radiation Pattern // Doklady Mathematics. **2020**. Vol. 102. No. 1. pp. 342-345.

Многозвенные траектории

$$R_{ACB}(\beta_1,\beta_2,T_1,T_2)=\frac{L_1^{\mu}(\beta_1)}{T_1^{\mu-1}}g(\beta_1)+\frac{L_1^{\mu}(\beta_2)}{T_2^{\mu-1}}g(\beta_2). \quad (4)$$

Задача 4

Нужно найти четверку $(\beta_1^*,\beta_2^*,T_1^*,T_2^*)$*, что дает минимум*

$$(\beta_1^*,\beta_2^*,T_1^*,T_2^*)=\arg\min_{\beta_1,\beta_2,\ T_1,T_2\geq 0,\ T_1+T_2=T} R_{ACB}(\beta_1,\beta_2,T_1,T_2). \quad (5)$$

Задача 5

Нужно найти четверку $(\beta_1^*,\beta_2^*,T_1^*,T_2^*)$*, что дает последовательный минимум* $R_{ACB}(\beta_1,\beta_2,T_1,T_2)$*, такой что*

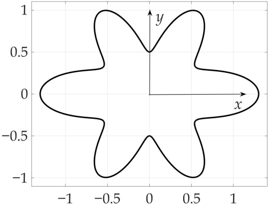
$$R_{ACB}(\beta_1,\beta_2,T_1,T_2)\to\min_{\beta_1,\beta_2}\left(\min_{T_1,T_2\geq 0,\ T_1+T_2=T}\right). \quad (6)$$

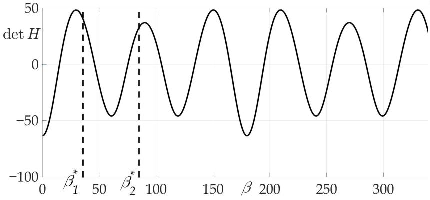
Теорема 3

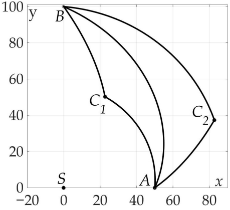
Оптимальные углы β_1^*,β_2^* *для двузвенной траектории не зависят от* β_0*, и полностью определяются индикатрисой излучения* $g(\beta)$*, и удовлетворяют системе уравнений*

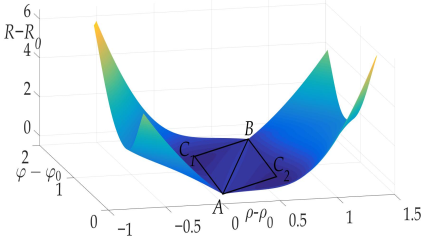
$$\begin{cases}\left(\dfrac{g(\beta_2)}{g(\beta_1)}\right)^{1/\mu}=\cos(\beta_2-\beta_1)+\dfrac{1}{\mu}\sin(\beta_2-\beta_1)\dfrac{g'(\beta_1)}{g(\beta_1)},\\ \left(\dfrac{g(\beta_1)}{g(\beta_2)}\right)^{1/\mu}=\cos(\beta_2-\beta_1)-\dfrac{1}{\mu}\sin(\beta_2-\beta_1)\dfrac{g'(\beta_2)}{g(\beta_2)}.\end{cases} \quad (7)$$

