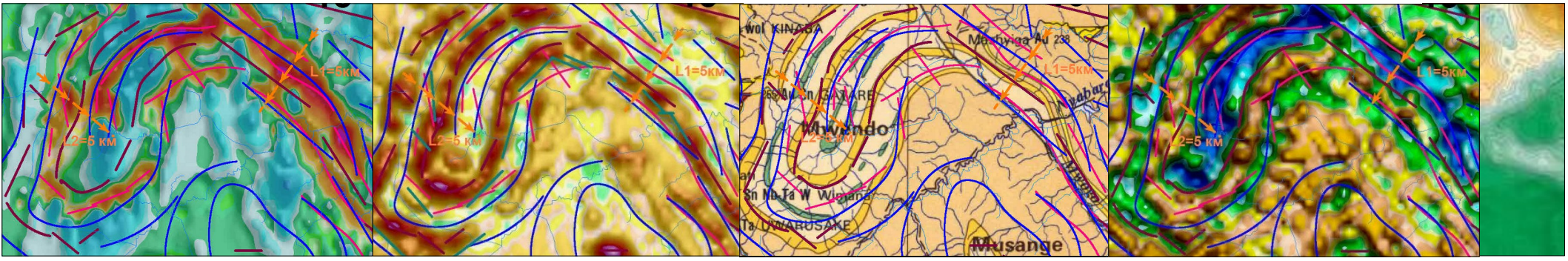
ПРИМЕНЕНИЕ КАЛМАНОВСКОГО ПОДХОДА ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ПО АДАМАРУ ЗАДАЧ

Е.В. Каршаков

Лаборатория динамических информационно-управляющих систем ИПУ РАН

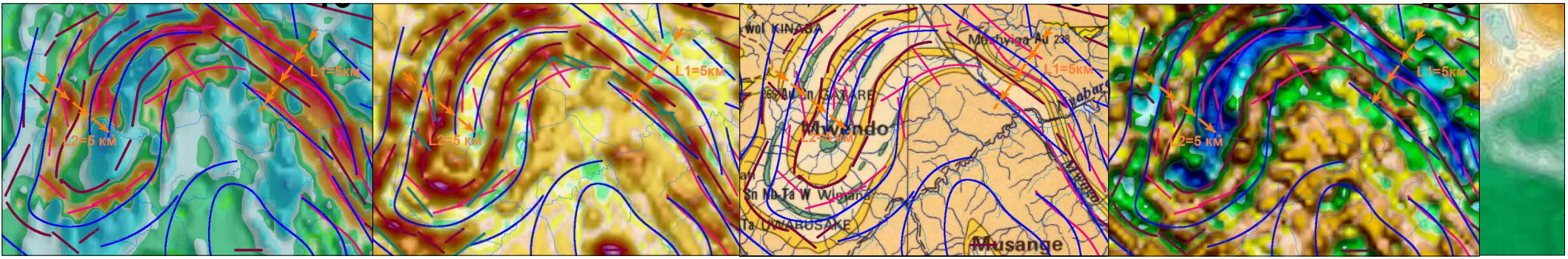
КОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННАЯ ПО АДАМАРУ ЗАДАЧА (ПО АДАМАРУ-ТИХОНОВУ)

1. Решение существует
2. Решение единственно
3. Решение устойчиво



НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННАЯ ПО АДАМАРУ ЗАДАЧА (ПО АДАМАРУ-ТИХОНОВУ)

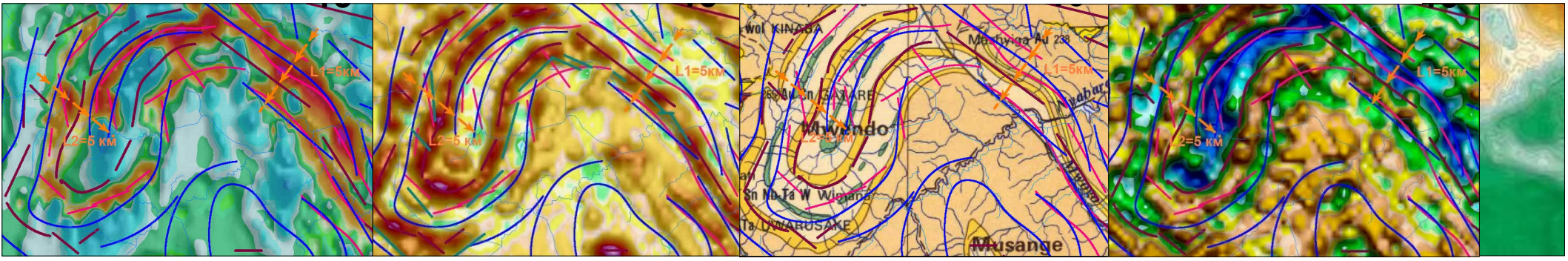
1. Решение существует ?
2. Решение единственно ?
3. Решение устойчиво ?



НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННАЯ ПО АДАМАРУ ЗАДАЧА (ПО АДАМАРУ-ТИХОНОВУ)

1. Решение существует ?
2. Решение единственно ?
3. Решение устойчиво ?

<u>Обратные задачи в геофизике -</u>
нахождение распределения источников геофизических полей, соответствующего измеренным на поверхности значениям.



ФУНДАМЕНТ:

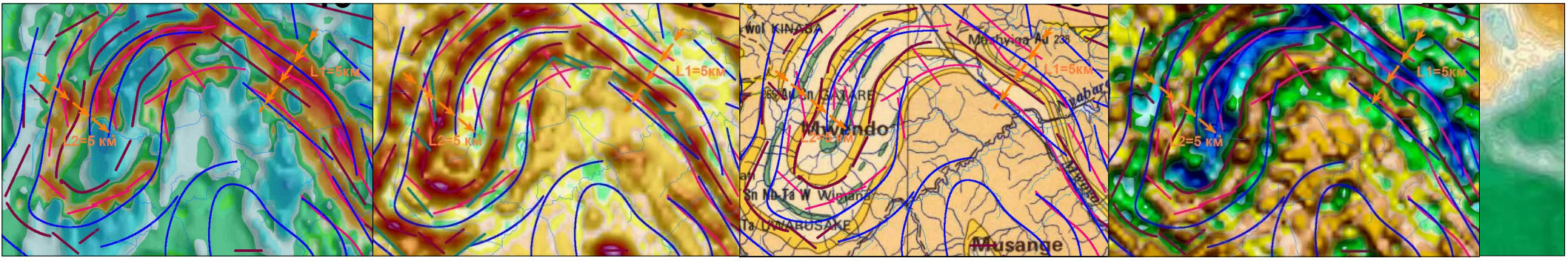
1. Степанов, 2003. Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации / О.А. Степанов // Спб: ГНЦ РФ - ЦНИИ «Электроприбор».- 2003.- 370 с.

2. Zhdanov, 2002. Geophysical Inverse Theory and Regularization Problems / M.S. Zhdanov // Elsevier Science B.V.- 2002.- 635 p.

3. Tarantola, 2005. Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation / A. Tarantola // SIAM.- 2005.- 358 p.

4. Simon, 2006. Optimal State Estimation. Kalman, H∞ and Nonlinear Approaches / D. Simon // .- 2006.- 550 p.

5. Havlik and Straka, 2015. Performance Evaluation of Iterated Extended Kalman Filter with Variable Step-Length / J. Havlik and O. Straka // Journal of Physics: Conference Series.- 2015.- 659.- P. 12-22



ПЛАН:

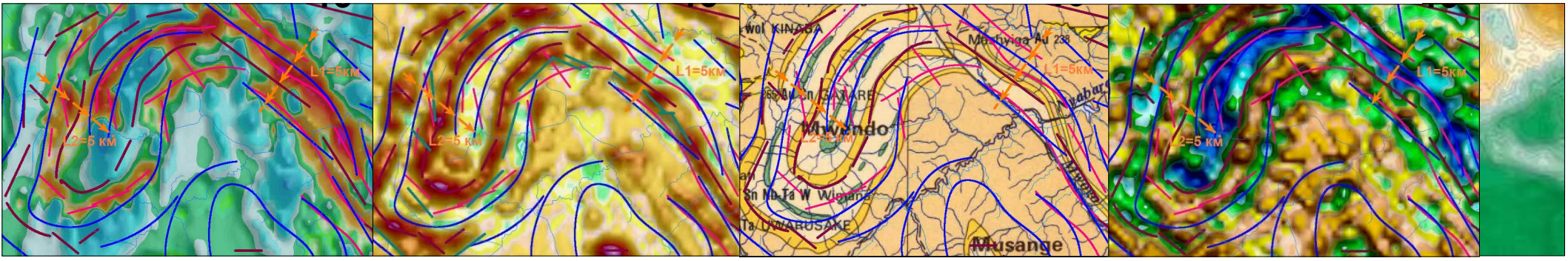
ЧАСТЬ 1. РЕШЕНИЕ БАЗОВОЙ ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ

ЧАСТЬ 2. ФИЛЬТР КАЛМАНА

ЧАСТЬ 3. НЕЛИНЕЙНЫЙ ПРОГНОЗ

ЧАСТЬ 4. НЕЛИНЕЙНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ

ЧАСТЬ 5. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ



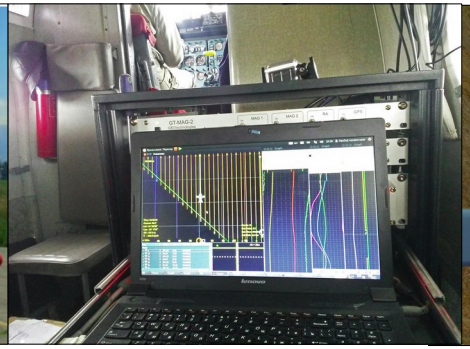
ЧАСТЬ 1. РЕШЕНИЕ БАЗОВОЙ ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ

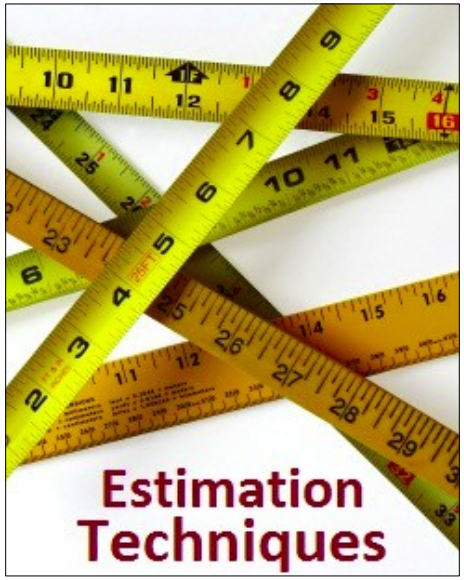
Уравнения измерений $\mathbf{Z}_{(j)} = \mathbf{H}_{(j)}\left(\mathbf{X}_{(j)}\right).$

$$\mathbf{X}_{(j)} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{Z}_{(j)} \in \mathbb{R}^m$$

$$\mathbf{H} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Задача линейного оценивания: $\left\|\mathbf{X} - \mathbf{K}\cdot\mathbf{Z}\right\|^2 \to \min\limits_{\mathbf{K}}$





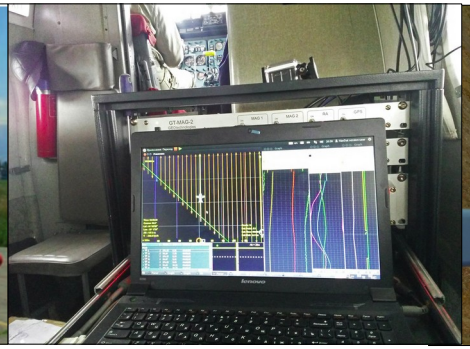
НОРМА || · ||

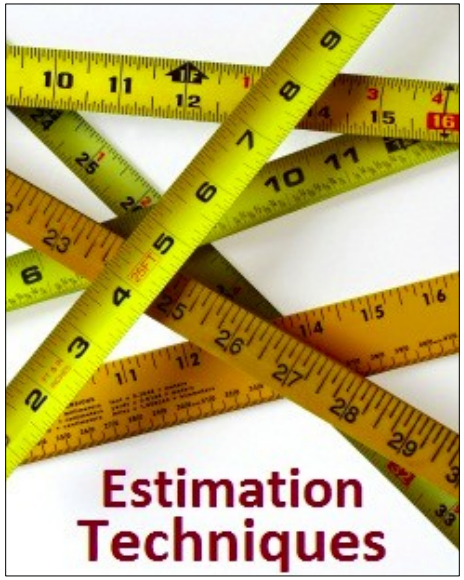
Случайные векторы:

$$\mathbf{X}\in\mathbb{R}^n,\quad \mathbf{Z}\in\mathbb{R}^m$$
$$\mathbf{x}=\mathbf{X}-\mathrm{E}\,\mathbf{X},\quad \mathbf{z}=\mathbf{Z}-\mathrm{E}\,\mathbf{Z},$$

Диадное произведение:

$$\mathbf{x}\,\mathbf{z}^T=\begin{pmatrix} x_1 z_1 & x_2 z_1 & \cdots & x_n z_1 \\ x_1 z_2 & x_2 z_2 & \cdots & x_n z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 z_m & x_2 z_m & \cdots & x_n z_m \end{pmatrix}$$





НОРМА || · ||

Случайные векторы:

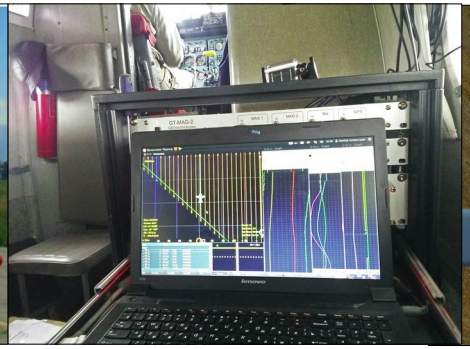
$$\mathbf{X}\in\mathbb{R}^n,\quad \mathbf{Z}\in\mathbb{R}^m$$
$$\mathbf{x}=\mathbf{X}-\mathrm{E}\,\mathbf{X},\quad \mathbf{z}=\mathbf{Z}-\mathrm{E}\,\mathbf{Z},$$

Ковариационная матрица:

$$\mathbf{P}_{xz}=\mathrm{E}\,\mathbf{x}\,\mathbf{z}^T$$

Скалярное произведение:

$$\langle\mathbf{x},\mathbf{z}\rangle=\mathrm{E}\,\mathbf{x}\,\mathbf{z}^T$$
$$\langle a\,\mathbf{x}+b\,\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle=a\langle\mathbf{x},\mathbf{z}\rangle+b\langle\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle$$
$$\|\mathbf{x}\|^2=\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle=0\ \Leftrightarrow\ \mathbf{x}=0$$



РЕШЕНИЕ БАЗОВОЙ ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ

Уравнения измерений

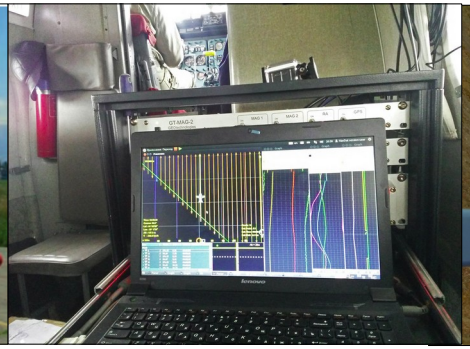
$$\mathbf{Z}=\mathbf{H}(\mathbf{X}).$$

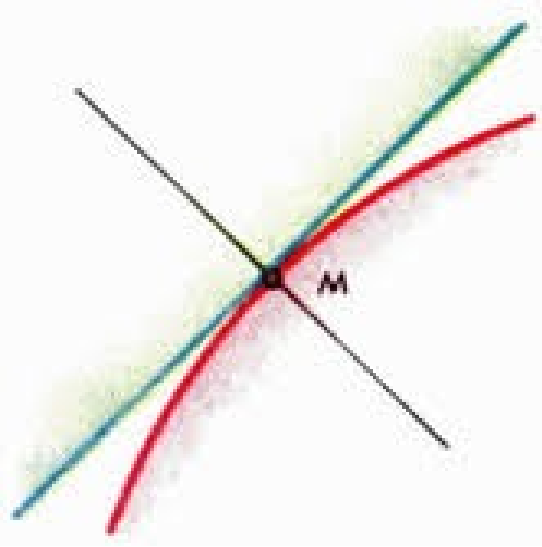
$$\mathbf{X}\in\mathbb{R}^n,\quad \mathbf{Z}\in\mathbb{R}^m$$

$$\mathbf{x}=\mathbf{X}-\mathrm{E}\,\mathbf{X},\quad \mathbf{z}=\mathbf{Z}-\mathrm{E}\,\mathbf{Z}=\mathbf{Z}-\mathbf{H}(\mathrm{E}\,\mathbf{X}),$$

