

Профессор В.И. Уткин и Принципы Управления на Скользящих Режима¹



1937–2022

Орлов Ю.В. CICESE Позняк А. С. CINVESTAV, Mexico o

¹Vadim I. Utkin and sliding mode control, Journal of the Franklin Institute , 2023, 360 (17), 12892-12921

Феномен Управления на Скользящих Режимах

"Профессор Вадим И. Уткин оставил одно из непревзойденных наследий в области техники управления. Регуляторы на скользящих режимах, созданные профессором Уткиным, который оставался лидером данной области на протяжении более 4 десятилетий, вероятно, как в исследованиях так и в приложениях востребованы более, чем любой другой класс регуляторов, за исключением ПИД-регуляторов. Такие методы, как model predictive control, backstepping, and H_∞ control, могут лишь претендовать на воздействие в будущем, которое будет сравнимо с диапазоном совокупного воздействия регуляторов на скользящих режимах."²

²"Professor Vadim I. Utkin has built one of the unmatched legacies in the field of control engineering. Sliding mode controllers, i.e, fathered and championed by Professor Utkin for over 4 decades, are probably more ubiquitous, both in the control practice and in research, than just about any other class of controllers except for PID. Methods such as model predictive control, backstepping, and H_∞ control can only aspire for an impact in the future, which is comparable to the range of cumulative impact of sliding mode control *M. Krstic et al Time-varying Feedback for Stabilization in Prescribed Finite Time*, **International Journal of Control**, 2017, Utkin 80 Special Issue

Феномен Управления на Скользящих Режимах

- 1 Непрерывное развитие начиная с 1960-х
- 2 Будучи ориентированным на управление в условиях неопределенности, предвосхитило развитие робастного управления
- 3 Новаторские методы (среди др.): метод эквивалентного управления описывает нулевую динамику, устойчивость скользящих режимов приводит к минимальной фазовости нелинейных систем, backstepping вдохновлен блочно-каноническим методом управления, предложенным в рамках управления на скользящих режимах.
- 4 Многочисленные монографии (Google search выдает названия более 25 монографий со словами sliding modes в заглавии) и журнальные публикации (только индекс цитирования работ профессора Уткина свыше 50 тысяч)
- 5 Широкий спектр приложений: силовые преобразователи, электромеханические и электроэнергетические системы, электродвигатели, электромобили и др.

Основные разделы теории

- Многомерные скользящие режимы
- Эквивалентное управление и его аппроксимация низкочастотным фильтром
- Наблюдатели на скользящих режимах и их использование в обратной связи для ослабления эффекта болтания (chattering phenomenon) в замкнутой цепи
- Дискретные скользящие режимы и неявная схема Эйлера интегрирования скользящих режимов
- Приведение к блочно-канонической форме и каскадный метод управления на скользящих режимах
- Интегральное управление на скользящих режимах
- Адаптивное управление на скользящих режимах
- Управление на скользящих режимах системами с распределенными параметрами и с запаздываниями

- 1 В 1960 г. дипломированный выпускник МЭИ Вадим Уткин начал свою научную карьеру в качестве инженера Института Проблем Управления АН СССР под руководством академика Б.Н. Петрова, будущего председателя совместной американо-советской космической программы. Первая опубликованная молодым специалистом работа (в журнале Автоматика и Телемеханика, 1962 г.) была посвящена синтезу оптимального управления без использования идеальных производных.

- 1 В 1960 г. дипломированный выпускник МЭИ Вадим Уткин начал свою научную карьеру в качестве инженера Института Проблем Управления АН СССР под руководством академика Б.Н. Петрова, будущего председателя совместной американо-советской космической программы. Первая опубликованная молодым специалистом работа (в журнале Автоматика и Телемеханика, 1962 г.) была посвящена синтезу оптимального управления без использования идеальных производных.
- 2 Вскоре он присоединился к группе будущего академика и вице-президента Академии Наук. С.В. Емельянова, основоположника Систем с Переменной Структурой, в рамках которых зародилось самостоятельное направление управления на скользящих режимах.

Хронологический Экскурс

- 1 В 1960 г. дипломированный выпускник МЭИ Вадим Уткин начал свою научную карьеру в качестве инженера Института Проблем Управления АН СССР под руководством академика Б.Н. Петрова, будущего председателя совместной американо-советской космической программы. Первая опубликованная молодым специалистом работа (в журнале Автоматика и Телемеханика, 1962 г.) была посвящена синтезу оптимального управления без использования идеальных производных.
- 2 Вскоре он присоединился к группе будущего академика и вице-президента Академии Наук. С.В. Емельянова, основоположника Систем с Переменной Структурой, в рамках которых зародилось самостоятельное направление управления на скользящих режимах.
- 3 В последующее десятилетие В. Уткин развил новые математические принципы управления на скользящих режимах многомерными нелинейными системами, на основе введенного им метода эквивалентного управления, который широко используется практически во всех публикациях в данной области. В 1964 г. им была защищена диссертация кандидата технических наук.

Хронологический Экскурс

- 1 В 1960 г. дипломированный выпускник МЭИ Вадим Уткин начал свою научную карьеру в качестве инженера Института Проблем Управления АН СССР под руководством академика Б.Н. Петрова, будущего председателя совместной американо-советской космической программы. Первая опубликованная молодым специалистом работа (в журнале Автоматика и Телемеханика, 1962 г.) была посвящена синтезу оптимального управления без использования идеальных производных.
- 2 Вскоре он присоединился к группе будущего академика и вице-президента Академии Наук. С.В. Емельянова, основоположника Систем с Переменной Структурой, в рамках которых зародилось самостоятельное направление управления на скользящих режимах.
- 3 В последующее десятилетие В. Уткин развил новые математические принципы управления на скользящих режимах многомерными нелинейными системами, на основе введенного им метода эквивалентного управления, который широко используется практически во всех публикациях в данной области. В 1964 г. им была защищена диссертация кандидата технических наук.
- 4 В отличие от существующих публикаций по системам с переменной структурой со скалярным управлением, было инициировано изучение многомерных скользящих режимов на пересечении нескольких поверхностей разрывов. Это предварило появление скользящих режимов высоких порядков, введенных в конце 1960-х Е.А. Барбашиным и Е.И. Геращенко.

- 1 В 1971 гг. была защищена диссертация доктора технических наук, результаты которой были затем интегрированы в ныне широко известные монографии
С.В. Емельянов, В.И. Уткин, В.А. Таран, Н.Е. Костылева, А.М. Шубладзе, В.Б. Езеров
Теория Систем с Переменной Структурой, 1970, Москва, Наука
V. Utkin, Sliding Modes in Control and Optimization, Springer-Verlag, Berlin, 1992,
опубликованные в престижных издательствах и послужившие источником вдохновения последующих поколений к систематическому развитию теории управления на скользящих режимах.