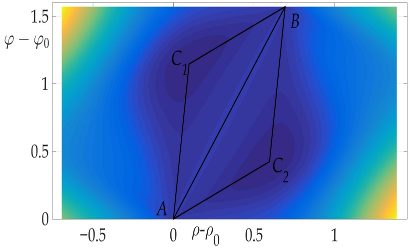
Примеры





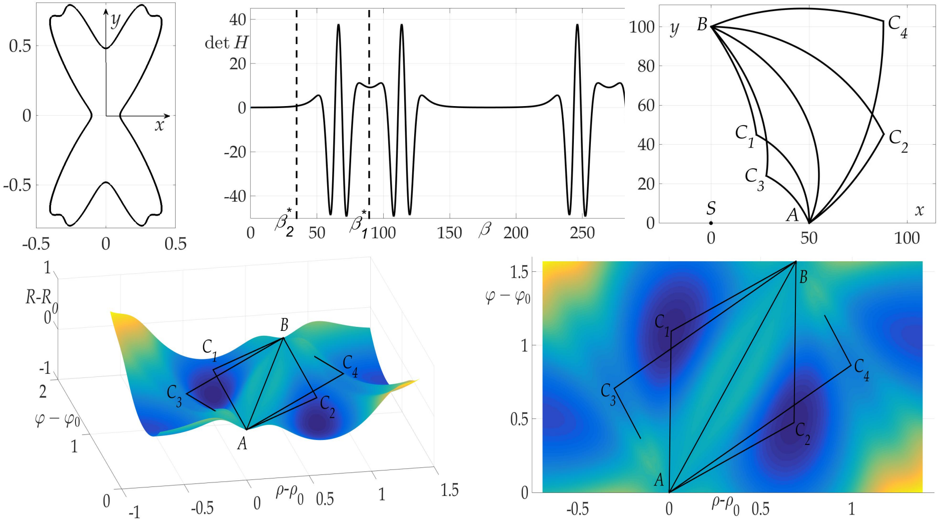






Galyaev A.A., Lysenko P.V., Yakhno V.P. 2D Optimal Trajectory Planning Problem in Threat Environment for UUV with Non-Uniform Radiation Pattern // Sensors **2021**. 21 (2). 396.

Примеры



Galyaev A.A., Lysenko P.V., Yakhno V.P. 2D Optimal Trajectory Planning Problem in Threat Environment for UUV with Non-Uniform Radiation Pattern // Sensors **2021**. 21 (2). 396.

Для задачи уклонения от обнаружения по критерию R получены результаты:

Теорема 1

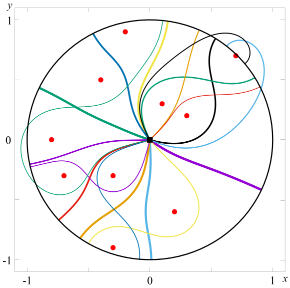
Если на экстремали $\{\hat{x}(\cdot), \hat{y}(\cdot), \hat{v}(\cdot), \hat{\varphi}(\cdot)\}$ не было выхода на ограничение $v \leqslant v_{max}$, то путь $\hat{y}(\hat{x})$ будет соответствовать некоторой экстремали при увеличении T. Обратное неверно.

Теорема 2

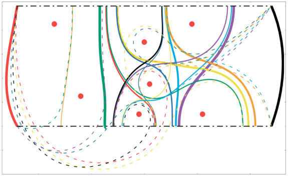
Траектории $\{\hat{x}(\cdot), \hat{y}(\cdot), \hat{v}(\cdot), \hat{\varphi}(\cdot)\}$ на которых УО пересекает периметр не являются оптимальными.

Обратная задача: $\max\limits_{(a_i, b_i)} \min\limits_{(x(\cdot), y(\cdot))} R$, где

$$R = \int\limits_0^T \left(\sum_{i=1}^{N} q_i \frac{v^2(t)}{(x(t) - a_i)^2 + (y(t) - b_i)^2} \right) \mathrm{d}t.$$



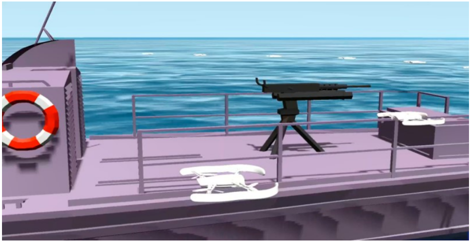
прорыв периметра

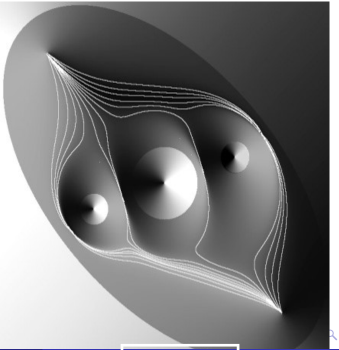


Samokhina M.A., Galyaev A.A. Constructing a Map of Locally Optimal Paths for a Controlled Moving Object in a Threat Environment // Control Sciences 2024. V.1. pp.75–85.