Задача линейного оценивания: $\|\mathbf{x}-\mathbf{K}\cdot\mathbf{z}\|^2 \to \min\limits_{\mathbf{K}=\mathbf{K}_0}$

или $\mathrm{E}(\mathbf{x}-\mathbf{K}_0\cdot\mathbf{z})(\mathbf{x}-\mathbf{K}_0\cdot\mathbf{z})^T \leqslant \mathrm{E}(\mathbf{x}-\mathbf{K}\cdot\mathbf{z})(\mathbf{x}-\mathbf{K}\cdot\mathbf{z})^T$





РЕШЕНИЕ

$$\mathbf{P}_{xz} = \mathrm{E}(\mathbf{x}\,\mathbf{z})^T = \mathbf{K}_0\,\mathrm{E}\,\mathbf{z}\,\mathbf{z}^T = \mathbf{K}_0\,\mathbf{P}_{zz}$$

откуда:

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{P}_{xz}\,\mathbf{P}_{zz}^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{P}_{xz}\,\mathbf{P}_{zz}^{-1}\,\mathbf{z}$$

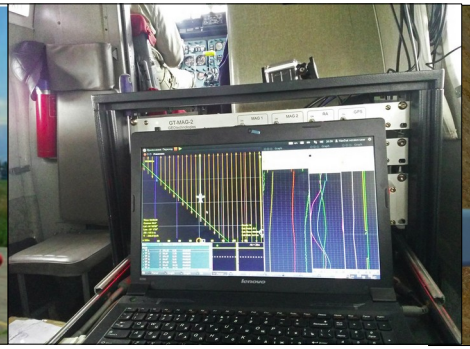
ПРИМЕР

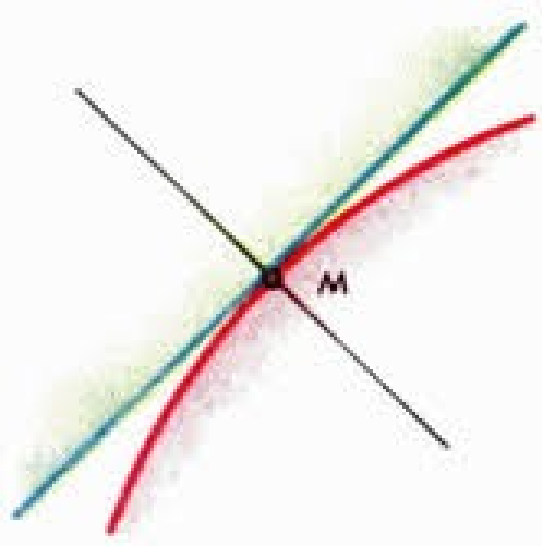
$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{r}, \quad \mathrm{E}\,\mathbf{r} = 0, \quad \mathrm{E}\,\mathbf{r}\,\mathbf{r}^T = \mathbf{R}, \quad \mathrm{E}\,\mathbf{x}\,\mathbf{r}^T = 0$$

$$\mathbf{P}_{xz} = \mathbf{P}_{xx}\,\mathbf{H}^T \qquad \mathbf{P}_{zz} = \mathbf{H}\,\mathbf{P}_{xx}\,\mathbf{H}^T + \mathbf{R}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{P}_{xx}\,\mathbf{H}^T\left(\mathbf{H}\,\mathbf{P}_{xx}\,\mathbf{H}^T + \mathbf{R}\right)^{-1}\mathbf{z}$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{xx} = \mathrm{E}\left(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\right)\left(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\right)^T$$





РЕШЕНИЕ

$$\mathbf{P}_{xz} = \mathrm{E}(\mathbf{x}\,\mathbf{z})^T = \mathbf{K}_0\,\mathrm{E}\,\mathbf{z}\,\mathbf{z}^T = \mathbf{K}_0\,\mathbf{P}_{zz}$$

откуда:

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{P}_{xz}\,\mathbf{P}_{zz}^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{P}_{xz}\,\mathbf{P}_{zz}^{-1}\,\mathbf{z}$$

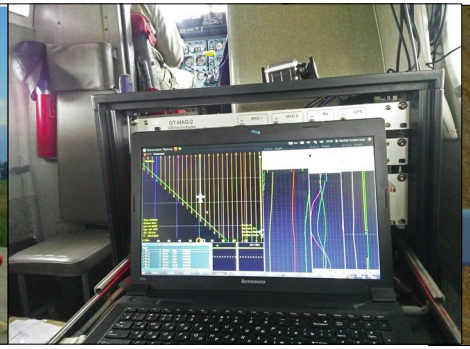
ПРИМЕР

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{r}, \quad \mathrm{E}\,\mathbf{r} = 0, \quad \mathrm{E}\,\mathbf{r}\,\mathbf{r}^T = \mathbf{R}, \quad \mathrm{E}\,\mathbf{x}\,\mathbf{r}^T = 0$$

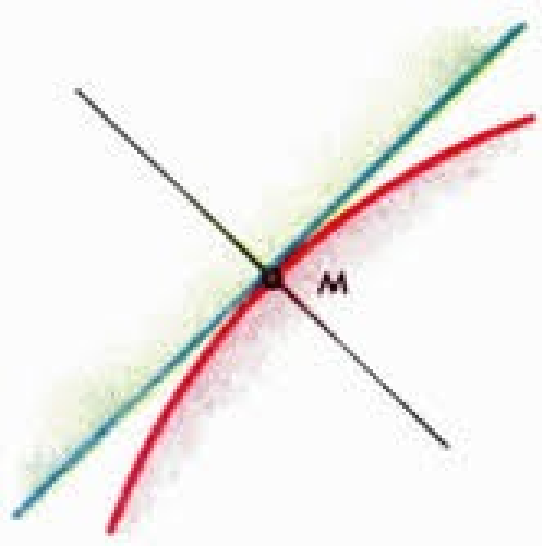
$$\mathbf{P}_{xz} = \mathbf{P}_{xx}\,\mathbf{H}^T \qquad \mathbf{P}_{zz} = \mathbf{H}\,\mathbf{P}_{xx}\,\mathbf{H}^T + \mathbf{R}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{P}_{xx}\,\mathbf{H}^T\left(\mathbf{H}\,\mathbf{P}_{xx}\,\mathbf{H}^T + \mathbf{R}\right)^{-1}\mathbf{z}$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{xx} = \mathbf{P}_{xx} - \mathbf{P}_{xx}\,\mathbf{H}^T\left(\mathbf{H}\,\mathbf{P}_{xx}\,\mathbf{H}^T + \mathbf{R}\right)^{-1}\mathbf{H}\,\mathbf{P}_{xx}$$



ЛЕММА ОБ ОБРАЩЕНИИ МАТРИЦ



$$(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}=\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D}-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}=\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D}+\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}$$

откуда:

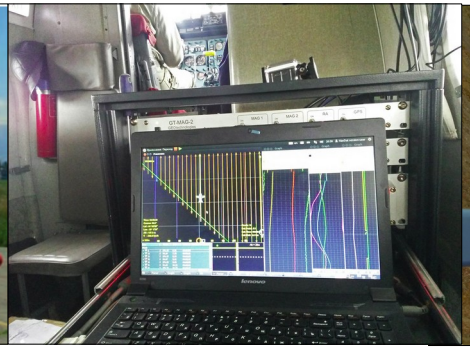
ПРИМЕР

$$\mathbf{z}=\mathbf{H}\mathbf{x}+\mathbf{r},\quad \mathrm{E}\,\mathbf{r}=0,\quad \mathrm{E}\,\mathbf{r}\mathbf{r}^T=\mathbf{R},\quad \mathrm{E}\,\mathbf{x}\mathbf{r}^T=0$$

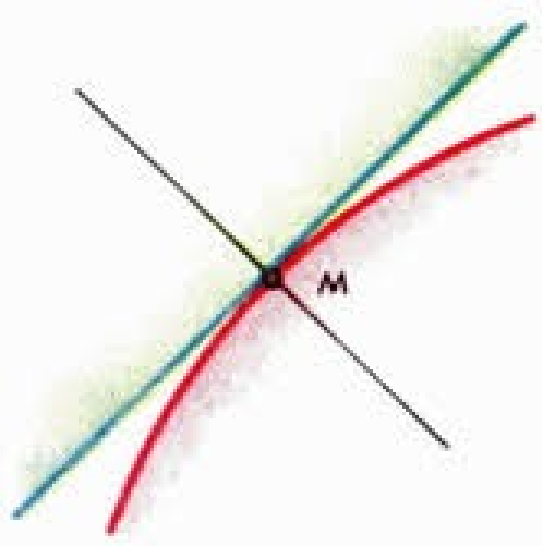
$$\mathbf{P}_{xz}=\mathbf{P}_{xx}\mathbf{H}^T \qquad \mathbf{P}_{zz}=\mathbf{H}\mathbf{P}_{xx}\mathbf{H}^T+\mathbf{R}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{P}_{xx}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}_{xx}\mathbf{H}^T+\mathbf{R})^{-1}\mathbf{z}$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{xx}=\mathbf{P}_{xx}-\mathbf{P}_{xx}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}_{xx}\mathbf{H}^T+\mathbf{R})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P}_{xx}$$



ЛЕММА ОБ ОБРАЩЕНИИ МАТРИЦ



$$(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}=\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D}-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}=\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D}+\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}$$

откуда:

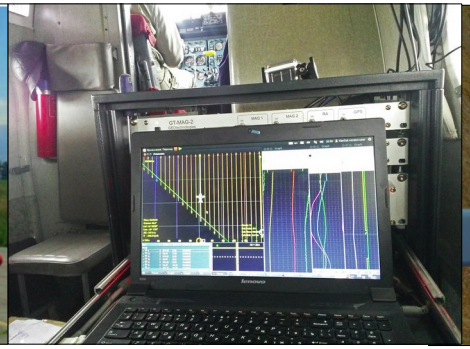
ПРИМЕР

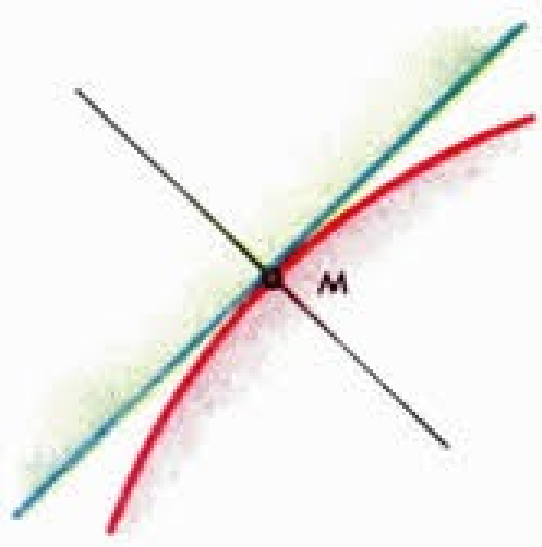
$$\mathbf{z}=\mathbf{H}\mathbf{x}+\mathbf{r},\quad \mathrm{E}\,\mathbf{r}=0,\quad \mathrm{E}\,\mathbf{r}\mathbf{r}^T=\mathbf{R},\quad \mathrm{E}\,\mathbf{x}\mathbf{r}^T=0$$

$$\mathbf{P}_{xz}=\mathbf{P}_{xx}\mathbf{H}^T \qquad \mathbf{P}_{zz}=\mathbf{H}\mathbf{P}_{xx}\mathbf{H}^T+\mathbf{R}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}=(\mathbf{P}_{xx}^{-1}+\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{z}$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{xx}=(\mathbf{P}_{xx}^{-1}+\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H})^{-1}$$





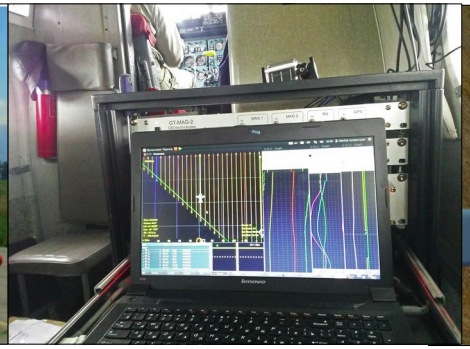
РЕШЕНИЕ

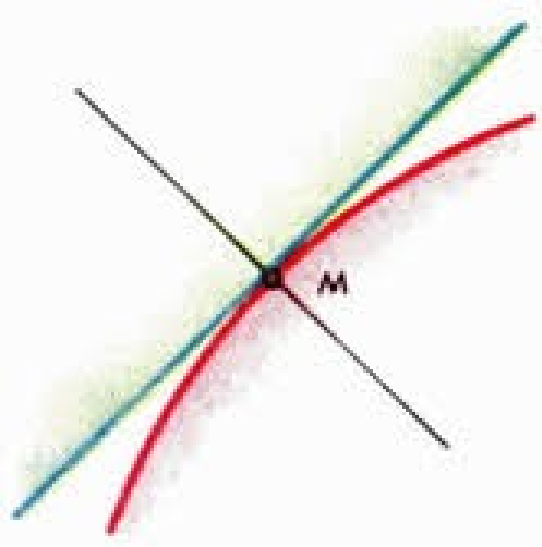
$$\mathbf{P}_{xz} = \mathrm{E}(\mathbf{x}\,\mathbf{z})^T = \mathbf{K}_0\,\mathrm{E}\,\mathbf{z}\,\mathbf{z}^T = \mathbf{K}_0\,\mathbf{P}_{zz}$$

если $\quad !\exists\,\mathbf{P}_{zz}^{-1}\ ?$

ПСЕВДООБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{\oplus}\,\mathbf{A} = \mathbf{A},\ \ \mathbf{A}^{\oplus}\,\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{\oplus} = \mathbf{A}^{\oplus},\ \ (\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{\oplus})^T = \mathbf{A}\,\mathbf{A}^{\oplus},\ \ (\mathbf{A}^{\oplus}\,\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^{\oplus}\,\mathbf{A}$$





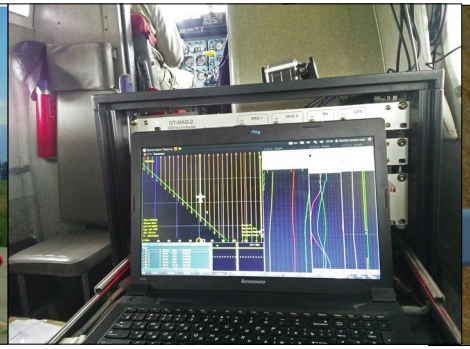
РЕШЕНИЕ

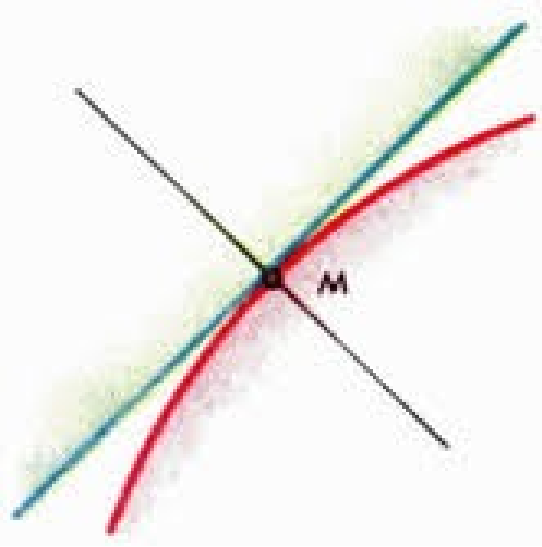
$$\mathbf{P}_{xz} = \mathrm{E}(\mathbf{x}\,\mathbf{z})^T = \mathbf{K}_0\,\mathrm{E}\,\mathbf{z}\,\mathbf{z}^T = \mathbf{K}_0\mathbf{P}_{zz}$$