- 1 В 1971 гг. была защищена диссертация доктора технических наук, результаты которой были затем интегрированы в ныне широко известные монографии
С.В. Емельянов, В.И. Уткин, В.А. Таран, Н.Е. Костылева, А.М. Шубладзе, В.Б. Езеров
Теория Систем с Переменной Структурой, 1970, Москва, Наука
V. Utkin, Sliding Modes in Control and Optimization, Springer-Verlag, Berlin, 1992,
опубликованные в престижных издательствах и послужившие источником вдохновения последующих поколений к систематическому развитию теории управления на скользящих режимах.
- 2 В конце 60-х началось многолетнее советско-югославское сотрудничество между Институтом Проблем Управления и Энергоинвест, Сараево, которое привело к значительному прогрессу как в теории скользящих режимов так и в их приложениях к управлению электроприводами.

- 1 В 1971 гг. была защищена диссертация доктора технических наук, результаты которой были затем интегрированы в ныне широко известные монографии
С.В. Емельянов, В.И. Уткин, В.А. Таран, Н.Е. Костылева, А.М. Шубладзе, В.Б. Езеров
Теория Систем с Переменной Структурой, 1970, Москва, Наука
V. Utkin, Sliding Modes in Control and Optimization, Springer-Verlag, Berlin, 1992,
опубликованные в престижных издательствах и послужившие источником вдохновения последующих поколений к систематическому развитию теории управления на скользящих режимах.
- 2 В конце 60-х началось многолетнее советско-югославское сотрудничество между Институтом Проблем Управления и Энергоинвест, Сараево, которое привело к значительному прогрессу как в теории скользящих режимов так и в их приложениях к управлению электроприводами.
- 3 На протяжении 20-ти лет В.И. Уткин оставался ответственным исполнителем проекта с советской стороны, в рамках которого молодые коллеги выбирали скользящие режимы темой своих будущих кандидатских диссертаций. Так первое приложение многомерных скользящих режимов было реализовано А. Шабанович и Д. Изосимовым в управлении электродвигателем.

- 1 В результате сформировавшегося в Институте Проблем Управления самостоятельного научного направления по скользящим режимам в конце 70-х была создана одноименная лаборатория 22, с основания которой В.И. Уткин оставался ее руководителем до начала своей зарубежной карьеры в 1992 г.

- 1 В результате сформировавшегося в Институте Проблем Управления самостоятельного научного направления по скользящим режимам в конце 70-х была создана одноименная лаборатория 22, с основания которой В.И. Уткин оставался ее руководителем до начала своей зарубежной карьеры в 1992 г.
- 2 В рамках лаборатории появилось новое поколение исследователей, чьи диссертации под его научным руководством положили начало новым теоритическим разделам и продолжили вносить свой вклад в данную область:

- 1 В результате сформировавшегося в Институте Проблем Управления самостоятельного научного направления по скользящим режимам в конце 70-х была создана одноименная лаборатория 22, с основания которой В.И. Уткин оставался ее руководителем до начала своей зарубежной карьеры в 1992 г.
- 2 В рамках лаборатории появилось новое поколение исследователей, чьи диссертации под его научным руководством положили начало новым теоритическим разделам и продолжили вносить свой вклад в данную область:
- 3 Y.V. Orlov, V.I. Utkin Sliding Mode Control in Infinite-dimensional Systems, Automatica, 1987, 23 (6), 753-757;

- 1 В результате сформировавшегося в Институте Проблем Управления самостоятельного научного направления по скользящим режимам в конце 70-х была создана одноименная лаборатория 22, с основания которой В.И. Уткин оставался ее руководителем до начала своей зарубежной карьеры в 1992 г.
- 2 В рамках лаборатории появилось новое поколение исследователей, чьи диссертации под его научным руководством положили начало новым теоритическим разделам и продолжили вносить свой вклад в данную область:
- 3 Y.V. Orlov, V.I. Utkin Sliding Mode Control in Infinite-dimensional Systems, Automatica, 1987, 23 (6), 753-757;
- 4 S.V. Drakunov, V.I. Utkin On discrete-time sliding modes, Nonlinear Control Systems Design, 1989, 273-278

- 1 В результате сформировавшегося в Институте Проблем Управления самостоятельного научного направления по скользящим режимам в конце 70-х была создана одноименная лаборатория 22, с основания которой В.И. Уткин оставался ее руководителем до начала своей зарубежной карьеры в 1992 г.
- 2 В рамках лаборатории появилось новое поколение исследователей, чьи диссертации под его научным руководством положили начало новым теоритическим разделам и продолжили вносить свой вклад в данную область:
- 3 Y.V. Orlov, V.I. Utkin Sliding Mode Control in Infinite-dimensional Systems, Automatica, 1987, 23 (6), 753-757;
- 4 S.V. Drakunov, V.I. Utkin On discrete-time sliding modes, Nonlinear Control Systems Design, 1989, 273-278
- 5 С. В. Дракунов, Д. Б. Изосимов, А. Г. Лукьянов, В. А. Уткин, В. И. Уткин Принцип Блочного Управления I,II Автоматика и Телемеханика, 1990, 5-6, 38-47; 20-31

- 1 В результате сформировавшегося в Институте Проблем Управления самостоятельного научного направления по скользящим режимам в конце 70-х была создана одноименная лаборатория 22, с основания которой В.И. Уткин оставался ее руководителем до начала своей зарубежной карьеры в 1992 г.
- 2 В рамках лаборатории появилось новое поколение исследователей, чьи диссертации под его научным руководством положили начало новым теоритическим разделам и продолжили вносить свой вклад в данную область:
- 3 Y.V. Orlov, V.I. Utkin Sliding Mode Control in Infinite-dimensional Systems, Automatica, 1987, 23 (6), 753-757;
- 4 S.V. Drakunov, V.I. Utkin On discrete-time sliding modes, Nonlinear Control Systems Design, 1989, 273-278
- 5 С. В. Дракунов, Д. Б. Изосимов, А. Г. Лукьянов, В. А. Уткин, В. И. Уткин Принцип Блочного Управления I,II Автоматика и Телемеханика, 1990, 5-6, 38-47; 20-31
- 6 С.А. Краснова, В.А. Уткин Каскадный Синтез Наблюдателей Состояния Динамических Систем, 2002, Наука, Москва

- ① Начиная с 1993 г., В.И. Уткин - Профессор Университета Охайо (Ohio State University), где на протяжении без малого 30-ти лет активно продолжал работать со своими коллегами и аспирантами, оставаясь законодателем новых веяний в области управления на скользящих режимах:

- 1 Начиная с 1993 г., В.И. Уткин - Профессор Университета Охайо (Ohio State University), где на протяжении без малого 30-ти лет активно продолжал работать со своими коллегами и аспирантами, оставаясь законодателем новых веяний в области управления на скользящих режимах:
- 2 V.I. Utkin, J. Guldner, J. Shi, Sliding Mode Control in Electromechanical Systems, 1999, Taylor and Francis, London;