Задача защиты объектов

Патрулирование конфликтного района группой БПЛА с целью отыскания, преследования подводного объекта - нарушителя. Каждый робот способен менять режимы поиска и преследования при групповых ограничениях или независимо, а также при ограничениях на дальность коммуникаций (прием и отправка сообщений). **Недостаточно дедуктивных, роевых, генетических и подобных методов**, сопрягаемых с логико-динамическим управлением в условиях достаточно простых требований к поведению в среде (поиск и групповой обход препятствий) и при довольно простых динамических моделях АНПА и среды. Требуется поиск недостающей информации и недостающих конструктивных средств достижения цели, с логическим анализом обстановки, в т.ч. путем объяснения наблюдаемого, что требует **интеграции методов и моделей**.





Buzikov M., Galyaev A., Guryev Yu., Titov K., Yakushenko E., Vassilyev S. Intelligent Control of Autonomous and Anthropocentric On-board Systems // Procedia Computer Science. **2019**. Vol. 150. P.10-18.

Защита подвижного объекта мобильным защитником

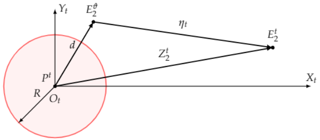


Рис.: Геометрия задачи

Динамика относительного движения системы Защитника-SV:

$$\dot{Z}_2^t = u_t - \begin{pmatrix} 1 \\ \Theta_t \end{pmatrix}, \qquad u_t = \begin{pmatrix} u_x^t \\ u_y^t \end{pmatrix}.$$

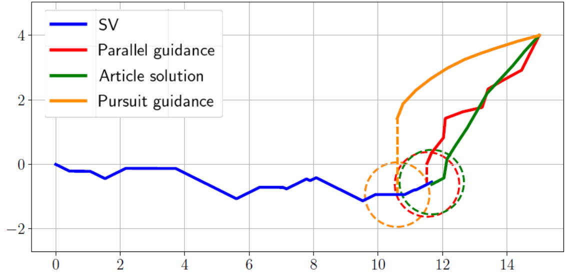
Ограничение на управление Защитника: $|u_t| \leq \beta < 1$.

Динамика системы для относительного вектора η_t:

$$\dot{\eta}_t = u_t + A + B\Theta_t, \quad \eta_0 \triangleq Z_2^0, \quad A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Критерий оптимизации:

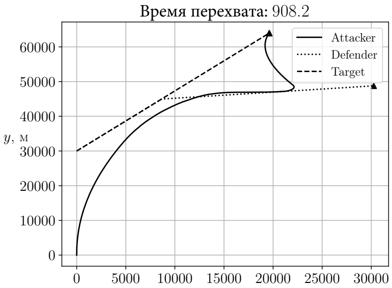
$$\mathbf{E}G(\eta_\vartheta, \Theta_\vartheta) \to \min_{u_t}, \; G(\eta_\vartheta, \Theta_\vartheta) = \eta_\vartheta^2 + \gamma\Theta_\vartheta.$$

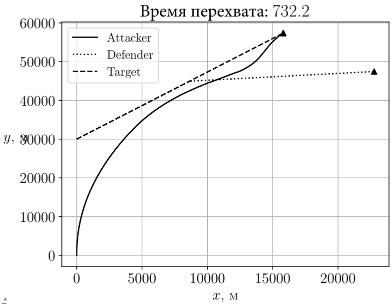


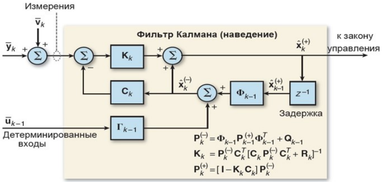
Galyaev A.A, Lysenko P.V, Rubinovich E.Y. Optimal Stochastic Control in the Interception Problem of a Randomly Tacking Vehicle // Mathematics. 2021. 9(19):2386.

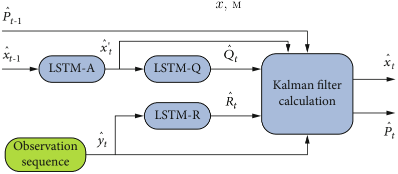
Защита подвижного объекта мобильным защитником

Требуется найти $\alpha_D^* = \arg\max\limits_{\alpha_D} t^*$, где t^* — время перехвата.









Галяев А.А., Потапов А.П. Об одном подходе к противодействию алгоритму наведения в ADT-игре // «Актуальные проблемы защиты и безопасности 2024», С-Пб, апрель 2024, 3 стр.