если $\quad !\exists\,\mathbf{P}_{zz}^{-1}\ ?$

ОБЩИЙ ВИД РЕШЕНИЯ

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{P}_{xz}\mathbf{P}_{zz}^{\oplus} + \mathbf{M}\left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{zz}\mathbf{P}_{zz}^{\oplus}\right)$$





РЕШЕНИЕ

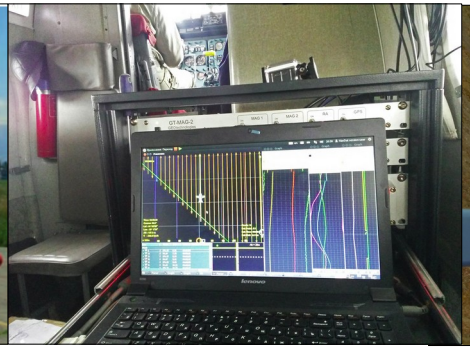
$$\mathbf{P}_{xz} = \mathrm{E}(\mathbf{x}\,\mathbf{z})^T = \mathbf{K}_0\,\mathrm{E}\,\mathbf{z}\,\mathbf{z}^T = \mathbf{K}_0\mathbf{P}_{zz}$$

если $\quad !\exists\,\mathbf{P}_{zz}^{-1}\ ?$

ОБЩИЙ ВИД РЕШЕНИЯ

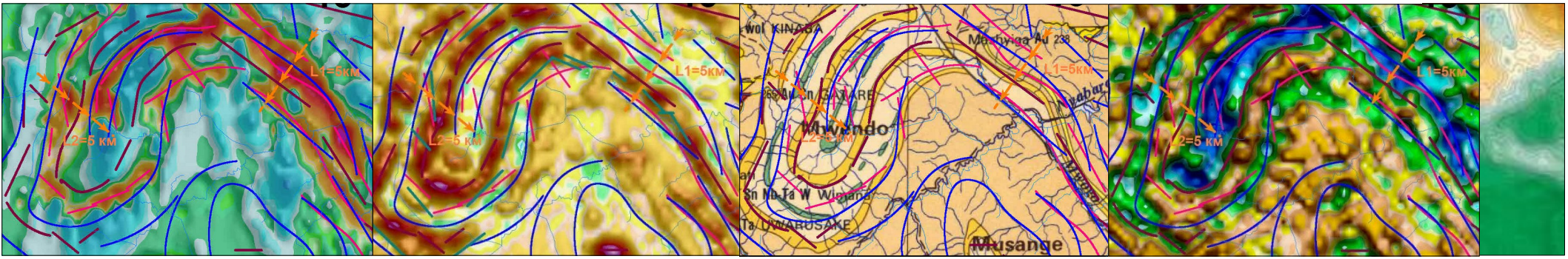
$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{P}_{xz}\mathbf{P}_{zz}^{\oplus} + \mathbf{M}\left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{zz}\mathbf{P}_{zz}^{\oplus}\right)$$

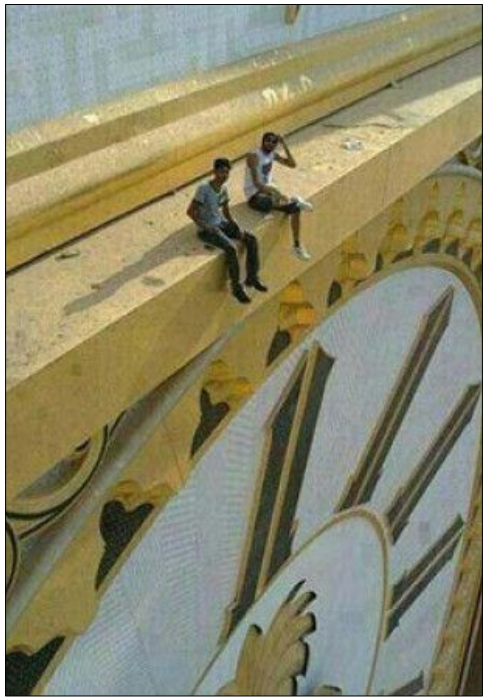
$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{P}_{xz}\mathbf{P}_{zz}^{\oplus}, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{P}_{xz}\mathbf{P}_{zz}^{\oplus}\mathbf{z}$$



ЧАСТЬ 2.

ФИЛЬТР КАЛМАНА





ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

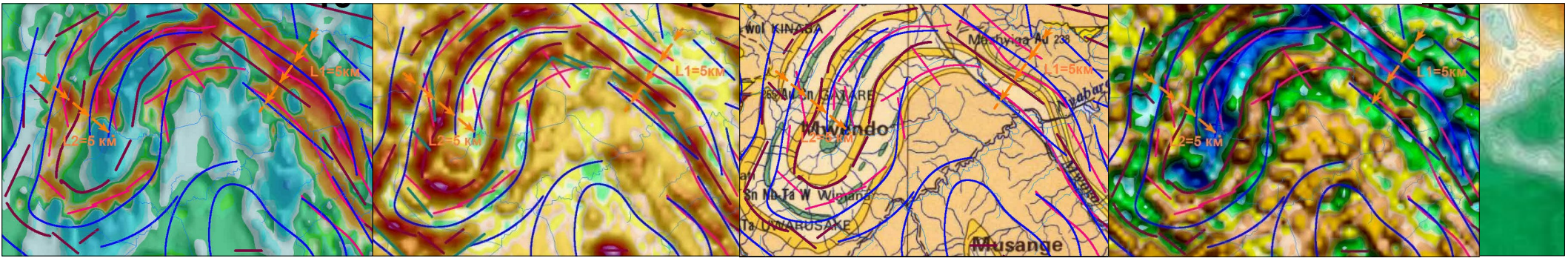
Уравнения измерений $\mathbf{Z}_{(j)} = \mathbf{H}_{(j)}\left(\mathbf{X}_{(j)}\right) + \mathbf{r}_{(j)}.$

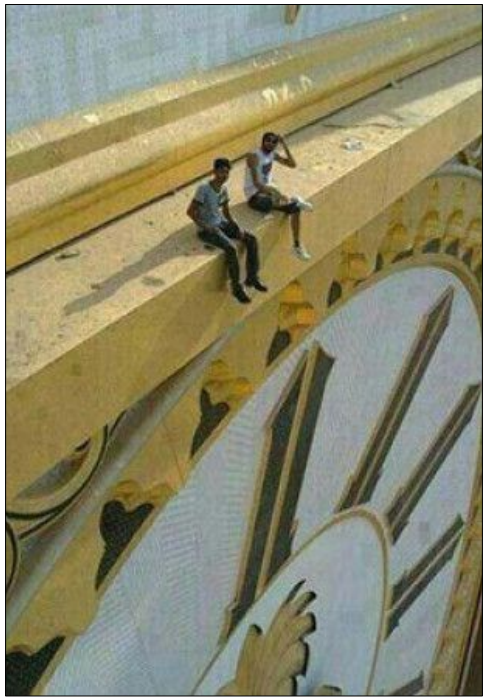
Уравнения динамики $\mathbf{X}_{(j+1)} = \mathbf{F}_{(j)}\left(\mathbf{X}_{(j)}\right) + \mathbf{q}_{(j)}.$

Задача $\widetilde{\mathbf{X}}_{(j)}: \ \|\mathbf{X}_{(j)} - \widetilde{\mathbf{X}}_{(j)}\|^2 \to \min,$

$j = 0, \ldots, N$

$\mathbf{Z}$ — вектор измерений, $\mathbf{X}$ — вектор параметров модели,
$\mathbf{r}$ — вектор шумов измерений, $\mathbf{q}$ — вектор шумов модели,
j — отсчет времени, $\widetilde{\mathbf{X}}$ — вектор оценки параметров модели.





ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

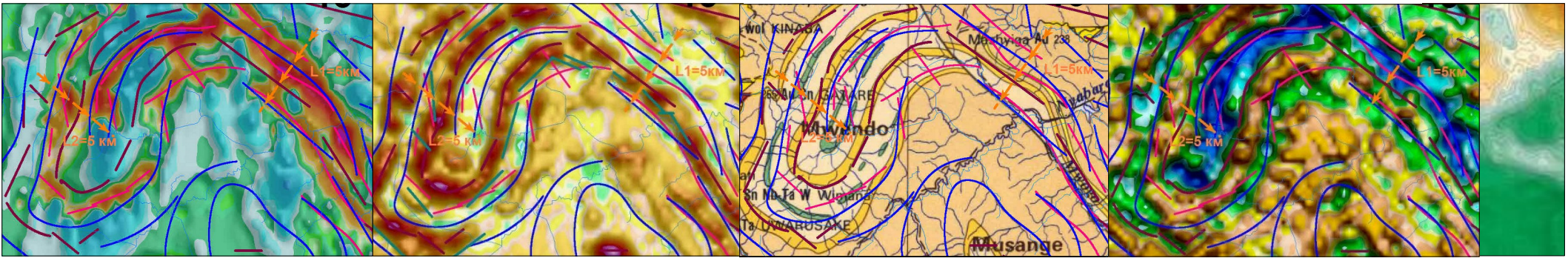
Уравнения измерений $\mathbf{Z}_{(j)} = \mathbf{H}_{(j)}\left(\mathbf{X}_{(j)}\right) + \mathbf{r}_{(j)}.$

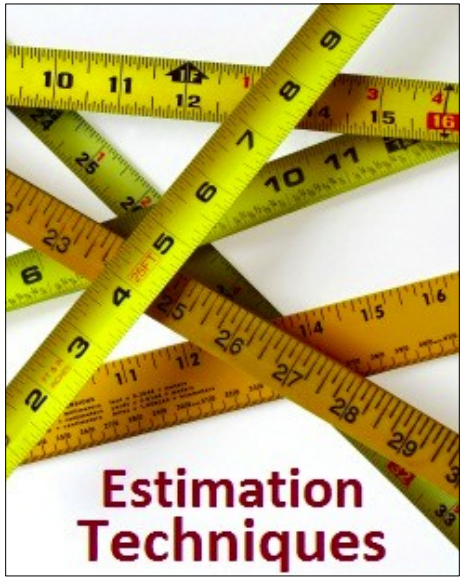
Уравнения динамики $\mathbf{X}_{(j+1)} = \mathbf{F}_{(j)}\left(\mathbf{X}_{(j)}\right) + \mathbf{q}_{(j)}.$

Задача $\widetilde{\mathbf{X}}_{(j)}: \ \left\|\mathbf{X}_{(j)} - \widetilde{\mathbf{X}}_{(j)}\right\|^2 \to \min,$

$$j = 0, \ldots, N$$

$$\mathbf{A}_{(j-1)} = \frac{\partial \mathbf{F}_{(j-1)}\left(\widetilde{\mathbf{X}}^{-}_{(j-1)}\right)}{\partial \mathbf{X}} \qquad \mathbf{h}_{(j)} = \frac{\partial \mathbf{H}_{(j)}\left(\widetilde{\mathbf{X}}^{-}_{(j)}\right)}{\partial \mathbf{X}}$$





МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

фильтр Калмана

прогноз:

$$\tilde{\mathbf{x}}^{-}_{(j)} = \mathbf{A}_{(j-1)}\tilde{\mathbf{x}}^{+}_{(j-1)},$$

$$\mathbf{P}^{-}_{(j)} = \mathbf{A}_{(j-1)}\mathbf{P}^{+}_{(j-1)}\mathbf{A}^{T}_{(j-1)} + \mathbf{Q}_{(j-1)}.$$

коррекция:

$$\tilde{\mathbf{x}}^{+}_{(j)} = \tilde{\mathbf{x}}^{-}_{(j)} + \mathbf{K}_{(j)}\left(\mathbf{z}_{(j)} - \mathbf{h}_{(j)}\tilde{\mathbf{x}}^{-}_{(j)}\right),$$

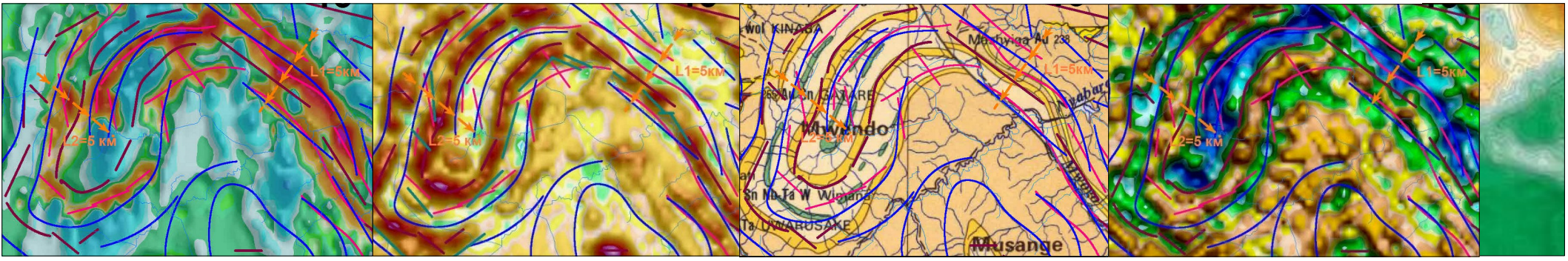
$$\mathbf{P}^{+}_{(j)} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{(j)}\mathbf{h}_{(j)}\right)\mathbf{P}^{-}_{(j)},$$

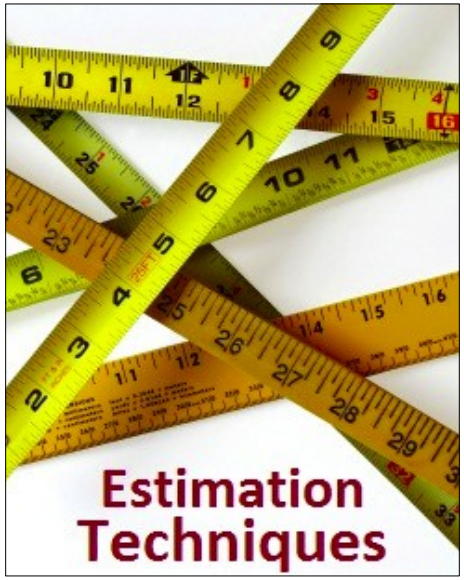
$$\mathbf{K}_{(j)} = \mathbf{P}^{-}_{(j)}\mathbf{h}^{T}_{(j)}\left(\mathbf{h}_{(j)}\mathbf{P}^{-}_{(j)}\mathbf{h}^{T}_{(j)} + \mathbf{R}_{(j)}\right)^{-1}.$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{-}_{(0)} = \mathrm{E}\,\mathbf{x}_{(0)}, \quad \mathbf{P}^{-}_{(0)} = \mathrm{E}\left(\mathbf{x}_{(0)} - \tilde{\mathbf{x}}_{(0)}\right)\left(\mathbf{x}_{(0)} - \tilde{\mathbf{x}}_{(0)}\right)^{T}.$$

$$\mathrm{E}\,\mathbf{q}_{(j)} = 0,\ \mathrm{E}\,\mathbf{q}_{(i)}\mathbf{q}^{T}_{(j)} = \mathbf{Q}_{(j)}\delta_{ij},$$

$$\mathrm{E}\,\mathbf{r}_{(j)} = 0,\ \mathrm{E}\,\mathbf{r}_{(i)}\mathbf{r}^{T}_{(j)} = \mathbf{R}_{(j)}\delta_{ij},$$





МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

фильтр Калмана

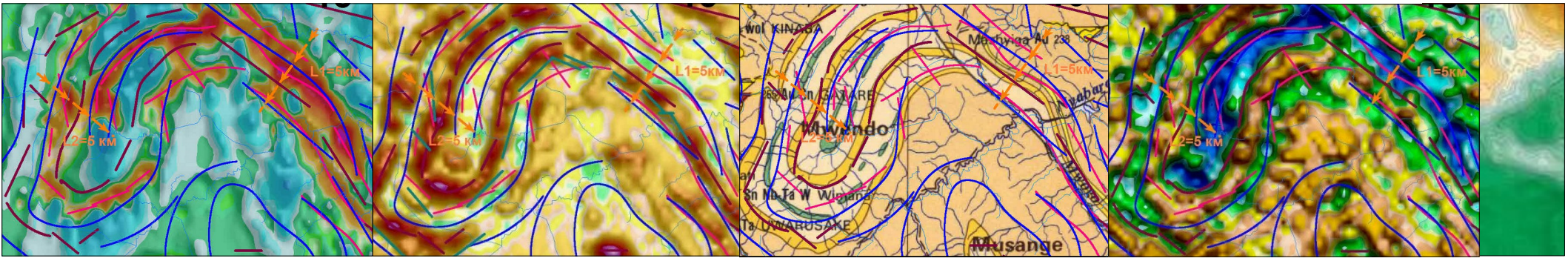
сглаживатель Калмана:

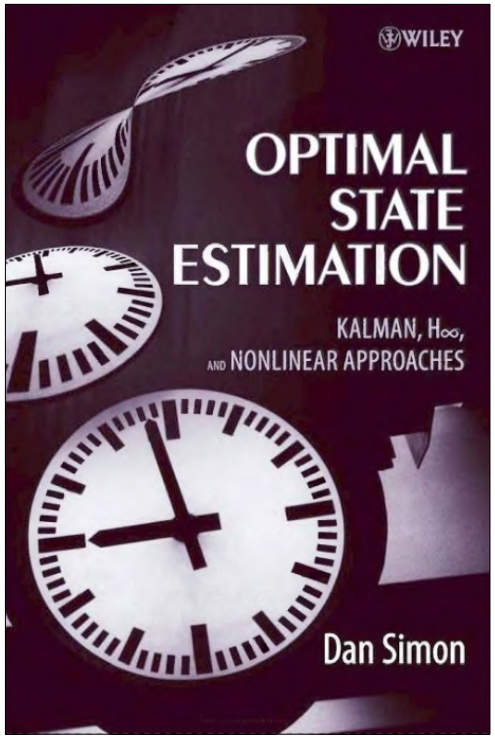
$$\mathbf{x}^{sm}_{(j)} = \mathbf{P}^{sm}_{(j)}\left[\left(\mathbf{P}^{+}_{(j)}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{x}}^{+}_{(j)} + \left(\mathbf{P}^{-R}_{(j)}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{x}}^{-R}_{(j)}\right],$$

$$\mathbf{P}^{sm}_{(j)} = \left[\left(\mathbf{P}^{+}_{(j)}\right)^{-1} + \left(\mathbf{P}^{-R}_{(j)}\right)^{-1}\right]^{-1}.$$

стохастическая мера оцениваемости:

$$\mu^{y}_{(j)} = 1 - \sqrt{\frac{\mathbf{c}^T \mathbf{P}^{+}_{(j)} \mathbf{c}}{\mathbf{c}^T \mathbf{P}_{(0,j)} \mathbf{c}}} \qquad y_{(j)} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_j, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$$





МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ **НЕ**ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

обобщенный фильтр Калмана

прогноз:

$$\widetilde{\mathbf{X}}^{-}_{(j)}=\mathbf{F}_{(j-1)}\left(\widetilde{\mathbf{X}}^{+}_{(j-1)}\right),\quad \widetilde{\mathbf{X}}^{+}_{(j-1)}=\widetilde{\mathbf{X}}^{-}_{(j-1)}+\widetilde{\mathbf{x}}^{+}_{(j-1)},$$

$$\mathbf{P}^{-}_{(j)}=\mathbf{A}_{(j-1)}\mathbf{P}^{+}_{(j-1)}\mathbf{A}^{T}_{(j-1)}+\mathbf{Q}_{(j-1)},\quad \mathbf{A}_{(j-1)}=\frac{\partial\,\mathbf{F}_{(j-1)}\left(\widetilde{\mathbf{X}}^{-}_{(j-1)}\right)}{\partial\,\mathbf{X}}$$

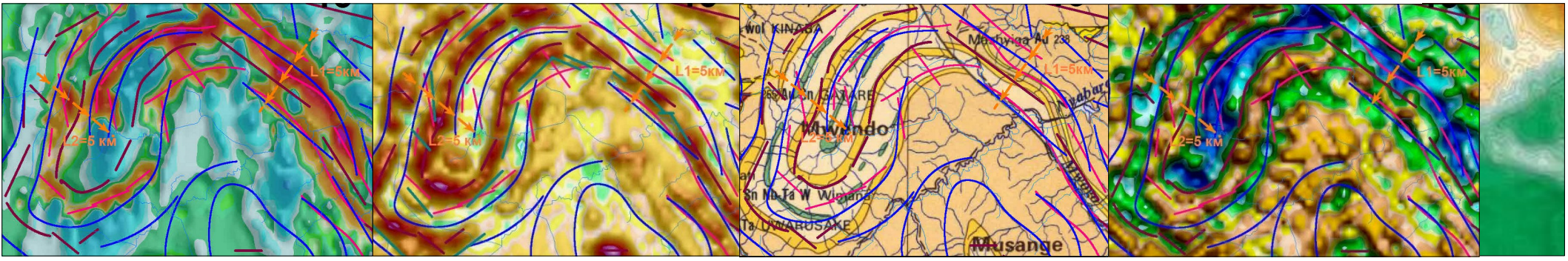
коррекция:

$$\widetilde{\mathbf{x}}^{+}_{(j)}=\mathbf{K}_{(j)}\left(\mathbf{Z}_{(j)}-\mathbf{H}_{(j)}\left(\widetilde{\mathbf{X}}^{-}_{(j)}\right)\right),$$

$$\mathbf{P}^{+}_{(j)}=\left(\mathbf{I}-\mathbf{K}_{(j)}\mathbf{h}_{(j)}\right)\mathbf{P}^{-}_{(j)},$$

$$\mathbf{K}_{(j)}=\mathbf{P}^{-}_{(j)}\mathbf{h}^{T}_{(j)}\left(\mathbf{h}_{(j)}\mathbf{P}^{-}_{(j)}\mathbf{h}^{T}_{(j)}+\mathbf{R}_{(j)}\right)^{-1},$$

$$\mathbf{h}_{(j)}=\frac{\partial\,\mathbf{H}_{(j)}\left(\widetilde{\mathbf{X}}^{-}_{(j)}\right)}{\partial\,\mathbf{X}}$$



ЧАСТЬ 3. НЕЛИНЕЙНЫЙ ПРОГНОЗ

АНСЦЕНТНЫЙ ФИЛЬТР КАЛМАНА

$$\widetilde{\mathbf{X}}^{(i)} = \widetilde{\mathbf{X}} + \widetilde{\mathbf{x}}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, 2n,$$

$$\widetilde{\mathbf{x}}^{(i)T} = \left[\left(n\widetilde{\mathbf{P}}\right)^{1/2}\right]_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\widetilde{\mathbf{x}}^{(i)T} = -\left[\left(n\widetilde{\mathbf{P}}\right)^{1/2}\right]_i, \quad i = n+1, \dots, 2n.$$

$$\widetilde{\mathbf{X}}^{(i)}=\widetilde{\mathbf{X}}+\widetilde{\mathbf{x}}^{(i)},\quad i=1,\dots,2n,$$
$$\widetilde{\mathbf{x}}^{(i)T}=\left[\left(n\widetilde{\mathbf{P}}\right)^{1/2}\right]_i,\quad i=1,\dots,n,$$
$$\widetilde{\mathbf{x}}^{(i)T}=-\left[\left(n\widetilde{\mathbf{P}}\right)^{1/2}\right]_i,\quad i=n+1,\dots,2n.$$

АНСЦЕНТНЫЙ ФИЛЬТР КАЛМАНА

прогноз:

$$\widetilde{\mathbf{X}}^{(i)}_{(j)}=\mathbf{F}_{(j-1)}\left(\widetilde{\mathbf{X}}^{(i)}_{(j-1)}\right),\quad i=1,\dots,2n,$$
$$\widetilde{\mathbf{X}}^{-}_{(j)}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\widetilde{\mathbf{X}}^{(i)}_{(j)},$$
$$\mathbf{P}^{-}_{(j)}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\left(\widetilde{\mathbf{X}}^{(i)}_{(j)}-\widetilde{\mathbf{X}}^{-}_{(j)}\right)\left(\widetilde{\mathbf{X}}^{(i)}_{(j)}-\widetilde{\mathbf{X}}^{-}_{(j)}\right)^T+\mathbf{Q}_{(j-1)}.$$

ЧАСТЬ 4. НЕЛИНЕЙНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ

$$\widetilde{\mathbf{X}}^{(i)}=\widetilde{\mathbf{X}}+\widetilde{\mathbf{x}}^{(i)},\quad i=1,\dots,2n,$$
$$\widetilde{\mathbf{x}}^{(i)T}=\left[\left(n\widetilde{\mathbf{P}}\right)^{1/2}\right]_i,\quad i=1,\dots,n,$$
$$\widetilde{\mathbf{x}}^{(i)T}=-\left[\left(n\widetilde{\mathbf{P}}\right)^{1/2}\right]_i,\quad i=n+1,\dots,2n.$$

АНСЦЕНТНЫЙ ФИЛЬТР КАЛМАНА

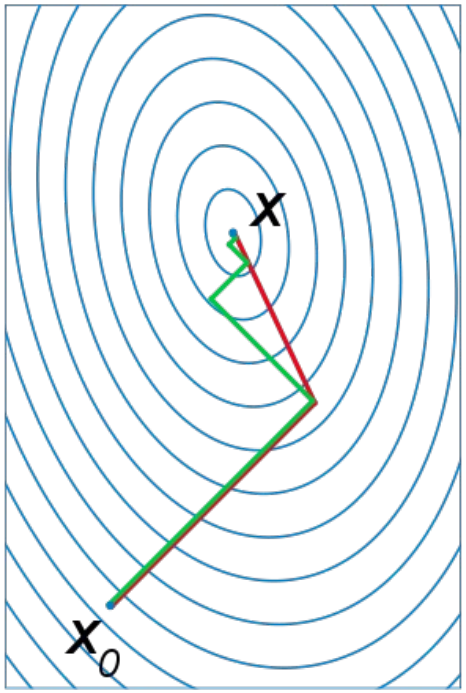
$$\widetilde{\mathbf{Z}}^{(i)}_{(j)}=\mathbf{H}_{(j)}\left(\widetilde{\mathbf{X}}^{(i)}_{(j-1)}\right),\quad i=1,\dots,2n,\quad \widetilde{\mathbf{Z}}_{(j)}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\widetilde{\mathbf{Z}}^{(i)}_{(j)},$$

коррекция:

$$\mathbf{P}_{ZZ(j)}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\left(\widetilde{\mathbf{Z}}^{(i)}_{(j)}-\widetilde{\mathbf{Z}}_{(j)}\right)\left(\widetilde{\mathbf{Z}}^{(i)}_{(j)}-\widetilde{\mathbf{Z}}_{(j)}\right)^T+\mathbf{R}_{(j)},$$

$$\mathbf{P}_{XZ(j)}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\left(\widetilde{\mathbf{X}}^{(i)}_{(j)}-\widetilde{\mathbf{X}}^{-}_{(j)}\right)\left(\widetilde{\mathbf{Z}}^{(i)}_{(j)}-\widetilde{\mathbf{Z}}_{(j)}\right)^T,$$

$$\mathbf{K}_{(j)}=\mathbf{P}_{XZ(j)}\mathbf{P}^{-1}_{ZZ(j)},$$
$$\widetilde{\mathbf{X}}^{+}_{(j)}=\widetilde{\mathbf{X}}^{-}_{(j)}+\mathbf{K}_{(j)}\left(\mathbf{Z}_{(j)}-\widetilde{\mathbf{Z}}_{(j)}\right),$$
$$\mathbf{P}^{+}_{(j)}=\mathbf{P}^{-}_{(j)}-\mathbf{K}_{(j)}\mathbf{P}_{ZZ(j)}\mathbf{K}^{T}_{(j)}.$$



МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ **НЕ**ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

итерационный обобщенный фильтр Калмана

$$\widetilde{\mathbf{x}}_{(j)}^{(k+1)}=\widetilde{\mathbf{x}}_{(j)}^{(k)}+\mathbf{K}_{(j)}^{(k)}\left\{\mathbf{Z}_{(j)}-\mathbf{H}_{(j)}\left(\widetilde{\mathbf{X}}_{(j)}^{-}+\widetilde{\mathbf{x}}_{(j)}^{(k)}\right)\right\},$$

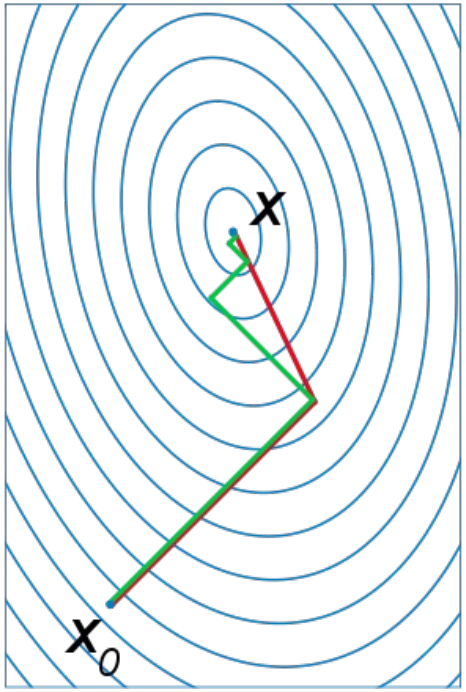
$$\mathbf{P}_{(j)}^{(k)}=\left(\mathbf{I}-\mathbf{K}_{(j)}^{(k)}\mathbf{h}_{(j)}^{(k)}\right)\mathbf{P}_{(j)}^{(k-1)},$$

$$\mathbf{K}_{(j)}^{(k)}=\mathbf{P}_{(j)}^{(k-1)}\mathbf{h}_{(j)}^{(k)T}\left(\mathbf{h}_{(j)}^{(k)}\mathbf{P}_{(j)}^{(k-1)}\mathbf{h}_{(j)}^{(k)T}+\mathbf{R}_{(j)}\right)^{-1},$$

$$\mathbf{h}_{(j)}^{(k)}=\frac{\partial\mathbf{H}_{(j)}\left(\widetilde{\mathbf{X}}_{(j)}^{-}+\widetilde{\mathbf{x}}_{(j)}^{(k)}\right)}{\partial\mathbf{X}},$$

$$\widetilde{\mathbf{x}}_{j}^{(0)}=0,\quad \mathbf{P}_{(j)}^{(0)}=\mathbf{P}_{(j)}^{-},$$

Havlik and Straka, 2015. Performance evaluation of iterated extended Kalman filter with variable step-length / J. Havlik and O. Straka // Journal of Physics: Conference Series.- 2015.- 659.- P. 12-22



МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ **НЕ**ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

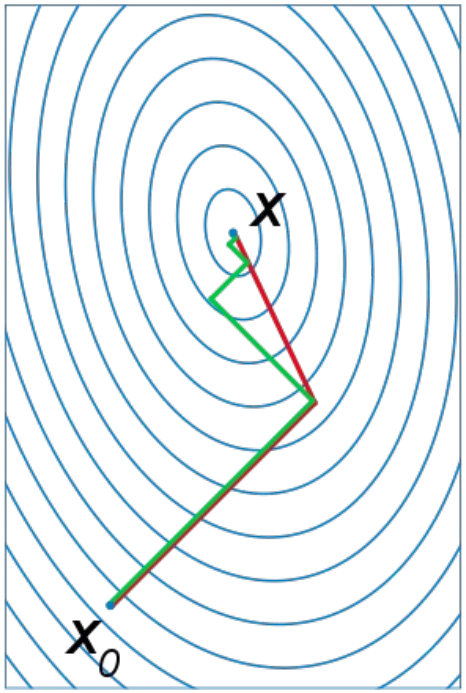
условия выхода

$$\|\mathbf{Z}_{(j)} - \mathbf{H}_{(j)}(\widetilde{\mathbf{X}}^{-}_{(j)} + \widetilde{\mathbf{x}}^{(k)}_{(j)})\| < V_{th}$$