- 1 Начиная с 1993 г., В.И. Уткин - Профессор Университета Охайо (Ohio State University), где на протяжении без малого 30-ти лет активно продолжал работать со своими коллегами и аспирантами, оставаясь законодателем новых веяний в области управления на скользящих режимах:
- 2 V.I. Utkin, J. Guldner, J. Shi, Sliding Mode Control in Electromechanical Systems, 1999, Taylor and Francis, London;
- 3 Utkin, V.I., Shi, J.: Integral sliding mode in systems operating under uncertainty conditions. In: Proceedings of IEEE CDC, 1996, vol. 4, Kobe, Japan, pp. 4591–4596;

- 1 Начиная с 1993 г., В.И. Уткин - Профессор Университета Охайо (Ohio State University), где на протяжении без малого 30-ти лет активно продолжал работать со своими коллегами и аспирантами, оставаясь законодателем новых веяний в области управления на скользящих режимах:
- 2 V.I. Utkin, J. Guldner, J. Shi, Sliding Mode Control in Electromechanical Systems, 1999, Taylor and Francis, London;
- 3 Utkin, V.I., Shi, J.: Integral sliding mode in systems operating under uncertainty conditions. In: Proceedings of IEEE CDC, 1996, vol. 4, Kobe, Japan, pp. 4591–4596;
- 4 V.I. Utkin, A.S. Poznyak, Adaptive sliding mode control with application to super-twist algorithm: equivalent control method, Automatica, 2013, 49 (1), 39–47;

- 1 Начиная с 1993 г., В.И. Уткин - Профессор Университета Охайо (Ohio State University), где на протяжении без малого 30-ти лет активно продолжал работать со своими коллегами и аспирантами, оставаясь законодателем новых веяний в области управления на скользящих режимах:
- 2 V.I. Utkin, J. Guldner, J. Shi, Sliding Mode Control in Electromechanical Systems, 1999, Taylor and Francis, London;
- 3 Utkin, V.I., Shi, J.: Integral sliding mode in systems operating under uncertainty conditions. In: Proceedings of IEEE CDC, 1996, vol. 4, Kobe, Japan, pp. 4591–4596;
- 4 V.I. Utkin, A.S. Poznyak, Adaptive sliding mode control with application to super-twist algorithm: equivalent control method, Automatica, 2013, 49 (1), 39–47;
- 5 V. Utkin, A. Poznyak, Y. Orlov, A. Polyakov, Road Map for Sliding Mode Control Design, 2020, Springer International Publishing;

- 1 Начиная с 1993 г., В.И. Уткин - Профессор Университета Охайо (Ohio State University), где на протяжении без малого 30-ти лет активно продолжал работать со своими коллегами и аспирантами, оставаясь законодателем новых веяний в области управления на скользящих режимах:
- 2 V.I. Utkin, J. Guldner, J. Shi, Sliding Mode Control in Electromechanical Systems, 1999, Taylor and Francis, London;
- 3 Utkin, V.I., Shi, J.: Integral sliding mode in systems operating under uncertainty conditions. In: Proceedings of IEEE CDC, 1996, vol. 4, Kobe, Japan, pp. 4591–4596;
- 4 V.I. Utkin, A.S. Poznyak, Adaptive sliding mode control with application to super-twist algorithm: equivalent control method, Automatica, 2013, 49 (1), 39–47;
- 5 V. Utkin, A. Poznyak, Y. Orlov, A. Polyakov, Road Map for Sliding Mode Control Design, 2020, Springer International Publishing;
- 6 V.I. Utkin, Brief comments for doubts in Filippov method, J. Control Autom. Electr. Syst., 2022, 33 1628–1632.

Trivial Motivating Example

- Scalar relay system

$$\dot{x} = f(t) - M \operatorname{sign} x \quad \text{with} \quad \|f\|_{\infty} < M \quad (1)$$

Trivial Motivating Example

- Scalar relay system

$$\dot{x} = f(t) - M \operatorname{sign} x \quad \text{with} \quad \|f\|_{\infty} < M \quad (1)$$

- Lyapunov function $V(x) = x^2$

$$\dot{V} = 2x\dot{x} = 2|x|[f(t)\operatorname{sign}x - M] \leq -2(M - \|f\|_{\infty}) \leq -2\sqrt{V}(M - \|f\|_{\infty})$$

From scalar SMs in VSS to Multidimensional SMs

Trivial Motivating Example

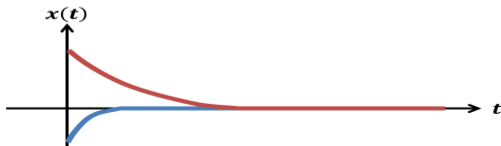
- Scalar relay system

$$\dot{x} = f(t) - M \operatorname{sign} x \quad \text{with} \quad \|f\|_{\infty} < M \quad (1)$$

- Lyapunov function $V(x) = x^2$

$$\dot{V} = 2x\dot{x} = 2|x|[f(t)\operatorname{sign}x - M] \leq -2(M - \|f\|_{\infty}) \leq -2\sqrt{V}(M - \|f\|_{\infty})$$

- $\dot{x}(t) = 0$ for all $t \geq T$ and some $T > 0 \Rightarrow M \operatorname{sign} 0 \stackrel{???}{=} f(t)$



Example: Second order VSS puzzle

Controlled Plant

$$\ddot{x} = u(x, \dot{x}) \quad (2)$$

Two unstable structures $u = u_1$ and $u = u_2$:

$$u_1(x, \dot{x}) = 6\dot{x} + 16x \text{ **unstable saddle**} \quad (3)$$

$$u_2(x, \dot{x}) = 6\dot{x} - 16x \text{ **unstable focus.**} \quad (4)$$

Example: VSS puzzle (cont'd)

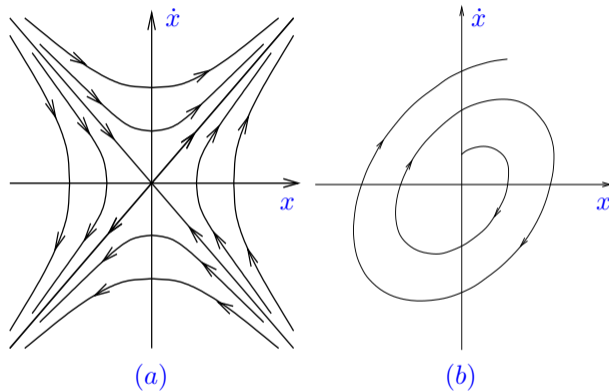
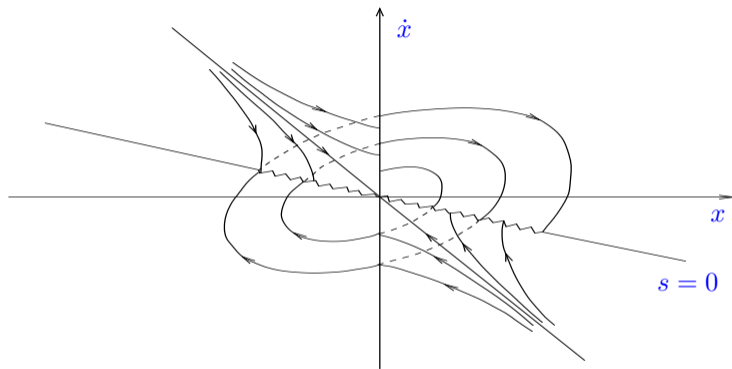