Морские объекты, требующие защиты

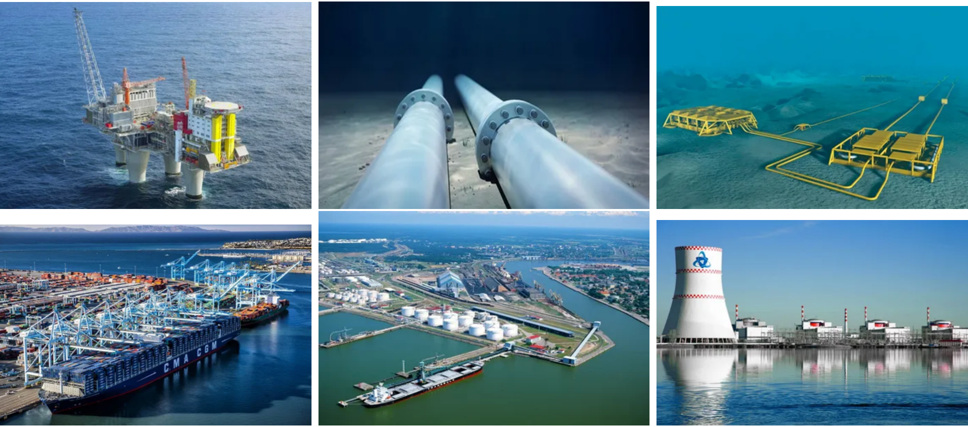


Рис.: Буровые вышки, нефте-газопроводы,подводные хабы, морские порты, морские терминалы, АЭС

Задача защиты объекта

Идея: Атакующим автономным интеллектуальным средствам должны противостоять автономные интеллектуальные защитники.

Разделы науки:

- Теории фильтрации, поиска объектов и их обнаружения;
- Теория систем и общая теория управления;
- Управление подвижными объектами и навигация;
- Теория и методы разработки программно-аппаратных и технических средств управления и сложных информационно-управляющих систем.

Сценарии применения: тактика, в т.ч. оперативная, стратегия, учет внешних факторов и действий противника.

Платформенные решения: мультиагентные и сетецентрические, в т.ч. с использование интеллектуальных технологий и технологий искусственного интеллекта.

Последовательность решаемых задач:

- Поиск и обнаружение;
- Распределение целей по защитникам, целеуказание и наведение, с навигацией и коррекцией;
- Поражение объекта.

Групповое применение перехватчиков

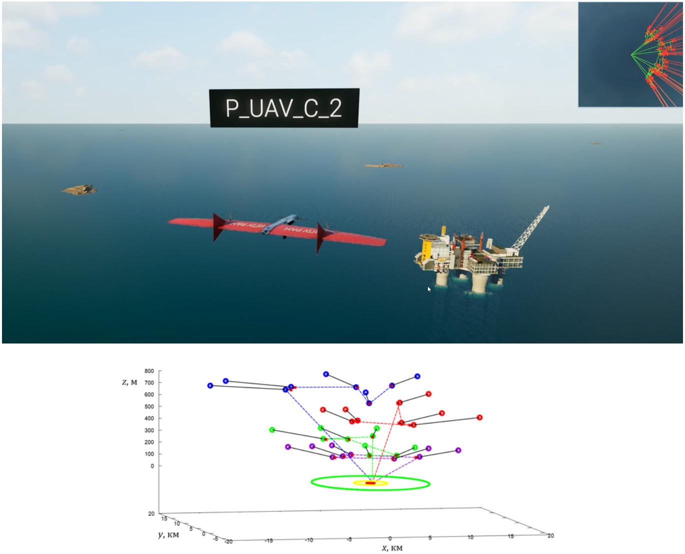


Рис.: Совместный перехват множества целей.

Задача перехвата нескольких прямолинейно движущихся целей

Коммивояжер **Цель $j, j = 1, \dots, m$**

Математическая модель

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{x}}^I(t) = v(t)\cos\psi(t); \\ \dot{\mathrm{y}}^I(t) = v(t)\sin\psi(t). \end{cases} \quad \mathbf{r}^I(t) = (\mathrm{x}^I(t), \mathrm{y}^I(t)). \qquad \mathbf{r}_j(t) = \boldsymbol{r}_j^0 + \boldsymbol{v}_j t \tag{8}$$

Начальное положение

$$\mathbf{r}^I(0) = (\mathrm{x}^I(0), \mathrm{y}^I(0)) = (0, 0) \qquad \boldsymbol{r}_j^0 = (x_j^0, y_j^0)$$