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}}, \quad \dim \mathbf{a} = \dim \mathbf{Z}$$

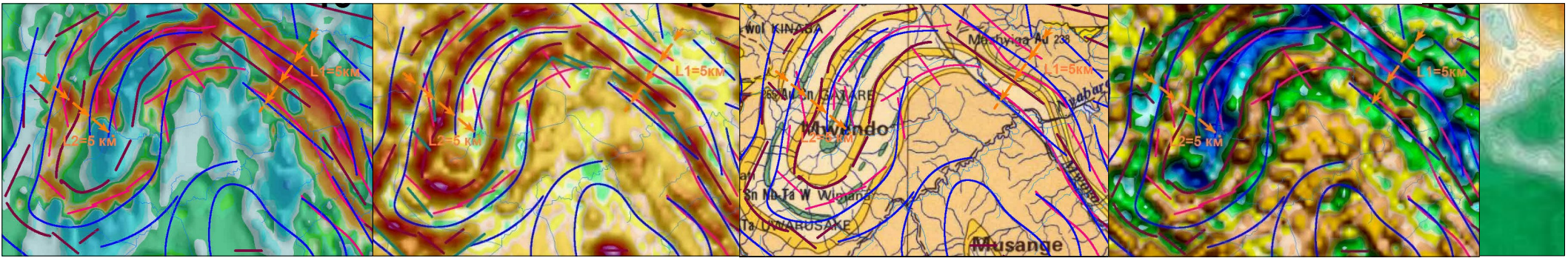
скорость сходимости

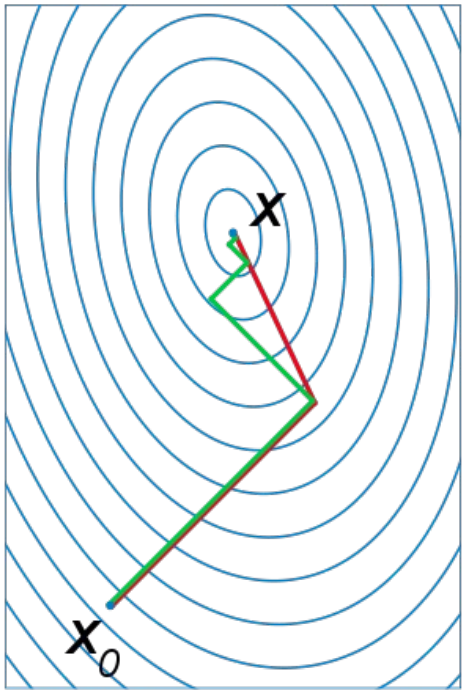
$$\mathbf{P}^{(k)-}_{(j)} = \mathbf{P}^{(k-1)-}_{(j)}$$



ФИЛЬТР КАЛМАНА И ДРУГИЕ МЕТОДЫ

$$\tilde{\mathbf{x}}^{+}_{(j)} = \mathbf{P}^{-}_{(j)}\mathbf{h}^{T}_{(j)}\left(\mathbf{h}_{(j)}\mathbf{P}^{-}_{(j)}\mathbf{h}^{T}_{(j)} + \mathbf{R}_{(j)}\right)^{-1}\left(\mathbf{Z}_{(j)} - \mathbf{H}_{(j)}\left(\tilde{\mathbf{X}}^{-}_{(j)}\right)\right)$$





ФИЛЬТР КАЛМАНА И ДРУГИЕ МЕТОДЫ

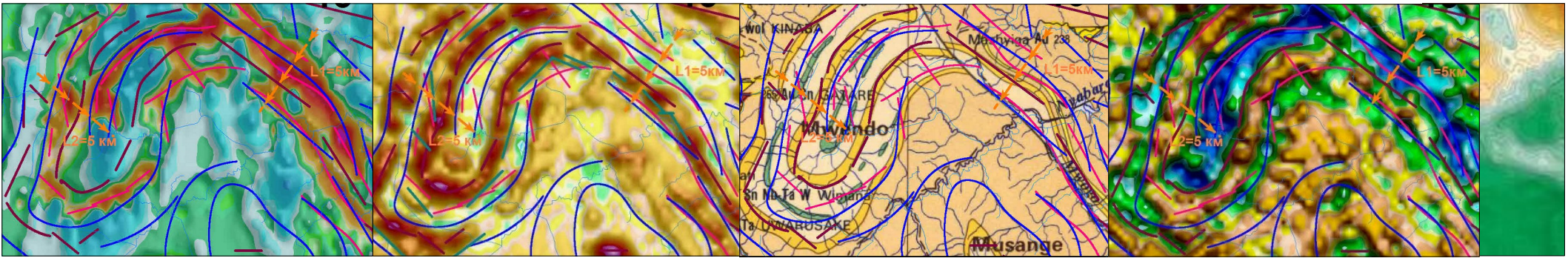
$$\tilde{\mathbf{x}}^{+}_{(j)} = \left(\mathbf{P}^{--1}_{(j)} + \mathbf{h}^{T}_{(j)}\mathbf{R}^{-1}_{j}\mathbf{h}_{(j)}\right)^{-1}\mathbf{h}^{T}_{(j)}\mathbf{R}^{-1}_{(j)}\left(\mathbf{Z}_{(j)} - \mathbf{H}_{(j)}\left(\tilde{\mathbf{X}}^{-}_{(j)}\right)\right),$$

$$\mathbf{x}^{T}\mathbf{P}^{--1}_{(j)}\mathbf{x} + \left(\mathbf{Z}_{(j)} - \mathbf{H}_{(j)}\left(\tilde{\mathbf{X}}^{-}_{(j)} + \mathbf{x}\right)\right)^{T}\mathbf{R}^{-1}_{(j)}\left(\mathbf{Z}_{(j)} - \mathbf{H}_{(j)}\left(\tilde{\mathbf{X}}^{-}_{(j)} + \mathbf{x}\right)\right) \to \min_{\mathbf{x}}.$$

метод Гаусса-Ньютона;

метод Левенбега-Марквардта;

метод регуляризации Тихонова.

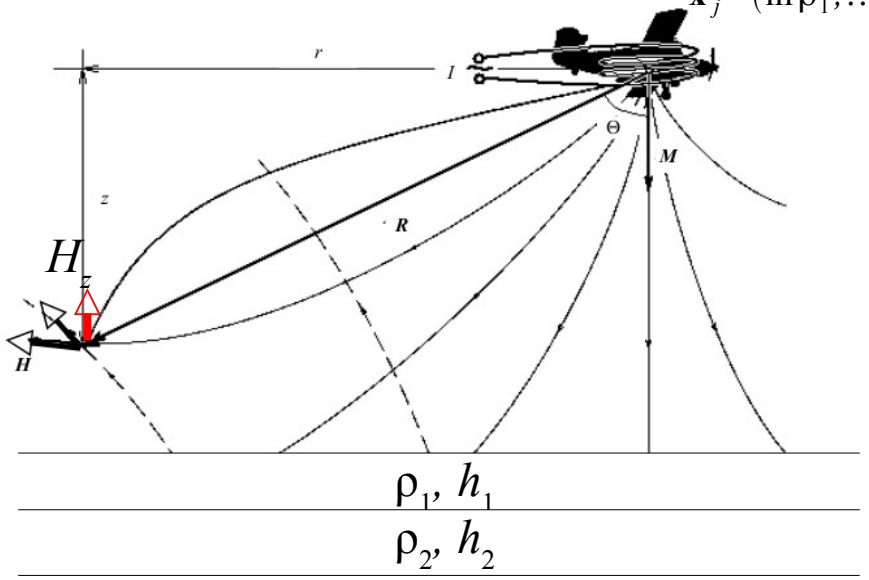


ЧАСТЬ 5. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

$$t_j: \quad \mathbf{z}_j = \left(\operatorname{Re} H_z(\omega_0), \operatorname{Im} H_z(\omega_0), \ldots, \operatorname{Re} H_z(\omega_K), \operatorname{Im} H_z(\omega_K), \frac{dH_z(\delta t_0)}{dt}, \ldots, \frac{dH_z(\delta t_S)}{dt} \right), \quad \mathbf{z}_j \in \mathbf{R}^N$$

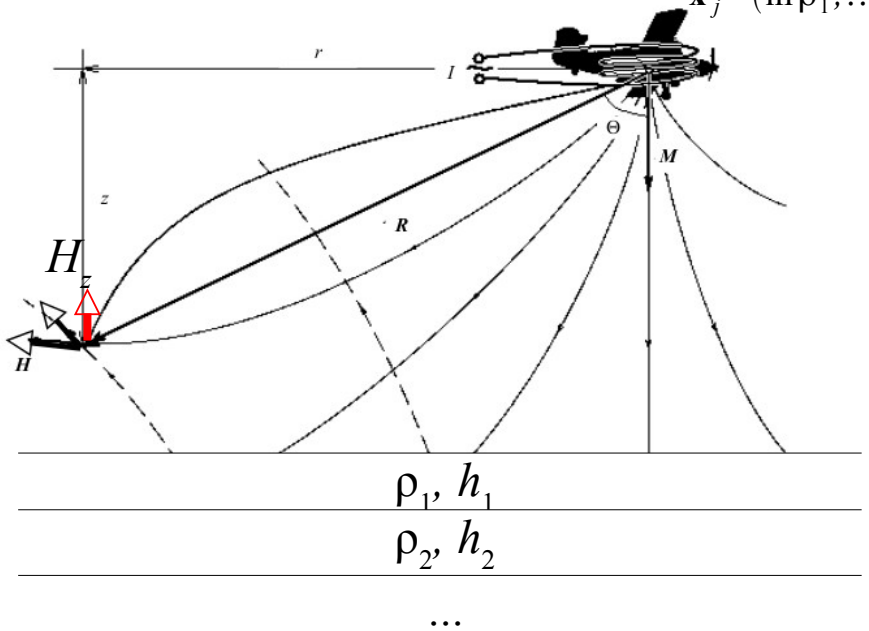
$$\mathbf{x}_j = (\ln \rho_1, \ldots, \ln \rho_m, \ln h_1, \ldots, \ln h_{m-1}), \quad \mathbf{x}_j \in \mathbf{R}^M$$

$$\mathbf{z}_j = \mathbf{h}_j(\mathbf{x}_j) + \mathbf{r}_j, \quad E[\mathbf{r}_j] = 0, \quad E[\mathbf{r}_j \mathbf{r}_k^T] = \mathbf{R}_j \delta_{jk},$$



$$t_j:\quad \mathbf{z}_j=\left(\operatorname{Re}H_z(\omega_0),\operatorname{Im}H_z(\omega_0),\ldots,\operatorname{Re}H_z(\omega_K),\operatorname{Im}H_z(\omega_K),\frac{dH_z(\delta t_0)}{dt},\ldots,\frac{dH_z(\delta t_S)}{dt}\right),\quad \mathbf{z}_j\in\mathbf{R}^N$$

$$\mathbf{x}_j=(\ln\rho_1,\ldots,\ln\rho_m,\ln h_1,\ldots,\ln h_{m-1}),\quad \mathbf{x}_j\in\mathbf{R}^M$$



$$\mathbf{z}_j=\mathbf{h}_j(\mathbf{x}_j)+\mathbf{r}_j,\quad E[\mathbf{r}_j]=0,\quad E[\mathbf{r}_j\mathbf{r}_k^T]=\mathbf{R}_j\delta_{jk},$$

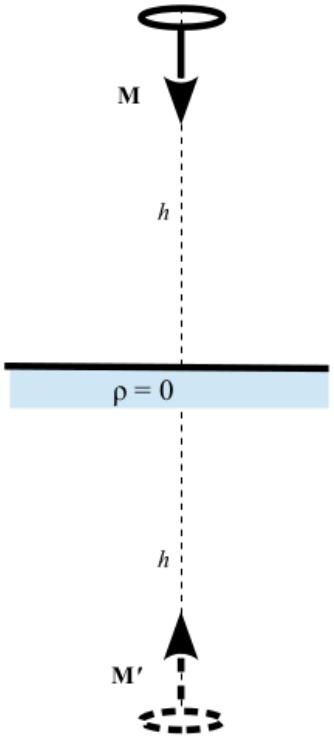
$$H_z(r,z,h_T,\omega)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty u(n_0,z,h_T,\omega)J_0(n_0r)n_0^2dn_0,$$

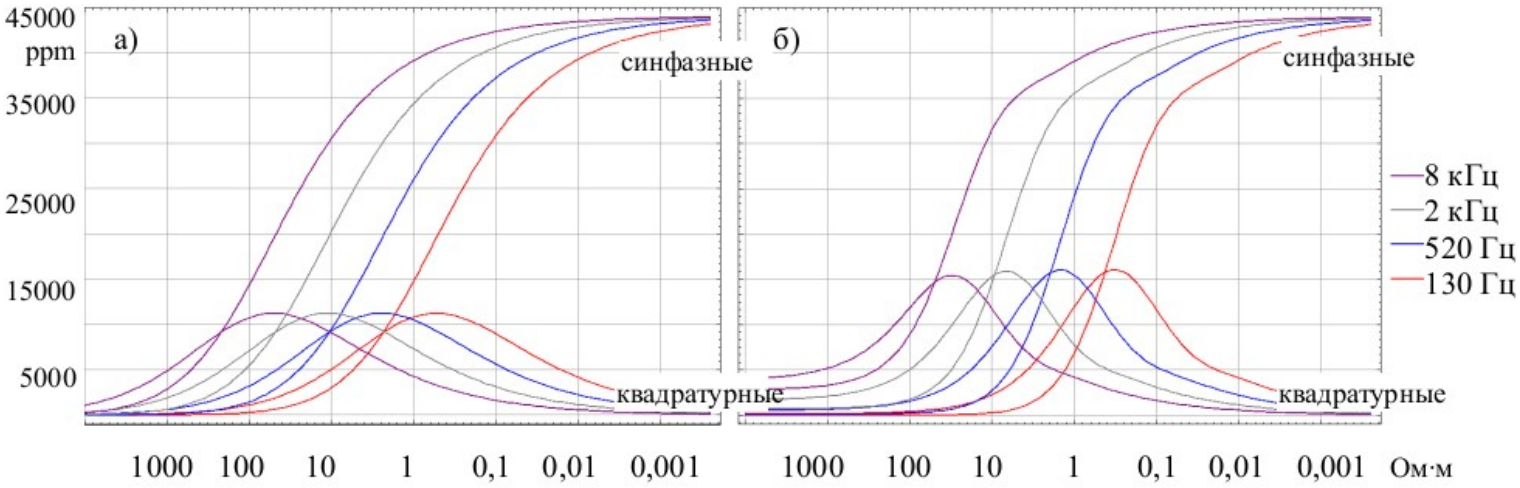
$$u(n_0,z,h_T,\omega)=\frac{M\,e^{-n_0(z+h_T)}}{2}\cdot\frac{n_1-n_0R^*}{n_1+n_0R^*},\quad n_j=\sqrt{n_0^2-\frac{i\omega\mu_0}{\rho_j}},\quad \operatorname{Re}n_j>0,$$

$$R^*=\operatorname{th}\left\{n_1h_1+\operatorname{arcth}\left[\frac{n_1}{n_2}\operatorname{th}\left(n_2h_2+\cdots\left(n_{K-1}h_{K-1}+\operatorname{arcth}\frac{n_{K-1}}{n_K}\right)\cdots\right)\right]\right\},$$