Рис.: Phase portrait of unstable saddle (a); unstable focus (b)

Example: VSS puzzle (cont'd)

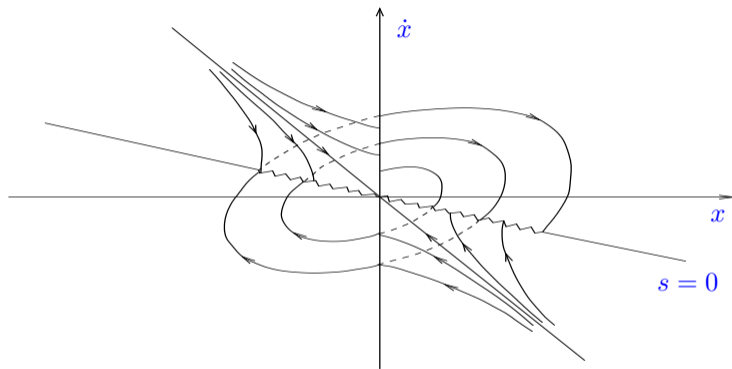
Phase portrait of the closed-loop VSS



- SM equation $s = \dot{x} + cx = 0$ is of reduced order

Example: VSS puzzle (cont'd)

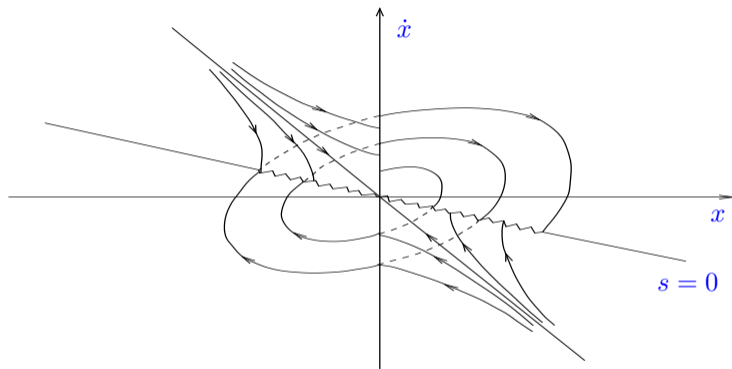
Phase portrait of the closed-loop VSS



- SM equation $s = \dot{x} + cx = 0$ is of reduced order
- SM does not depend on the plant dynamics

Example: VSS puzzle (cont'd)

Phase portrait of the closed-loop VSS



- SM equation $s = \dot{x} + cx = 0$ is of reduced order
- SM does not depend on the plant dynamics
- The gain c is at the designer's will

Example: VSS puzzle (cont'd)

Switching rule

$$u(x, \dot{x}) = \begin{cases} 6\dot{x} + 16x & \text{if } xs(x, \dot{x}) < 0 \\ 6\dot{x} - 16x & \text{if } xs(x, \dot{x}) > 0 \end{cases} \quad (5)$$

forcing the system structure to slide along the surface

$$s(x, \dot{x}) = \dot{x} + cx, \quad c > 0 \quad (6)$$

results in asymptotical stability of the closed-loop system.

Sliding Mode in a Relay System

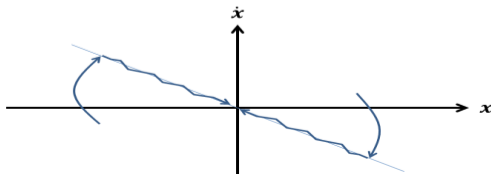
$$\ddot{x} + a_2\dot{x} + a_1x = u + f(t)$$

$$u = -M \operatorname{sign} s, s = \dot{x} + cx$$

$$\operatorname{sign} s = \begin{cases} +1, & \text{if } s > 0 \\ -1, & \text{if } s < 0, \end{cases}$$

M, c, a_1, a_2 are constant parameters

$f(t)$ is a disturbance



Utkin Solutions and Equivalent Control Method

Affine VSS

$$\dot{x} = \begin{cases} f(x, t) + b(x, t)u^+(x, t) & \text{if } s(x) > 0 \\ f(x, t) + b(x, t)u^-(x, t) & \text{if } s(x) < 0 \end{cases}$$

Provided that $\text{grad}^T s \cdot b$ is invertible, Equivalent Control Method results in

$$\text{grad}^T s \cdot [f + bu_{eq}] = 0 \Rightarrow u_{eq}(x, t) = -(\text{grad}^T s \cdot b)^{-1} \text{grad}^T s \cdot f$$
$$\Downarrow$$

Utkin solutions on $s = 0$ are governed by

$$\dot{x} = f - b(\text{grad}^T s \cdot b)^{-1} \text{grad}^T s \cdot f.$$

Remarkably, i) affine systems possess the same Filippov and Utkin solutions on $s = 0$ such that $\text{grad}^T s \cdot b$ is invertible! ii) the projection of f (possibly unknown) is reconstructible from u_{eq} !!!

Physical Meaning of Equivalent Control

Discontinuous control consists of high frequency and slow components:

$$u(x, t) = u_{hf} + u_{slow}$$

u_{hf} is filtered out by the plant and the motion is affected by u_{slow} only. It means that

$$u_{slow} = u_{eq}.$$

Thus, u_{eq} may be obtained by a low-pass filter

$$\begin{aligned}\tau \dot{u}_{slow} + u_{slow} &= u, \tau \ll 1 \\ u_{slow} &\approx u_{eq}\end{aligned}$$

Since u_{eq} depends on unknown parameters and disturbances this dependence can be reconstructed, e.g., to design robust observers!

Sliding Mode Differentiator

- 1 The sliding mode filter

$$\dot{z} = -\lambda \operatorname{sign}(z(t) - \gamma(t)), z(0) = z^0 \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0$$

is capable of an approximate differentiation of a smooth signal $\gamma(t)$ provided that $|\dot{\gamma}(t)| \leq \gamma_0 < \lambda \forall t > 0$.

Sliding Mode Differentiator

- 1 The sliding mode filter

$$\dot{z} = -\lambda \operatorname{sign}(z(t) - \gamma(t)), z(0) = z^0 \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0$$

is capable of an approximate differentiation of a smooth signal $\gamma(t)$ provided that $|\dot{\gamma}(t)| \leq \gamma_0 < \lambda \forall t > 0$.