Ограничения на параметры

$$v(t) \in [0, V], \qquad |\boldsymbol{v}_j| \in [v_{\min}, v_{\max}], \quad v_{\max} < V,$$

$$\psi(t) \in [0, 2\pi). \qquad |\boldsymbol{r}_j^0| \leq R + \Delta R, \ \operatorname{arctg}\frac{y_j^0}{x_j^0} \in \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right]. \tag{9}$$

Время перехвата τ цели j

$$\tau(\boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{v}_j) = \frac{(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{r}_j) + \sqrt{(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{r}_j)^2 + \boldsymbol{r}_j^2(V^2 - \boldsymbol{v}_j^2)}}{V^2 - \boldsymbol{v}_j^2}, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{r}_j = \mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}^I(t)$ – вектор относительного положения коммивояжера и цели j, $\mathbf{r}^I(t)$ – текущее положение коммивояжера, V – максимальная скорость коммивояжера, $\boldsymbol{v}_j$ – вектор скорости цели.

Постановка задачи

Пространство всех индивидуальных планов по обслуживанию $k \in \{0, ..., m\}$ целей

$$\Pi_k = \left\{(\pi_1, ..., \pi_k) \in \mathcal{M}^k : \forall p, q \in \{1, ..., k\} \quad p \neq q \to \pi_p \neq \pi_q \right\}.$$

Пространство всех планов для заданного количества целей m:

$$\Pi = \bigcup_{k=0}^{m} \Pi_k.$$

Минимальное время $T(\pi)$, которое требуется коммивояжеру для того, чтобы исполнить индивидуальный план $\pi = (\pi_1, ..., \pi_k)$

$$T(\pi) = \begin{cases} 0, & k = 0; \\ \tau(\boldsymbol{r}^0_{\pi_1}, \boldsymbol{v}_{\pi_1}), & k = 1; \\ t + \tau(\mathbf{r}_{\pi_k}(t) - \mathbf{r}^I(t), \boldsymbol{v}_{\pi_k}), & k > 1, \text{ здесь } t = T((\pi_1, ..., \pi_{k-1})). \end{cases} \tag{11}$$

Всякая вошедшая в план $\pi = (\pi_1, ..., \pi_k)$ цель должна быть обслужена **вовремя**, т.е. до попадания в начало координат.

$$\mathrm{OnTime}(\pi) = \left(\forall j \in \{1, ..., k\} : T((\pi_1, ..., \pi_j)) \leq t_{\pi_j}\right).$$

Множество допустимых планов:

$$\Pi_A = \{\pi \in \Pi : \mathrm{OnTime}(\pi)\}.$$

Критерии задачи

Оптимальным решением задачи построения плана обхода является наилучший план $\pi^* \in \Pi_A$, который минимизирует значение **функционала потерь**:

$$\pi^* \in \arg\min_{\pi \in \Pi_A} J[\pi]. \tag{12}$$

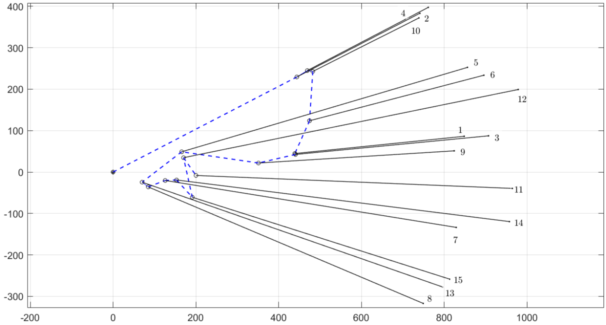
- **Пропущенные цели + Время исполнения.** Критерий качества получаемых планов выглядит так
$$J_T[\pi] = (n_0[\pi], T_{\text{sum}}[\pi]). \tag{13}$$
- **Пропущенные цели + Наименьшая близость к началу координат.** Критерий качества записывается следующим образом:
$$J_D[\pi] = (n_0[\pi], -D_{\min}[\pi]). \tag{14}$$
- **Пропущенные цели + Наименьшая близость к началу координат + Время исполнения.** Критерий сформирован из трех основных функционалов
$$J_{DT}[\pi] = (n_0[\pi], -D_{\min}[\pi], T_{\text{sum}}[\pi]). \tag{15}$$

Минимизация такого критерия в первую очередь нацелена на наименьшее количество пропущенных в начало координат целей, во вторую очередь — на максимизацию расстояния самой близкой из приблизившихся целей, и последняя сортировка осуществляется по времени исполнения плана.