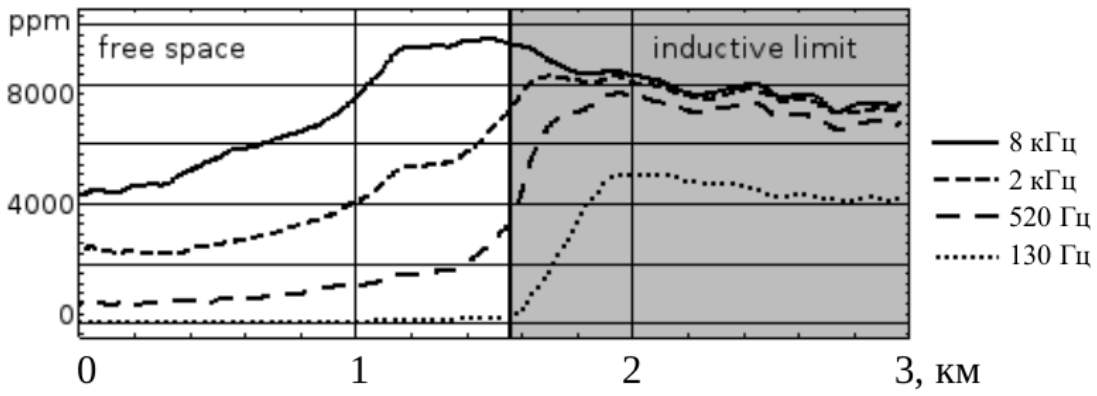
$$H_z(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{L}SH_z([1+2k]\omega_0)\cdot ST([1+2k]\omega_0)\cdot SR([1+2k]\omega_0)\cdot e^{-i[1+2k]\omega_0t}$$

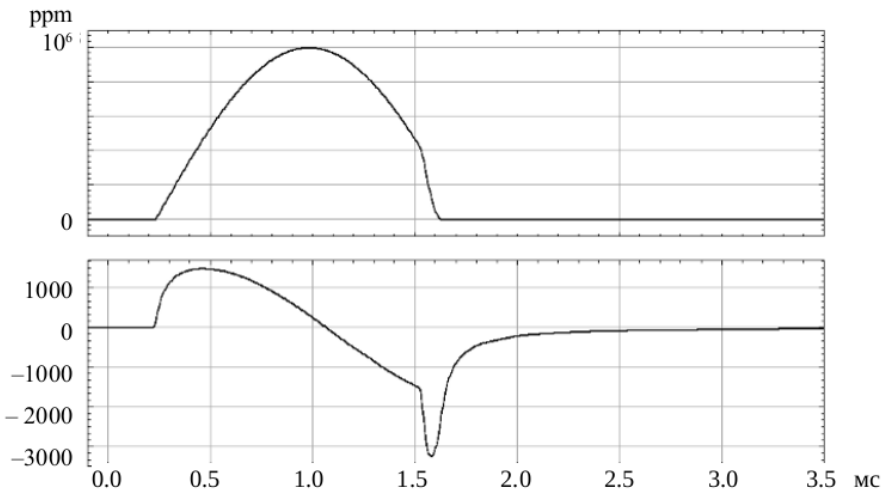
РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ





РАЗДЕЛЕНИЕ СИНФАЗНОЙ КОМПОНЕНТЫ И ПЕРВИЧНОГО ПОЛЯ





ОЦЕНКИ ШУМОВ

при измерении переменного магнитного поля в частотной области на расстоянии 70 метров от передатчика СКО ошибки скорректированного сигнала 100 ppm (система EM4H)

при измерении переменного магнитного поля в частотной области на расстоянии 40 метров от передатчика СКО ошибки скорректированного сигнала 10 ppm (система ЭКВАТОР);

при измерении переменного магнитного поля во временной области на расстоянии 40 метров от передатчика СКО ошибки скорректированного сигнала 1–10 ppm (система ЭКВАТОР)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СРЕДЫ

Laterally constrained
LCI

Vertically constrained
VCI

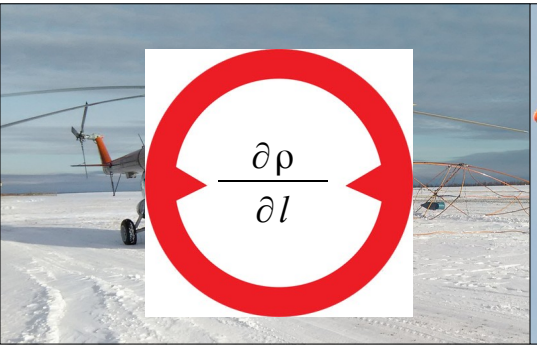
Singular value decomp.
SVD

$$\tilde{\mathbf{x}}^{+} = \tilde{\mathbf{x}}^{-} + \left[\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{G}^T \mathbf{G}\right]^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \left(\mathbf{z} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{x}}^{-}\right)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_j^{-} = \tilde{\mathbf{x}}_{j-1}^{+}$$

$$\mathbf{G} = \lambda \mathbf{I}$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ & \cdots & & & \\ & & \cdots & & \\ & 0 & 1 & 0 & \\ & & 0 & 1 & \end{pmatrix}$$



ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СРЕДЫ

Laterally constrained LCI

$$\tilde{\mathbf{x}}^{+}=\tilde{\mathbf{x}}^{-}+\left[\mathbf{H}^{T}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}+\mathbf{G}^{T}\mathbf{G}\right]^{-1}\mathbf{H}^{T}\mathbf{R}^{-1}\left(\mathbf{z}-\mathbf{H}\tilde{\mathbf{x}}^{-}\right)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{j}^{-}=\tilde{\mathbf{x}}_{j-1}^{+}$$

$$\mathbf{G}=\lambda\mathbf{I}$$

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ & \cdots & & & \\ & & \cdots & & \\ & 0 & 1 & 0 & \\ & & 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

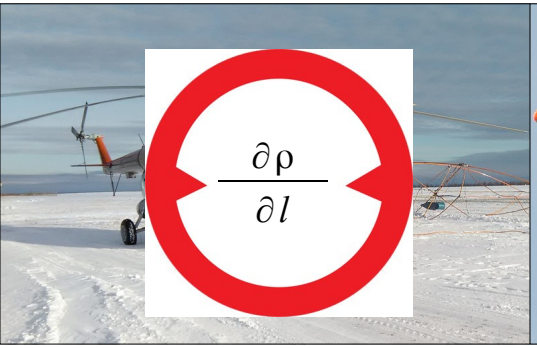
Vertically constrained VCI

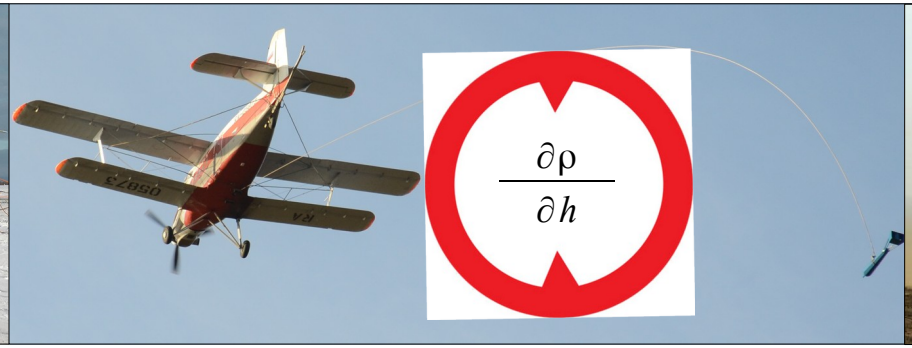
$$\tilde{\mathbf{x}}^{+}=\tilde{\mathbf{x}}^{-}+\left[\mathbf{H}^{T}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}+\mathbf{D}^{T}\mathbf{D}\right]^{-1}\mathbf{H}^{T}\mathbf{R}^{-1}\left(\mathbf{z}-\mathbf{H}\tilde{\mathbf{x}}^{-}\right)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{-}=0$$

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} 1/\delta h_1 & -1/\delta h_1 & & & \\ 1/\delta h_2^2 & -2/\delta h_2^2 & 1/\delta h_2^2 & & \\ & \cdots & & & \\ & & \cdots & & \\ & 1/\delta h_{N-1}^2 & -2/\delta h_{N-1}^2 & 1/\delta h_{N-1}^2 & \\ & & -1/\delta h_N & 1/\delta h_N & \end{pmatrix}$$

Singular value decomp. SVD





ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СРЕДЫ

Laterally constrained LCI

$$\tilde{\mathbf{x}}^{+}=\tilde{\mathbf{x}}^{-}+\left[\mathbf{H}^{T}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}+\mathbf{G}^{T}\mathbf{G}\right]^{-1}\mathbf{H}^{T}\mathbf{R}^{-1}\left(\mathbf{z}-\mathbf{H}\tilde{\mathbf{x}}^{-}\right)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{j}^{-}=\tilde{\mathbf{x}}_{j-1}^{+}$$

$$\mathbf{G}=\lambda\mathbf{I}$$

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ & \cdots & & & \\ & & \cdots & & \\ & 0 & 1 & 0 & \\ & & 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

Vertically constrained VCI

$$\tilde{\mathbf{x}}^{+}=\tilde{\mathbf{x}}^{-}+\left[\mathbf{H}^{T}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}+\mathbf{D}^{T}\mathbf{D}\right]^{-1}\mathbf{H}^{T}\mathbf{R}^{-1}\left(\mathbf{z}-\mathbf{H}\tilde{\mathbf{x}}^{-}\right)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{-}=0$$

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} 1/\delta h_1 & -1/\delta h_1 & & & \\ 1/\delta h_2^2 & -2/\delta h_2^2 & 1/\delta h_2^2 & & \\ & \cdots & & & \\ & & \cdots & & \\ & 1/\delta h_{N-1}^2 & -2/\delta h_{N-1}^2 & 1/\delta h_{N-1}^2 & \\ & & -1/\delta h_N & 1/\delta h_N & \end{pmatrix}$$

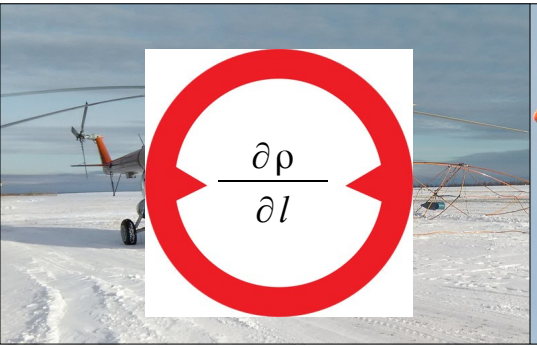
Singular value decomp. SVD

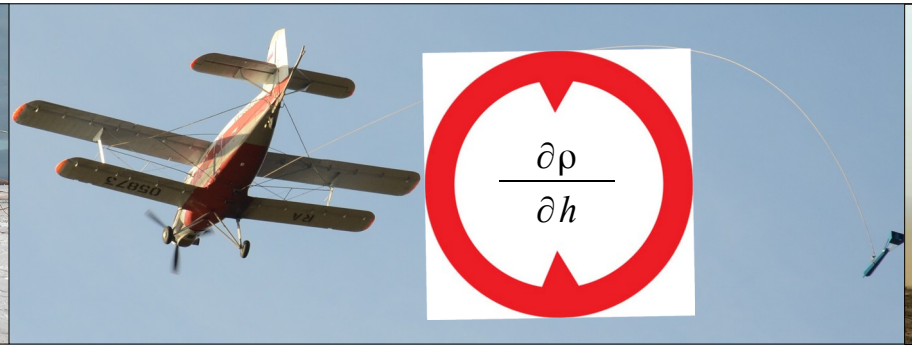
$$\tilde{\mathbf{x}}^{+}=\tilde{\mathbf{x}}^{-}+\left[\mathbf{H}^{T}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\right]^{-1}\mathbf{H}^{T}\mathbf{R}^{-1}\left(\mathbf{z}-\mathbf{H}\tilde{\mathbf{x}}^{-}\right)$$

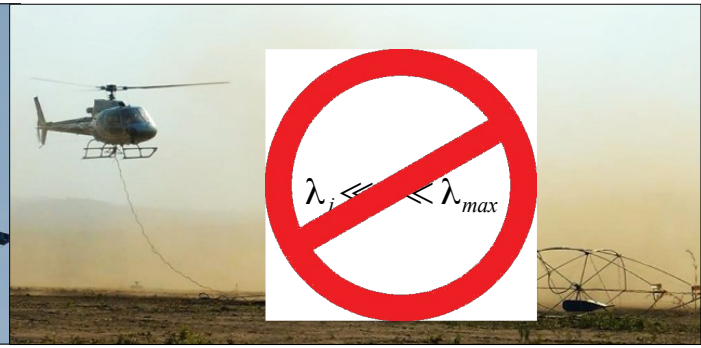
$$\tilde{\mathbf{x}}^{-}=0$$

$$\mathbf{R}=\mathbf{I}$$

$$\left[\mathbf{H}^{T}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\right]^{-1}\mathbf{H}^{T}\mathbf{R}^{-1} \rightarrow \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{U}^{T}$$







ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СРЕДЫ

Laterally constrained LCI

$$\tilde{\mathbf{x}}^{+}=\tilde{\mathbf{x}}^{-}+\left[\mathbf{H}^{T}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}+\mathbf{G}^{T}\mathbf{G}\right]^{-1}\mathbf{H}^{T}\mathbf{R}^{-1}\left(\mathbf{z}-\mathbf{H}\tilde{\mathbf{x}}^{-}\right)$$

Vertically constrained VCI

$$\tilde{\mathbf{x}}^{+}=\tilde{\mathbf{x}}^{-}+\left[\mathbf{H}^{T}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}+\mathbf{D}^{T}\mathbf{D}\right]^{-1}\mathbf{H}^{T}\mathbf{R}^{-1}\left(\mathbf{z}-\mathbf{H}\tilde{\mathbf{x}}^{-}\right)$$

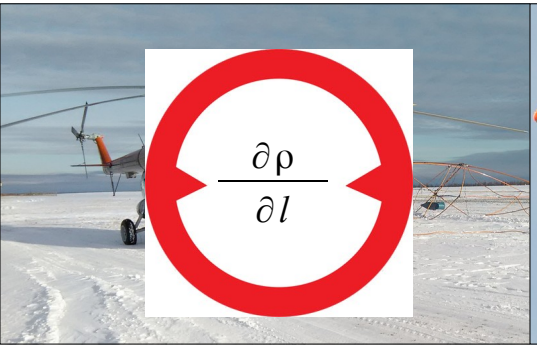
Singular value decomp. SVD

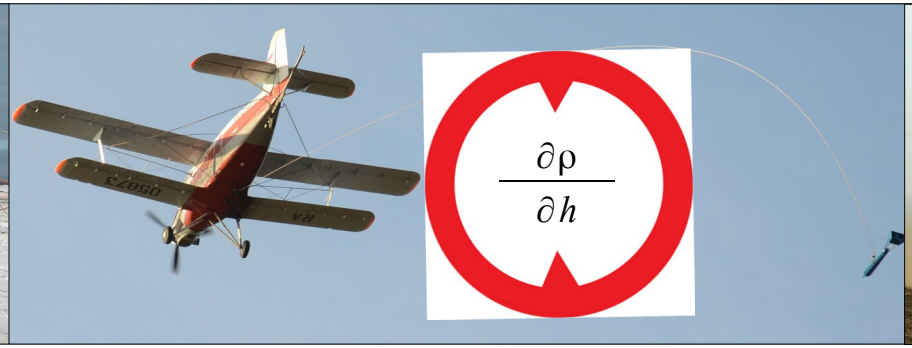
$$\tilde{\mathbf{x}}^{+}=\tilde{\mathbf{x}}^{-}+\left[\mathbf{H}^{T}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\right]^{-1}\mathbf{H}^{T}\mathbf{R}^{-1}\left(\mathbf{z}-\mathbf{H}\tilde{\mathbf{x}}^{-}\right)$$

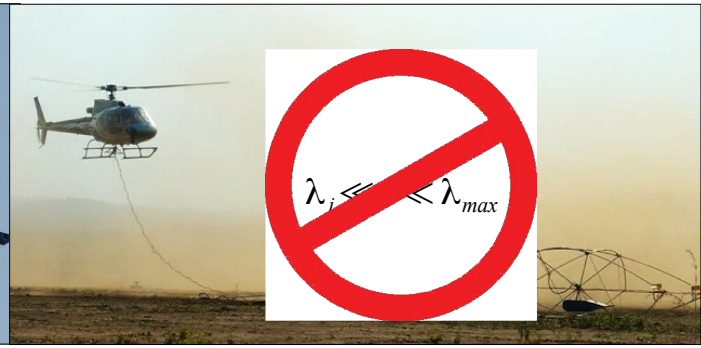
итерационный обобщенный фильтр Калмана

$$\tilde{\mathbf{x}}^{+}=\tilde{\mathbf{x}}^{-}+\mathbf{P}^{-}\mathbf{H}^{T}\left[\mathbf{R}+\mathbf{H}\mathbf{P}^{-}\mathbf{H}^{T}\right]^{-1}\left(\mathbf{z}-\mathbf{H}\tilde{\mathbf{x}}^{-}\right)$$