- 2 Indeed, the deviation $e(t) = z(t) - \gamma(t)$ is governed by

$$\dot{e} = -\lambda \operatorname{sign} e - \dot{\gamma}(t), t > 0$$

where the sliding mode $e(t) = 0$ occurs in finite time thanks to the Lyapunov function $V(e) = |e|$ whose time derivative along the solutions is governed by $\dot{V} \leq -(\lambda - \gamma_0)$.

Sliding Mode Differentiator

- 1 The sliding mode filter

$$\dot{z} = -\lambda \operatorname{sign}(z(t) - \gamma(t)), z(0) = z^0 \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0$$

is capable of an approximate differentiation of a smooth signal $\gamma(t)$ provided that $|\dot{\gamma}(t)| \leq \gamma_0 < \lambda \forall t > 0$.

- 2 Indeed, the deviation $e(t) = z(t) - \gamma(t)$ is governed by

$$\dot{e} = -\lambda \operatorname{sign} e - \dot{\gamma}(t), t > 0$$

where the sliding mode $e(t) = 0$ occurs in finite time thanks to the Lyapunov function $V(e) = |e|$ whose time derivative along the solutions is governed by $\dot{V} \leq -(\lambda - \gamma_0)$.

- 3 Thus, $V(t) = 0 \forall t \geq \frac{V(0)}{\lambda - \gamma_0}$, and by equivalent control method, $\dot{\gamma}(t) = -\lambda \operatorname{sign} e(t)$, $t \geq \frac{V(0)}{\lambda - \gamma_0}$. Hence, the average value $u_{eq}(t) \approx -\lambda \operatorname{sign} e(t)$, obtained from the low-pass filter

$$\kappa \dot{u}_{eq} = -u_{eq} - \lambda \operatorname{sign} e(t) \quad \text{as} \quad \kappa \downarrow 0$$

represents an approximate estimate of $\dot{\gamma}(t)$.

Sliding Mode Differentiator

- 1 The sliding mode filter

$$\dot{z} = -\lambda \operatorname{sign}(z(t) - \gamma(t)), z(0) = z^0 \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0$$

is capable of an approximate differentiation of a smooth signal $\gamma(t)$ provided that $|\dot{\gamma}(t)| \leq \gamma_0 < \lambda \forall t > 0$.

- 2 Indeed, the deviation $e(t) = z(t) - \gamma(t)$ is governed by

$$\dot{e} = -\lambda \operatorname{sign} e - \dot{\gamma}(t), t > 0$$

where the sliding mode $e(t) = 0$ occurs in finite time thanks to the Lyapunov function $V(e) = |e|$ whose time derivative along the solutions is governed by $\dot{V} \leq -(\lambda - \gamma_0)$.

- 3 Thus, $V(t) = 0 \forall t \geq \frac{V(0)}{\lambda - \gamma_0}$, and by equivalent control method, $\dot{\gamma}(t) = -\lambda \operatorname{sign} e(t)$, $t \geq \frac{V(0)}{\lambda - \gamma_0}$. Hence, the average value $u_{eq}(t) \approx -\lambda \operatorname{sign} e(t)$, obtained from the low-pass filter

$$\kappa \dot{u}_{eq} = -u_{eq} - \lambda \operatorname{sign} e(t) \quad \text{as} \quad \kappa \downarrow 0$$

represents an approximate estimate of $\dot{\gamma}(t)$.

- 4 **Similar equivalent-control-based idea is usable for SM robust observer design!**

Integral Sliding Mode

- For ease of exposition, the principal idea is exemplified with the double integrator

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(t) &\in R, \\ \dot{x}_2(t) &= u + h(t, x), & x_2(t) &\in R, \end{aligned} \right\} \text{subject to } |h(t, x)| \leq h_0 \text{ with known bound } h_0 \quad (7)$$

Integral Sliding Mode

- 1 For ease of exposition, the principal idea is exemplified with the double integrator

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(t) &\in R, \\ \dot{x}_2(t) &= u + h(t, x), & x_2(t) &\in R, \end{aligned} \right\} \text{subject to } |h(t, x)| \leq h_0 \text{ with known bound } h_0 \quad (7)$$

- 2 The objective is to compose $u = u_0 + u_1$ in such a way that the first component u_0 provides the desired closed-loop dynamics whereas the second component compensates the unknown disturbance $h(t, x)$ for all $t \geq 0$.

Integral Sliding Mode

- 1 For ease of exposition, the principal idea is exemplified with the double integrator

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(t) &\in R, \\ \dot{x}_2(t) &= u + h(t, x), & x_2(t) &\in R, \end{aligned} \right\} \text{subject to } |h(t, x)| \leq h_0 \text{ with known bound } h_0 \quad (7)$$

- 2 The objective is to compose $u = u_0 + u_1$ in such a way that the first component u_0 provides the desired closed-loop dynamics whereas the second component compensates the unknown disturbance $h(t, x)$ for all $t \geq 0$.
- 3 For this purpose, compliment the original second order system with an auxiliary dynamics $\dot{z} = -u_0$, $z(0) = 0$, i.e., $z(t) = \int_0^t u_0(\tau) d\tau$ and select

$$u_1 = -M \text{sign } s(t), \quad M > h_0, \quad \text{where } s(t) = x_2(t) - x_2(0) + z(t).$$

Note s involves the integral input component $z(t)$!

Integral Sliding Mode

- 1 For ease of exposition, the principal idea is exemplified with the double integrator

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(t) &\in R, \\ \dot{x}_2(t) &= u + h(t, x), & x_2(t) &\in R, \end{aligned} \right\} \text{subject to } |h(t, x)| \leq h_0 \text{ with known bound } h_0 \quad (7)$$

- 2 The objective is to compose $u = u_0 + u_1$ in such a way that the first component u_0 provides the desired closed-loop dynamics whereas the second component compensates the unknown disturbance $h(t, x)$ for all $t \geq 0$.
- 3 For this purpose, compliment the original second order system with an auxiliary dynamics $\dot{z} = -u_0$, $z(0) = 0$, i.e., $z(t) = \int_0^t u_0(\tau) d\tau$ and select

$$u_1 = -M \operatorname{sign} s(t), \quad M > h_0, \quad \text{where } s(t) = x_2(t) - x_2(0) + z(t).$$

Note s involves the integral input component $z(t)$!

- 4 Since $\dot{s}(t) = -M \operatorname{sign}(s(t)) + h(t, x)$ and $s(0) = 0$, the *integral* sliding mode $s = 0$ is in force for all $t \geq 0$ so that $(M \operatorname{sign}(s))_{eq} = h(t, x)$ compensates the disturbance for all $t \geq 0$.