Решение задачи перехвата

Задача 1

Для m целей, движущихся по траекториям (8) с ограничениями на параметры движения вида (9), требуется найти оптимальный по критерию (13) или (15) план перехвата $\pi \in \Pi_A$ коммивояжером с заданной динамикой.



План оптимального перехвата 15 целей коммивояжером по критерию $J_T[\pi]$:

$$\pi^* = (2, 4, 10, 6, 1, 3, 9, 5, 13, 8, 7, 14, 15, 12, 11),$$
$$T_{\mathrm{sum}}[\pi^*] = 1448,051,$$
$$D_{\min}[\pi^*] = 74,183.$$

Свойства задачи

Определение 2

Опасностью K_j, *которую составляет* j*-я цель, назовем величину, обратную времени движения до начала координат, а именно*

$$K_j(t) = t_j(t)^{-1}.$$

Опасностью текущей обстановки для m *целей назовем упорядоченный по уменьшению кортеж из величин опасностей*

$$(K_{j_1}(t), \dots, K_{j_m}(t)).$$

Определение 3

Удобством перехвата j*-й цели* U_j *назовем величину, обратную времени перехвата этой цели из текущей обстановки, а именно*

$$U_j(t) = \tau_j(t)^{-1}.$$

Удобством текущей обстановки для m *целей назовем упорядоченный по уменьшению кортеж из величин удобств*

$$(U_{j_1}(t), \dots, U_{j_m}(t)).$$

Свойства задачи

Определение 4

Сложностью перехвата $C[\pi]$ – максимальное время между двумя последовательными перехватами

$$C[\pi] = \max_{\{\pi_j\}\in\pi,\ 1<j\le m.} \tau_{\pi_j}(T((\pi_1, ..., \pi_{j-1}))).$$

Определение 5

Средней сложностью перехвата $\widehat{C}[\pi]$ – среднее время между двумя последовательными обходами

$$\widehat{C}[\pi] = \frac{1}{m-1} \sum_{\{\pi_j\}\in\pi, 1<j\le m.} \tau_{\pi_j}(T((\pi_1, ..., \pi_{j-1}))).$$

Теорема 3

Для любой начальной обстановки и любого количества целей в задаче существует план гарантированного перехвата ($n_0[\pi] = 0$) $\pi \in \Pi_G$.

Теорема 4

Для критериев $J_T[\pi]$ и $J_{DT}[\pi]$ в Задаче справедливы
1) принцип неоптимальности простоя,
2) принцип максимальной скорости.

Моделирование

Рассматриваются 1000 различных начальных обстановок, для которых выбраны следующие основные параметры:

- Количество целей $m = 15$.
- Центральный угол сектора, где находятся цели $\alpha = 60^\circ$.
- Значения $||\mathbf{r}_j||, j = 1, \ldots, m$ распределены равномерно на отрезке $[800,\ 1000]$.
- Скорости целей распределены равномерно на отрезке $[0,5V,\ 0,7V]$.

Для каждой обстановки находится ее опасность и удобство, а также оптимальные планы обхода по критериям $J_T[\pi]$ и $J_{DT}[\pi]$, после чего в табл. приводится статистика, как часто первые несколько целей оптимального плана оказываются самыми опасными/удобными.