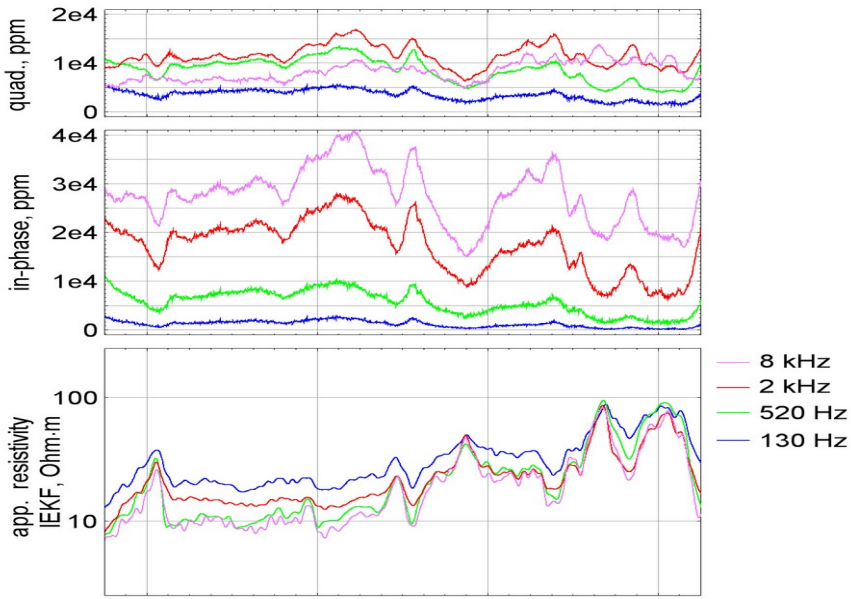
$\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{G}^{T}\mathbf{G}$, или $\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{D}^{T}\mathbf{D}$, или $\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{0}$

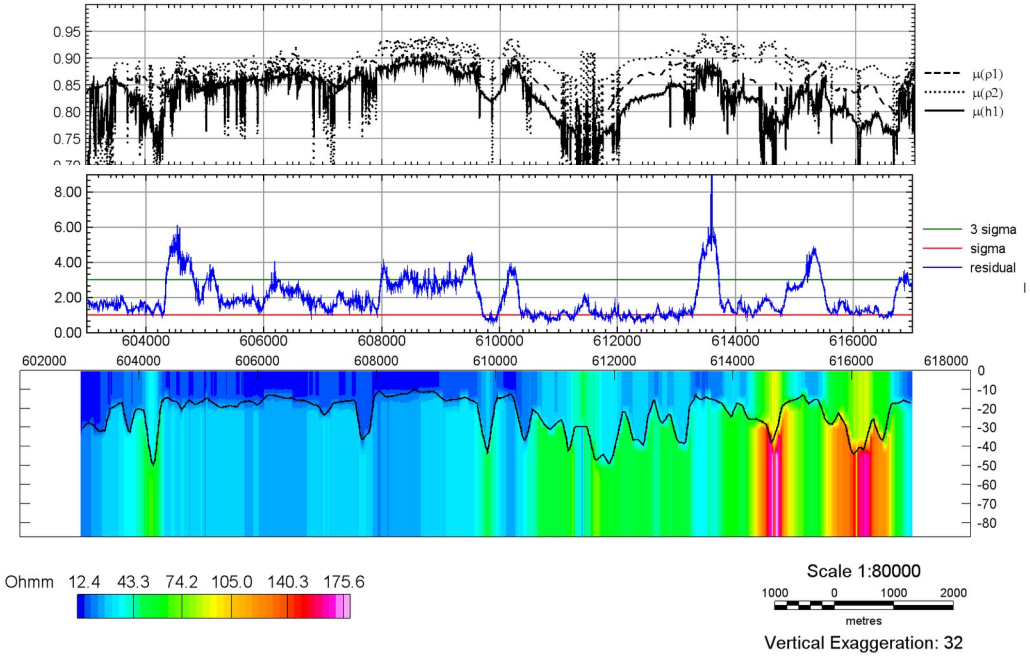




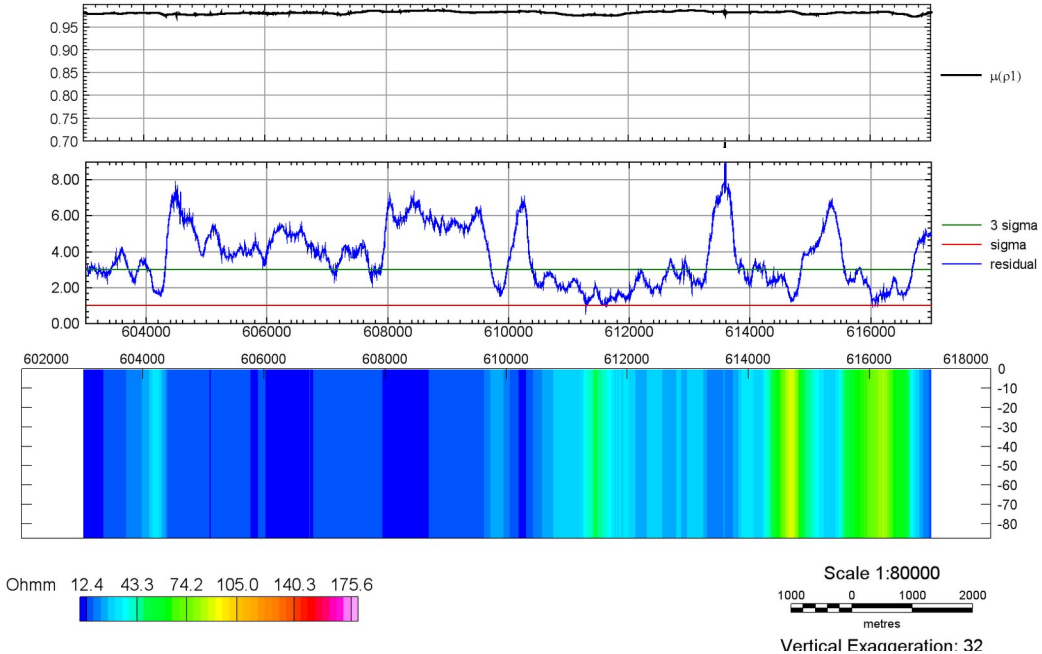


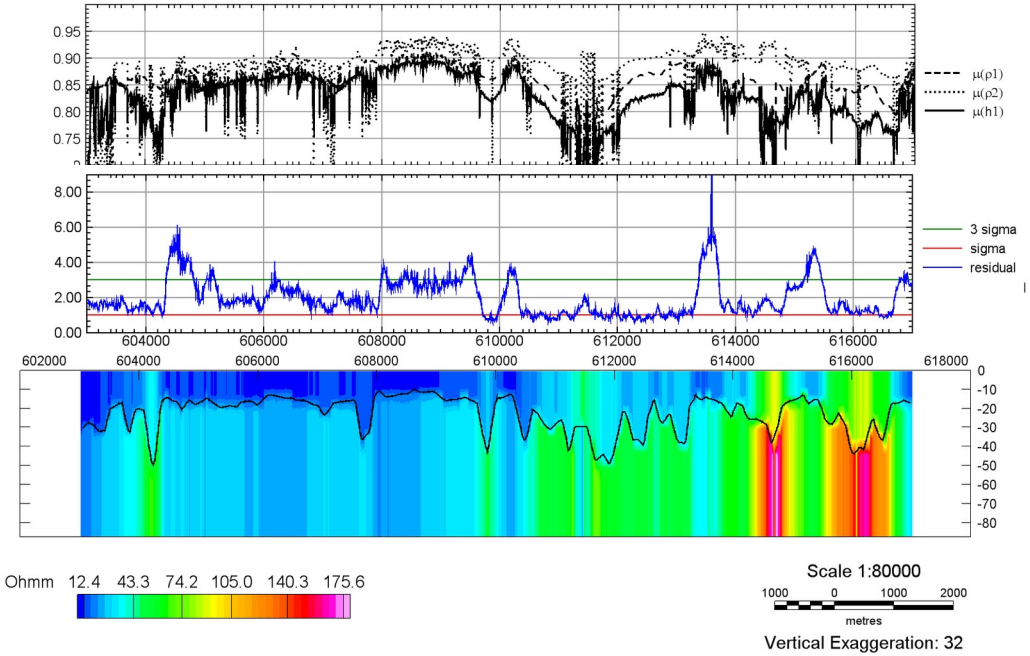
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СРЕДЫ



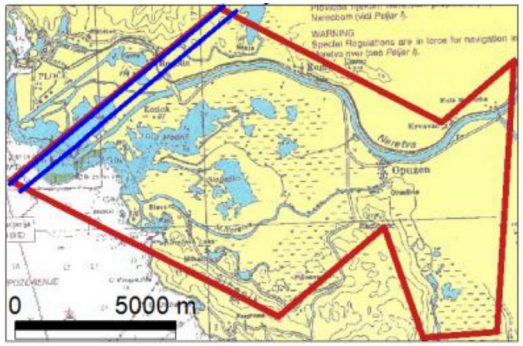


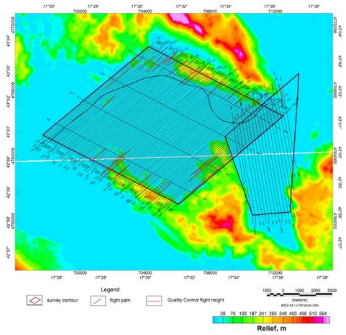
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СРЕДЫ

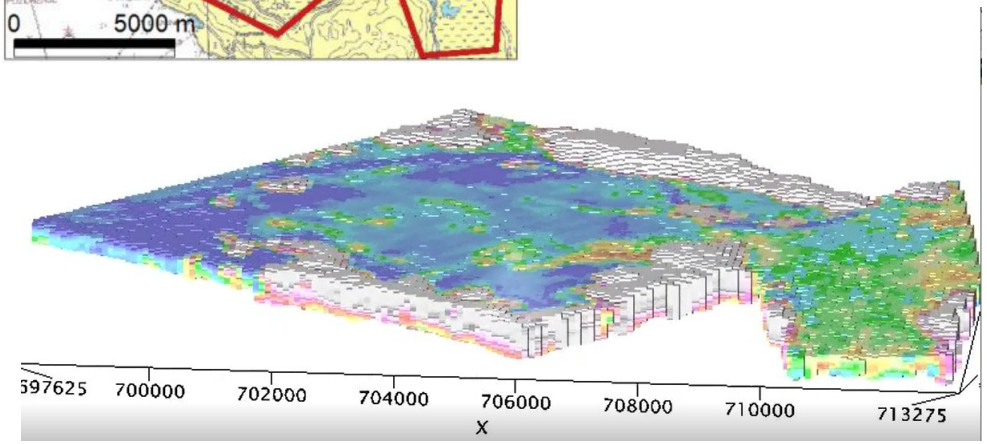


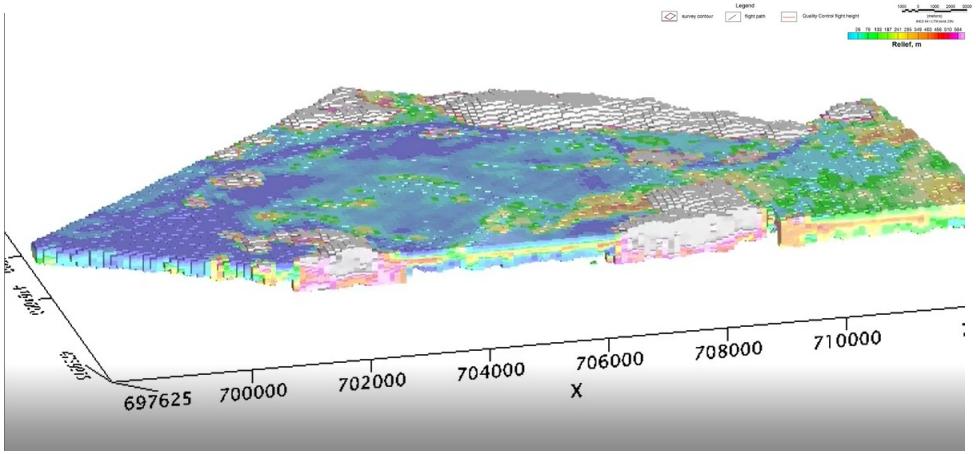


ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СРЕДЫ

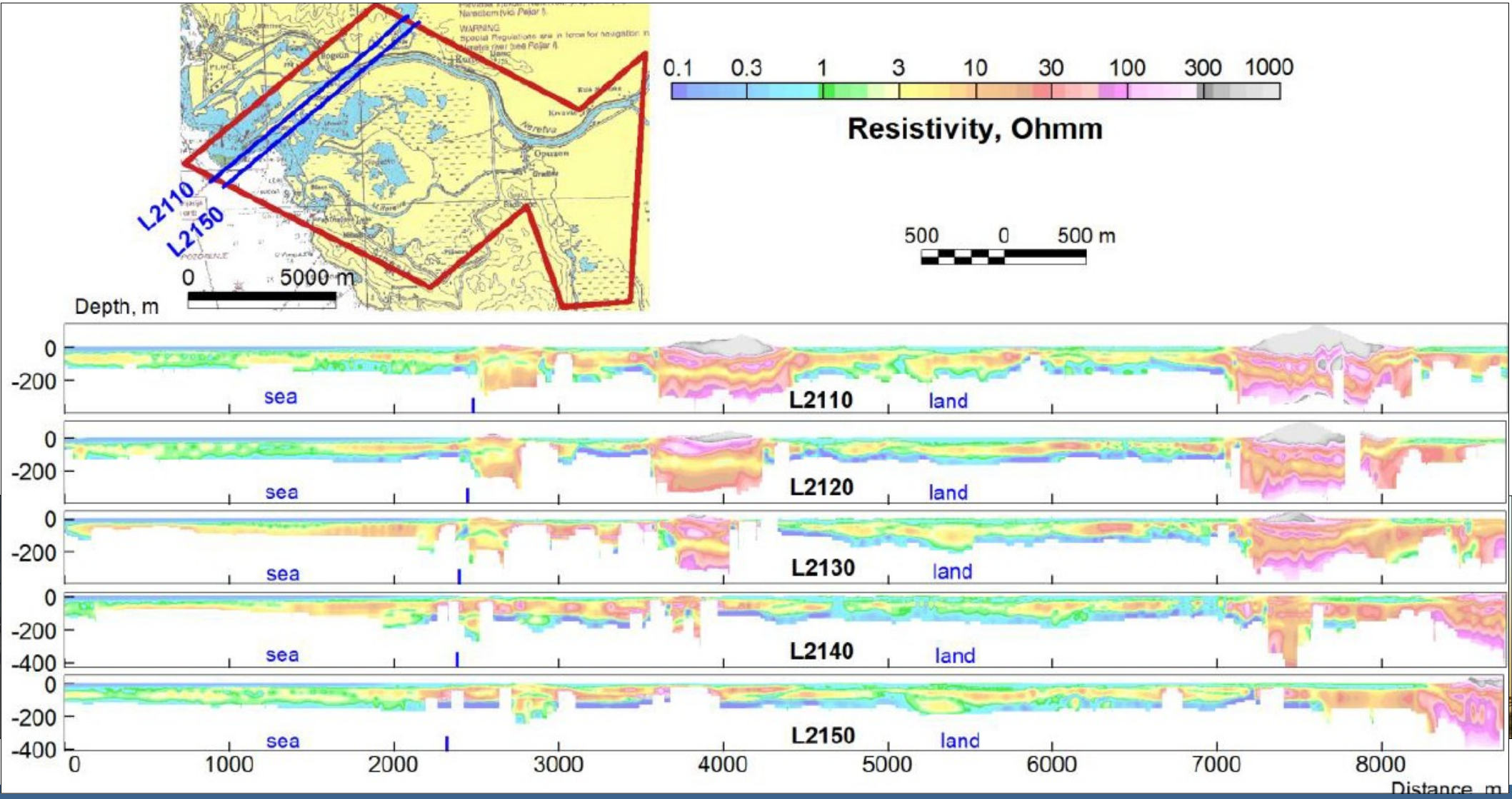




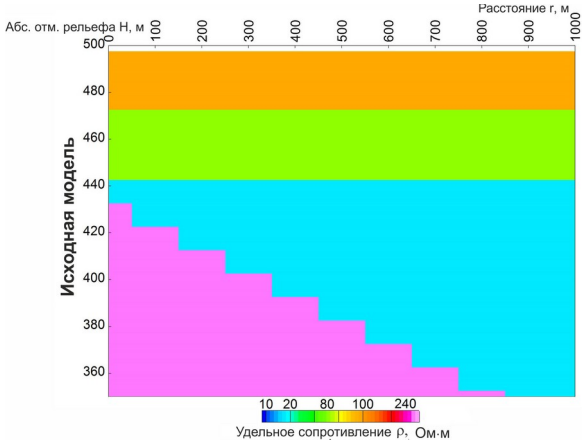




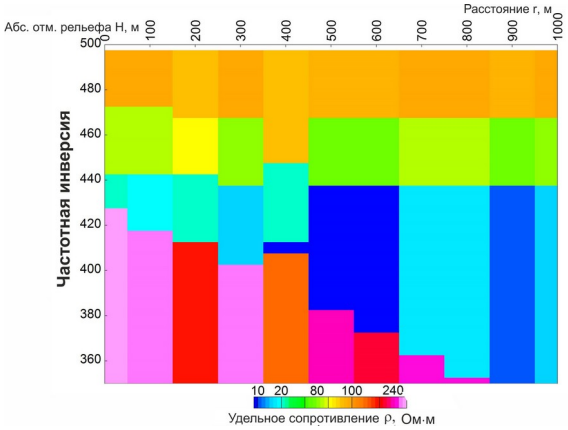
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СРЕДЫ