Integral Sliding Mode

- 1 For ease of exposition, the principal idea is exemplified with the double integrator

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(t) &\in R, \\ \dot{x}_2(t) &= u + h(t, x), & x_2(t) &\in R, \end{aligned} \right\} \text{subject to } |h(t, x)| \leq h_0 \text{ with known bound } h_0 \quad (7)$$

- 2 The objective is to compose $u = u_0 + u_1$ in such a way that the first component u_0 provides the desired closed-loop dynamics whereas the second component compensates the unknown disturbance $h(t, x)$ for all $t \geq 0$.
- 3 For this purpose, compliment the original second order system with an auxiliary dynamics $\dot{z} = -u_0$, $z(0) = 0$, i.e., $z(t) = \int_0^t u_0(\tau) d\tau$ and select

$$u_1 = -M \operatorname{sign} s(t), \quad M > h_0, \quad \text{where } s(t) = x_2(t) - x_2(0) + z(t).$$

Note s involves the integral input component $z(t)$!

- 4 Since $\dot{s}(t) = -M \operatorname{sign}(s(t)) + h(t, x)$ and $s(0) = 0$, the *integral* sliding mode $s = 0$ is in force for all $t \geq 0$ so that $(M \operatorname{sign}(s))_{eq} = h(t, x)$ compensates the disturbance for all $t \geq 0$.
- 5 Indeed, substitution of $u = u_0 - (M \operatorname{sign}(s))_{eq}$ into (7) results in the desired motion equation

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = u_0.$$

Sliding Mode Control in Affine Systems

Affine System

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t, x(t)), \quad x(t) \in R^n, \\ u_i(t, x) &= \begin{cases} u_i^+(t, x) & \text{if } s_i(x) > 0, \\ u_i^-(t, x) & \text{if } s_i(x) < 0, \end{cases} \\ u &= (u_1, \dots, u_m)^T, \quad s = (s_1, \dots, s_m)^T \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Sliding Mode Equation

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_0(t, x(t)), \\ f_0(t, x) &= f(t, x) - B(t, x)(\nabla^T s(x)B(t, x))^{-1}\nabla^T s(x)f(t, x). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Design Procedure

1. Select a function $s : R^n \rightarrow R^m$ such that

$$|\det(\nabla^T s \cdot B)| > \Delta_0$$

and such that the sliding mode on the manifold

$$s(x) = 0, x \in R^n$$

has desired dynamic properties (e.g., asymptotically stable sliding motion).

Design Procedure

1. Select a function $s : R^n \rightarrow R^m$ such that

$$|\det(\nabla^T s \cdot B)| > \Delta_0$$

and such that the sliding mode on the manifold

$$s(x) = 0, x \in R^n$$

has desired dynamic properties (e.g., asymptotically stable sliding motion).

2. Discontinuous control is selected to enforce sliding mode in the pre-selected manifold $s(x) = 0$. Again we deal with the problem of a reduced order, since the state trajectories should reach the manifold after a finite time interval in m -dimensional subspace s in compliance with the equation

$$\dot{s} = \nabla^T s \cdot f + \nabla^T s \cdot Bu. \tag{10}$$

Attractive Features

- the sliding mode equation is of a reduced order;

Attractive Features

- the sliding mode equation is of a reduced order;
- it does not depend on the control values;

Attractive Features

- the sliding mode equation is of a reduced order;
- it does not depend on the control values;
- it depends on discontinuity manifold equation

Attractive Features

- the sliding mode equation is of a reduced order;
- it does not depend on the control values;
- it depends on discontinuity manifold equation
- it is invariant in matched disturbances $h(x, t) = Bh_0(x, t)$ from the control space. Indeed, the sliding mode velocity for the vector field $f + Bh_0$ remains the same

$$f_0(t, x) = f(t, x) - B(t, x)(\nabla^T s(x)B(t, x))^{-1}\nabla^T s(x)f(t, x) \quad (11)$$

because the term $Bh_0(t, x) - B(t, x)(\nabla^T s(x)B(t, x))^{-1}\nabla^T s(x)Bh_0(t, x) \equiv 0$ thereby not contributing into f_0 .

Sliding Mode Synthesis

Unit Feedback and Disturbance Rejection

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u + h(x, t), x \in \mathbf{R}^n, u \in \mathbf{R}^m$$

Assumptions:

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u + h(x, t), x \in \mathbf{R}^n, u \in \mathbf{R}^m$$

Assumptions:

① **Nominal System**

$$\dot{x} = f(x, t), x \in \mathbf{R}^n$$

is asymptotically stable and there exists a C^1 Lyapunov function $V(x)$ such that

$$\text{grad}^T V(x) f(x, t) \leq -W_1(x) < 0$$

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u + h(x, t), x \in \mathbf{R}^n, u \in \mathbf{R}^m$$

Assumptions:

1 Nominal System

$$\dot{x} = f(x, t), x \in \mathbf{R}^n$$

is asymptotically stable and there exists a C^1 Lyapunov function $V(x)$ such that

$$\text{grad}^T V(x) f(x, t) \leq -W_1(x) < 0$$

2 The uncertain term h meets the matching condition

$$h(x, t) \in \text{span}(B), \text{ i.e., } h(x, t) = B(x, t)\omega(x, t)$$

for some $\omega(x, t) \in \mathbf{R}^m$

Unit Feedback and Disturbance Rejection

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u + h(x, t), x \in \mathbf{R}^n, u \in \mathbf{R}^m$$

Assumptions:

1 Nominal System

$$\dot{x} = f(x, t), x \in \mathbf{R}^n$$

is asymptotically stable and there exists a C^1 Lyapunov function $V(x)$ such that

$$\text{grad}^T V(x) f(x, t) \leq -W_1(x) < 0$$

2 The uncertain term h meets the matching condition

$$h(x, t) \in \text{span}(B), \text{ i.e., } h(x, t) = B(x, t)\omega(x, t)$$

for some $\omega(x, t) \in \mathbf{R}^m$

3 The magnitude of possibly unknown $\omega(x, t) \in \mathbf{R}^m$ is upper bounded with $\omega_0(x, t) \in \mathbf{R}^m$, known *a priori*:

$$\| \omega(x, t) \| < \omega_0(x, t)$$

Unit Feedback and Disturbance Rejection

Gutman 1979

- **Minmax Design**

$$\frac{dV}{dt} = W_0 + \{grad(V)\}^T B(u + \omega) \rightarrow \min_{\|u\| \leq \rho} \max_{\|\omega\| \leq \omega_0}$$

Unit Feedback and Disturbance Rejection

Gutman 1979

- **Minmax Design**

$$\frac{dV}{dt} = W_0 + \{grad(V)\}^T B(u + \omega) \rightarrow \min_{\|u\| \leq \rho} \max_{\|\omega\| \leq \omega_0}$$

- **Control Input**

$$u = -\rho(x, t)U(s(x, t)), \text{ with } \rho(x, t) > \omega_0(x, t)$$

Unit Feedback and Disturbance Rejection

Gutman 1979

- **Minmax Design**

$$\frac{dV}{dt} = W_0 + \{grad(V)\}^T B(u + \omega) \rightarrow \min_{\|u\| \leq \rho} \max_{\|\omega\| \leq \omega_0}$$

- **Control Input**

$$u = -\rho(x, t)U(s(x, t)), \text{ with } \rho(x, t) > \omega_0(x, t)$$

- **Unit Signal**

$$U(s) = \frac{s}{\|s\|} \text{ with } s(x, t) = B^T(x, t)grad V(x)$$

of the norm $\|\frac{s(x, t)}{\|s(x, t)\|}\| = 1$ beyond the $(n - m)$ -dimensional manifold $s = 0$.