Моделирование

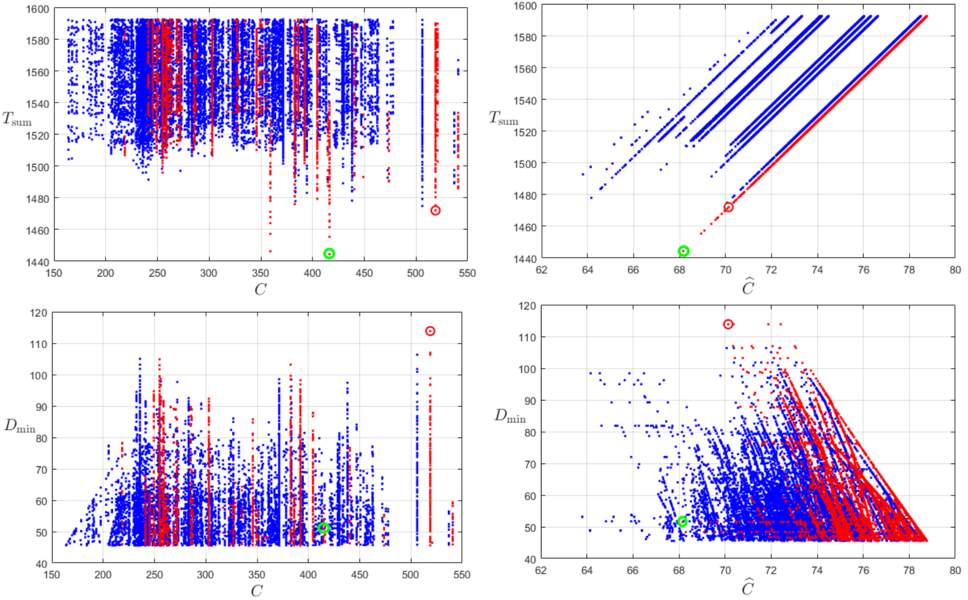
Таблица: Процент совпадений первых четырех целей $\pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^*, \pi_4^*$ оптимального по критерию $J_T[\pi]$ плана π^* с соответствующими опасными и удобными целями для 1000 различных начальных обстановок

Номера целей плана π^*	Количество совпадений i-й цели плана π^* с i-й по			
	опасности $(K_{\pi_i^*} = K_{j_i})$, %	удобству $(U_{\pi_i^*} = U_{j_i})$, %	опасности и удобству, %	опасности или удобству, %
Первая цель π_1^* $(i = 1)$	$65,0$	$65,9$	$56,8$	$74,1$
Вторая цель π_2^* $(i = 2)$	$32,1$	$57,6$	$13,9$	$75,8$
Третья цель π_3^* $(i = 3)$	$19,4$	$58,5$	$7,1$	$70,8$
Четвертая цель π_4^* $(i = 4)$	$16,3$	$57,0$	$3,8$	$69,5$

Моделирование

Таблица: Процент совпадений первых четырех целей $\pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^*, \pi_4^*$ оптимального по критерию $J_{DT}[\pi]$ плана π^* с соответствующими опасными и удобными целями для 1000 различных начальных обстановок

Номера целей плана π^*	Количество совпадений i-й цели плана π^* с i-й по			
	опасности $(K_{\pi_i^*} = K_{j_i})$, %	удобству $(U_{\pi_i^*} = U_{j_i})$, %	опасности и удобству, %	опасности или удобству, %
Первая цель π_1^* $(i = 1)$	$61,2$	$63,0$	$52,8$	$71,4$
Вторая цель π_2^* $(i = 2)$	$36,6$	$52,9$	$13,2$	$76,3$
Третья цель π_3^* $(i = 3)$	$27,5$	$49,2$	$7,7$	$69,0$
Четвертая цель π_4^* $(i = 4)$	$24,6$	$45,7$	$6,2$	$64,1$


$T_{\rm sum}$
C
$D_{\min}$
$\widehat{C}$

Задача защиты объекта

Результаты

- Разработана концепция по обеспечению непрерывного мониторинга подводной инфраструктуры.
- Разработаны частные математические модели функционирования лёгких АНПА, способных в условиях малого времени реакции на внешние угрозы, решать задачи по оценке обстановки, формированию индивидуальных стратегий управления и генерации новых/измененных целей и задач как всей миссии, решающих целевую задачу обеспечения гарантированной защиты морских объектов.
- Разработаны математические модели и алгоритмы для решения задачи перехвата в заданном районе одной или нескольких прямолинейно движущихся целей в различных эшелонах группой автономных защитников.

Галяев А.А., Яхно В.П., Лысенко П.В., Берлин Л.М., Бузиков М.Э. Оптимизация плана перехвата прямолинейно движущихся целей // Автоматика и телемеханика. 2023. № 10. С. 18-36.

Галяев А.А., Рябушев Е.А. Поиск субоптимального решения динамической задачи коммивояжера методом Монте-Карло // Автоматика и телемеханика. 2024. № 2. С. 103-119.

Если Ваш план на 1 год — выращивайте рис.
Если Ваш план на 10 лет — сажайте деревья.
Если Ваш план на 100 лет — обучайте детей!
Конфуций
Если Ваш план на 1000 лет — ...

Спасибо за внимание!