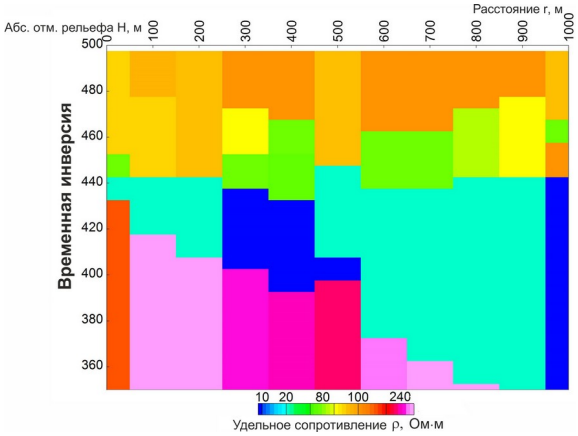


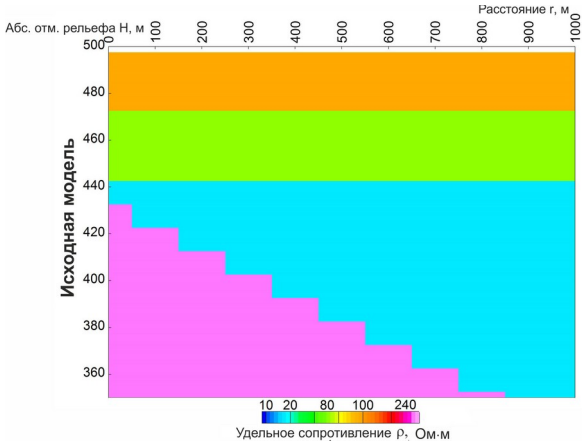
КОМБИНАЦИЯ ИЗМЕРЕНИЙ



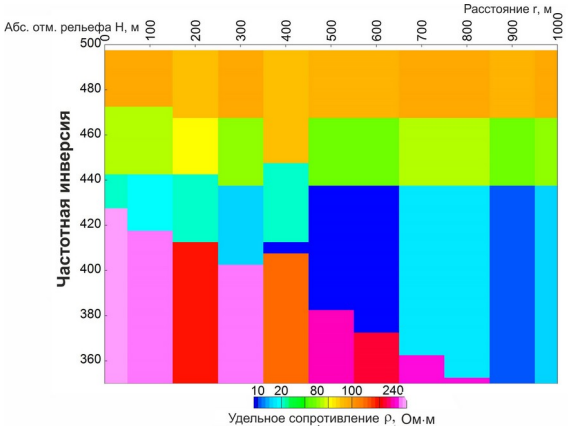
КОМБИНАЦИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

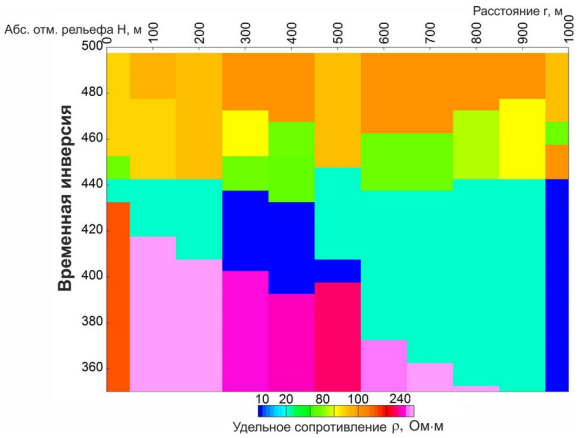


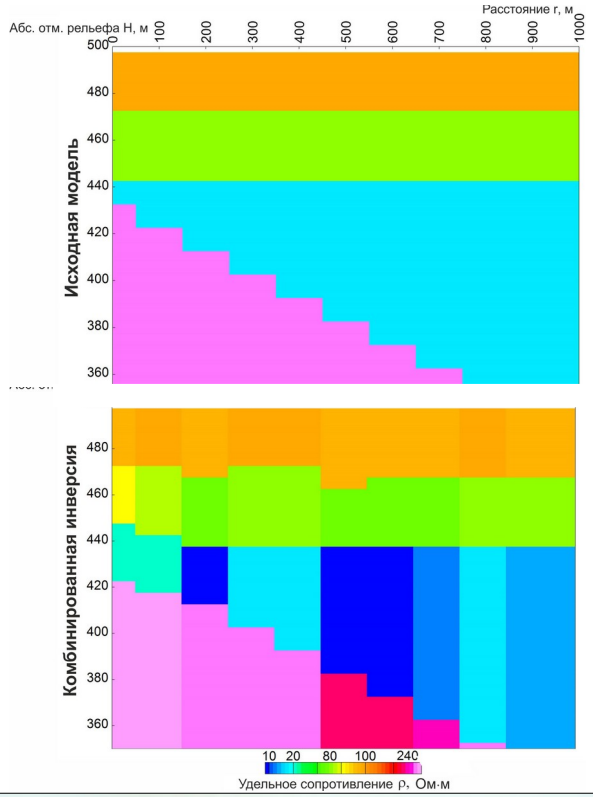


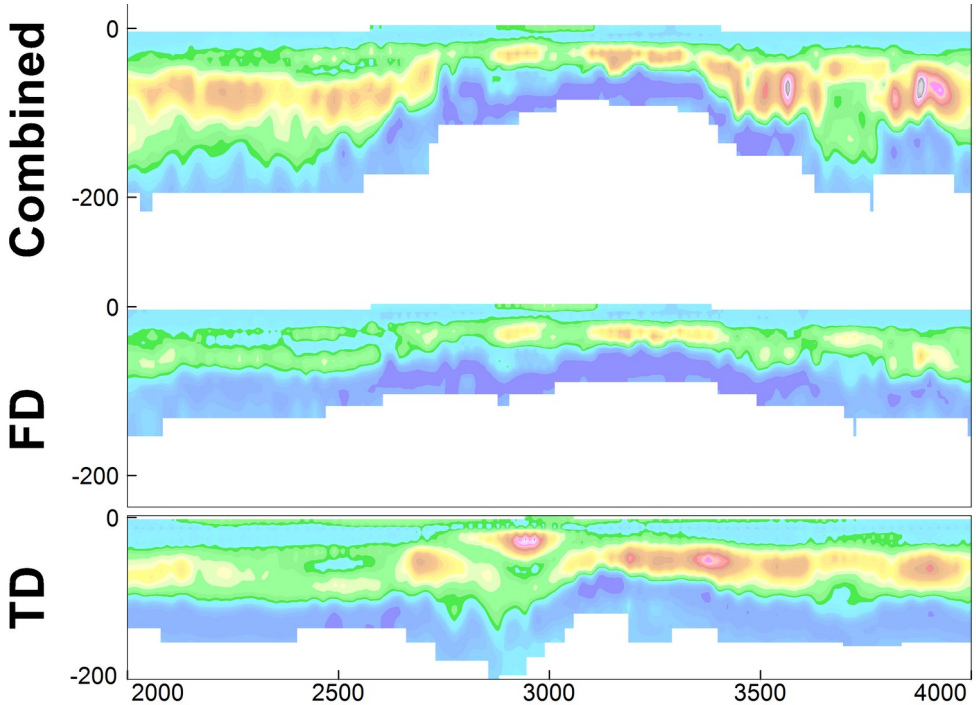


КОМБИНАЦИЯ ИЗМЕРЕНИЙ







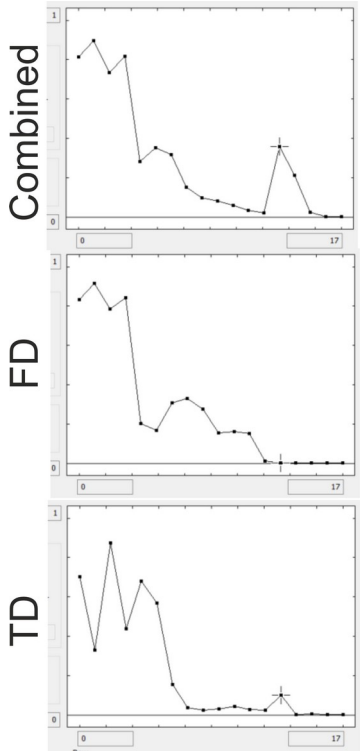


КОМБИНАЦИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МЕРЫ ОЦЕНИВАЕМОСТИ

$$\mu^{y}_{(j)} = 1 - \sqrt{\frac{\mathbf{c}^T \mathbf{P}^{+}_{(j)} \mathbf{c}}{\mathbf{c}^T \mathbf{P}_{(0,j)} \mathbf{c}}}$$

$$y_{(j)} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_j, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$$



ВЫВОДЫ

ВЫВОДЫ

1. Итерационный обобщенный ФК успешно применяется в задаче одномерной инверсии аэроэлектроразведочных данных.

ВЫВОДЫ

1. Итерационный обобщенный ФК успешно применяется в задаче одномерной инверсии аэроэлектроразведочных данных.
2. Итерационный обобщенный ФК можно считать обобщением метода Гаусса-Ньютона с различными вариантами регуляризации.

ВЫВОДЫ

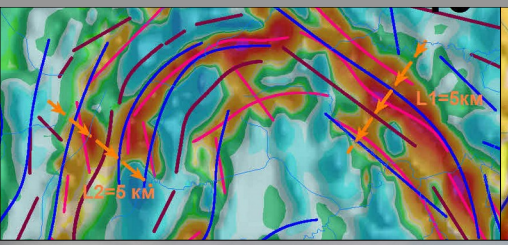
1. Итерационный обобщенный ФК успешно применяется в задаче одномерной инверсии аэроэлектроразведочных данных.
2. Итерационный обобщенный ФК можно считать обобщением метода Гаусса-Ньютона с различными вариантами регуляризации.
3. Можно рассматривать применение для более сложных моделей как в одномерных задачах (учет вызванной поляризации), так и в двух- и трехмерных постановках.

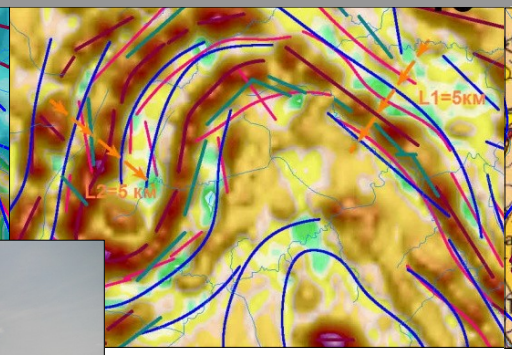
ВЫВОДЫ

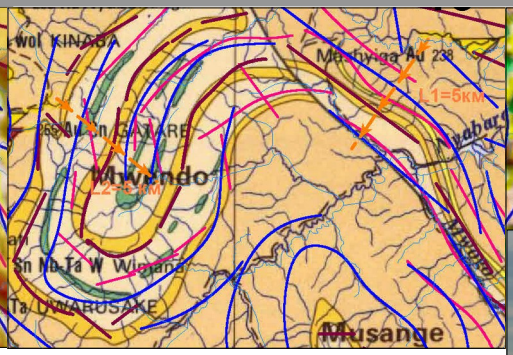
1. Итерационный обобщенный ФК успешно применяется в задаче одномерной инверсии аэроэлектроразведочных данных.
2. Итерационный обобщенный ФК можно считать обобщением метода Гаусса-Ньютона с различными вариантами регуляризации.
3. Можно рассматривать применение для более сложных моделей как в одномерных задачах (учет вызванной поляризации), так и в двух- и трехмерных постановках.
4. Калмановский подход позволяет проводить качественный анализ решения — ковариационная матрица ошибок оценки, стохастическая мера оцениваемости.

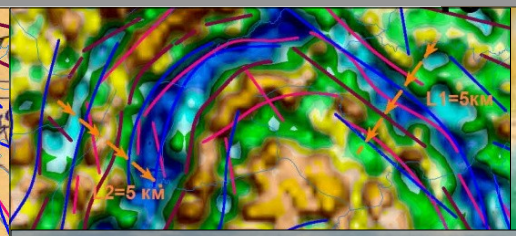
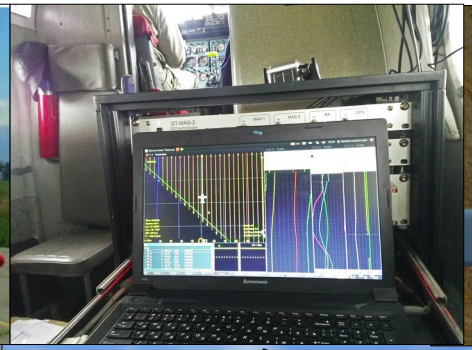
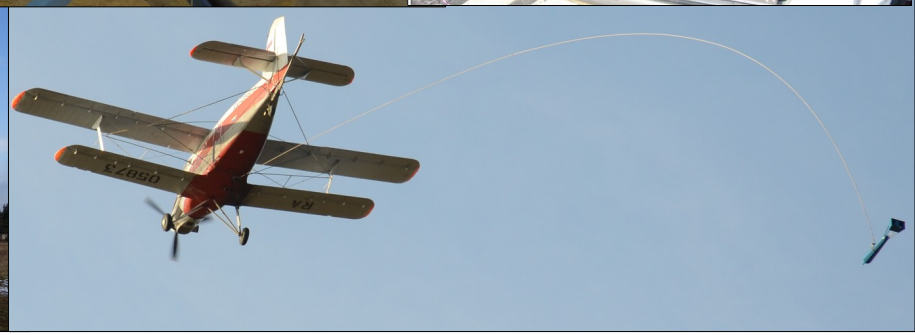
ВЫВОДЫ

1. Итерационный обобщенный ФК успешно применяется в задаче одномерной инверсии аэроэлектроразведочных данных.
2. Итерационный обобщенный ФК можно считать обобщением метода Гаусса-Ньютона с различными вариантами регуляризации.
3. Можно рассматривать применение для более сложных моделей как в одномерных задачах (учет вызванной поляризации), так и в двух- и трехмерных постановках.
4. Калмановский подход позволяет проводить качественный анализ решения — ковариационная матрица ошибок оценки, стохастическая мера оцениваемости.
5. Можно утверждать, что применение фильтра Калмана — один из вариантов регуляризации.









СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!