Unit Feedback and Disturbance Rejection

Features of the Unit Control

Features of the Unit Control

- **The Closed-loop System is GAS:**

$$\frac{dV}{dt} \leq -W_1(x) - \| B^T \text{grad } V \| [\rho(x, t) - \frac{B^T \text{grad } V}{\| B^T \text{grad } V \|} \omega_0(x, t)] < 0$$

Features of the Unit Control

- **The Closed-loop System is GAS:**

$$\frac{dV}{dt} \leq -W_1(x) - \|B^T \text{grad } V\| [\rho(x, t) - \frac{B^T \text{grad } V}{\|B^T \text{grad } V\|} \omega_0(x, t)] < 0$$

- The unit signal $s/\|s\|$ is a discontinuous function of the state and it undergoes discontinuities on the $(n - m)$ -dimensional manifold $s = 0$.

Features of the Unit Control

- **The Closed-loop System is GAS:**

$$\frac{dV}{dt} \leq -W_1(x) - \| B^T \text{grad } V \| [\rho(x, t) - \frac{B^T \text{grad } V}{\| B^T \text{grad } V \|} \omega_0(x, t)] < 0$$

- The unit signal $s/\|s\|$ is a discontinuous function of the state and it undergoes discontinuities on the $(n - m)$ -dimensional manifold $s = 0$.
- The unit signal $s/\|s\|$ remains continuous until the manifold $s(x, t) = 0$ is reached.

Features of the Unit Control

- **The Closed-loop System is GAS:**

$$\frac{dV}{dt} \leq -W_1(x) - \| B^T \text{grad } V \| [\rho(x, t) - \frac{B^T \text{grad } V}{\| B^T \text{grad } V \|} \omega_0(x, t)] < 0$$

- The unit signal $s/\|s\|$ is a discontinuous function of the state and it undergoes discontinuities on the $(n - m)$ -dimensional manifold $s = 0$.
- The unit signal $s/\|s\|$ remains continuous until the manifold $s(x, t) = 0$ is reached.
- The equivalent control value $u_{eq} = -\omega(x, t)$ is formally obtained on the discontinuity manifold $B^T(x, t) \text{grad } V(x) = 0$, but it cannot be implemented – $\omega(x, t)$ is unknown!

Features of the Unit Control

- **The Closed-loop System is GAS:**

$$\frac{dV}{dt} \leq -W_1(x) - \| B^T \text{grad } V \| [\rho(x, t) - \frac{B^T \text{grad } V}{\| B^T \text{grad } V \|} \omega_0(x, t)] < 0$$

- The unit signal $s/\|s\|$ is a discontinuous function of the state and it undergoes discontinuities on the $(n - m)$ -dimensional manifold $s = 0$.
- The unit signal $s/\|s\|$ remains continuous until the manifold $s(x, t) = 0$ is reached.
- The equivalent control value $u_{eq} = -\omega(x, t)$ is formally obtained on the discontinuity manifold $B^T(x, t)\text{grad } V(x) = 0$, but it cannot be implemented – $\omega(x, t)$ is unknown!
- The disturbance $h(x, t)$ is rejected due to enforcing the sliding mode on the discontinuity manifold.

Decomposition of SM Synthesis

Two-steps Procedure

Decomposition of SM Synthesis

Two-steps Procedure

- 1 Proper choice of the discontinuity manifold $s = 0$ with invertible $G = \left\{ \frac{\partial s}{\partial x} \right\} B$ and prescribed dynamic properties of the closed-loop system $\dot{x} = f + h + Bu$ on $s = 0$.

Decomposition of SM Synthesis

Two-steps Procedure

- 1 Proper choice of the discontinuity manifold $s = 0$ with invertible $G = \left\{ \frac{\partial s}{\partial x} \right\} B$ and prescribed dynamic properties of the closed-loop system $\dot{x} = f + h + Bu$ on $s = 0$.
- 2 Unit feedback controller $u = -\rho(x, t) \frac{G^T s(x)}{\|G^T s(x)\|}$ is constructed to guarantee existence of the sliding motion along this manifold.

Decomposition of SM Synthesis

Two-steps Procedure

- 1 Proper choice of the discontinuity manifold $s = 0$ with invertible $G = \left\{ \frac{\partial s}{\partial x} \right\} B$ and prescribed dynamic properties of the closed-loop system $\dot{x} = f + h + Bu$ on $s = 0$.
 - 2 Unit feedback controller $u = -\rho(x, t) \frac{G^T s(x)}{\|G^T s(x)\|}$ is constructed to guarantee existence of the sliding motion along this manifold.
- Indeed, the motion projection $\dot{s} = \left\{ \frac{\partial s}{\partial x} \right\} (f + h) + Gu$ on the subspace s proves to be FTS:

$$V = \frac{1}{2} s^T s \Rightarrow \dot{V} \leq \|G^T s(x)\| \cdot [\|G^{-1} \left\{ \frac{\partial s}{\partial x} \right\} (f + h)\| - \rho(x, t)] \leq -2\gamma_0 \sqrt{V}$$

for some $\gamma_0 > 0$ provided that

Decomposition of SM Synthesis

Two-steps Procedure

- 1 Proper choice of the discontinuity manifold $s = 0$ with invertible $G = \left\{ \frac{\partial s}{\partial x} \right\} B$ and prescribed dynamic properties of the closed-loop system $\dot{x} = f + h + Bu$ on $s = 0$.
- 2 Unit feedback controller $u = -\rho(x, t) \frac{G^T s(x)}{\|G^T s(x)\|}$ is constructed to guarantee existence of the sliding motion along this manifold.

- Indeed, the motion projection $\dot{s} = \left\{ \frac{\partial s}{\partial x} \right\} (f + h) + Gu$ on the subspace s proves to be FTS:

$$V = \frac{1}{2} s^T s \Rightarrow \dot{V} \leq \|G^T s(x)\| \cdot [\|G^{-1} \left\{ \frac{\partial s}{\partial x} \right\} (f + h)\| - \rho(x, t)] \leq -2\gamma_0 \sqrt{V}$$

for some $\gamma_0 > 0$ provided that

- The gain ρ is large enough:

$$\rho(x, t) > \| [G^{-1} \left\{ \frac{\partial s}{\partial x} \right\} (f + h)](x, t) \|$$

Decomposition of SM Synthesis

Equivalent Control Method

Decomposition of SM Synthesis

Equivalent Control Method

- 1 The equivalent control value

$$u_{eq} = -G^{-1} \left\{ \frac{\partial s}{\partial x} \right\} (f + h) \quad (12)$$

is obtained by solving the equation $\dot{s} = \left\{ \frac{\partial s}{\partial x} \right\} (f + h) + Gu = 0$ with respect to u .

Decomposition of SM Synthesis

Equivalent Control Method

- 1 The equivalent control value

$$u_{eq} = -G^{-1}\left\{\frac{\partial s}{\partial x}\right\}(f + h) \quad (12)$$

is obtained by solving the equation $\dot{s} = \left\{\frac{\partial s}{\partial x}\right\}(f + h) + Gu = 0$ with respect to u .

- 2 The sliding mode equation

$$\dot{x} = f + h - G^{-1}\left\{\frac{\partial s}{\partial x}\right\}(f + h), \quad (13)$$

on $s = 0$ is derived by substituting the equivalent control value (12) into the plant equation

$$\dot{x} = f + h + Bu$$

for u .

Decomposition of SM Synthesis

Equivalent Control Method

- 1 The equivalent control value

$$u_{eq} = -G^{-1}\left\{\frac{\partial s}{\partial x}\right\}(f + h) \quad (12)$$

is obtained by solving the equation $\dot{s} = \left\{\frac{\partial s}{\partial x}\right\}(f + h) + Gu = 0$ with respect to u .

- 2 The sliding mode equation

$$\dot{x} = f + h - G^{-1}\left\{\frac{\partial s}{\partial x}\right\}(f + h), \quad (13)$$

on $s = 0$ is derived by substituting the equivalent control value (12) into the plant equation

$$\dot{x} = f + h + Bu$$

for u .

- 3 The choice of s should guarantee that SM's (13) is asymptotically stable.

Regular Form

- 1 The design procedure becomes transparent, for the systems in the regular form

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(t, x_1(t), x_2(t)), \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(t, x_1(t), x_2(t) + B_2(t, x_1(t), x_2(t))u(t), \\ x_1(t) &\in R^{n-m}, x_2(t) \in R^m, u(t) \in R^m, \det(B_2) \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

where the state component $x_2(t)$ is handled as a fictitious control input in the first equation.

Regular Form

- 1 The design procedure becomes transparent, for the systems in the regular form

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(t, x_1(t), x_2(t)), \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(t, x_1(t), x_2(t) + B_2(t, x_1(t), x_2(t))u(t), \\ x_1(t) &\in R^{n-m}, x_2(t) \in R^m, u(t) \in R^m, \det(B_2) \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

where the state component $x_2(t)$ is handled as a fictitious control input in the first equation.

- 2 To get the desired dynamics in the first subsystem, select $x_2 = -s_0(x_1)$ Then u should be designed to enforce sliding mode in the manifold $s(x_1, x_2) = x_2 + s_0(x_1) = 0$

Regular Form

- 1 The design procedure becomes transparent, for the systems in the regular form

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(t, x_1(t), x_2(t)), \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(t, x_1(t), x_2(t) + B_2(t, x_1(t), x_2(t))u(t), \\ x_1(t) &\in R^{n-m}, x_2(t) \in R^m, u(t) \in R^m, \det(B_2) \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

where the state component $x_2(t)$ is handled as a fictitious control input in the first equation.

- 2 To get the desired dynamics in the first subsystem, select $x_2 = -s_0(x_1)$. Then u should be designed to enforce sliding mode in the manifold $s(x_1, x_2) = x_2 + s_0(x_1) = 0$.
- 3 The sliding motion along $s(x_1, x_2) = 0$ is desirably governed by $\dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1(t), -s_0(x_1(t)))$. Note, that the motion is of a reduced order and depends neither on function f_2 nor on function B_2 in the second equation of the original system (14).

Decomposition of SM Synthesis

Block-canonical Form

- 1 A.G. Lukianov and V.I. Utkin demonstrated that a principle of control system construction based on the sequential use of some of the state vector's coordinates as controls can be used.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_1, \dots, x_i, t) + B_i(x_1, \dots, x_i, t) x_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq r-1, \\ \dot{x}_r &= f_r(x_1, \dots, x_r, t) + B_i(x_1, \dots, x_i, t) x_{i+1}, \\ \dot{x}_r &= f_r(x_1, \dots, x_r) + B_r(x_1, \dots, x_r, t) u + D_r(x_1, \dots, x_r, t) w(t), \\ y &= h(x) = x_1 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

where the vector x is decomposed as $x = (x_1^\top, \dots, x_r^\top)^\top$, $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ so that

$$n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r \leq m, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad \sum_{i=1}^r n_i = n, \quad .$$

Decomposition of SM Synthesis

Block-canonical Form

- 1 A.G. Lukianov and V.I. Utkin demonstrated that a principle of control system construction based on the sequential use of some of the state vector's coordinates as controls can be used.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_1, \dots, x_i, t) + B_i(x_1, \dots, x_i, t) x_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq r-1, \\ \dot{x}_r &= f_r(x_1, \dots, x_r, t) + B_r(x_1, \dots, x_r, t) u + D_r(x_1, \dots, x_r, t) w(t), \\ y &= h(x) = x_1 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

where the vector x is decomposed as $x = (x_1^T, \dots, x_r^T)^T$, $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ so that

$$n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r \leq m, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad \sum_{i=1}^r n_i = n, \quad .$$

- 2 Later on, the popular backstepping approach was inspired from the above block-cascade approach for adaptive control of nonlinear systems of arbitrary relative degree.

Sliding Modes in Hilbert Space

Unit Control Extension

- The Lyapunov min-max approach can be applied to a finite-dimensional approximation or straightforwardly extended to infinite-dimensional setting.

Sliding Modes in Hilbert Space

Unit Control Extension

- The Lyapunov min-max approach can be applied to a finite-dimensional approximation or straightforwardly extended to infinite-dimensional setting.
- The min-max approach turns out to be applicable to a broad class of uncertain infinite-dimensional systems.

Sliding Modes in Hilbert Space

Unit Control Extension

- The Lyapunov min-max approach can be applied to a finite-dimensional approximation or straightforwardly extended to infinite-dimensional setting.
- The min-max approach turns out to be applicable to a broad class of uncertain infinite-dimensional systems.
- The approach gives rise to a discontinuous *unit feedback signal*, stabilizing the underlying system under uncertain plant operator and environment conditions.

Sliding Modes in Hilbert Space

Unit Control Extension

- The Lyapunov min-max approach can be applied to a finite-dimensional approximation or straightforwardly extended to infinite-dimensional setting.
- The min-max approach turns out to be applicable to a broad class of uncertain infinite-dimensional systems.
- The approach gives rise to a discontinuous *unit feedback signal*, stabilizing the underlying system under uncertain plant operator and environment conditions.
- Capability of an infinite-dimensional system to slide along its discontinuity manifold and attractive robustness features of the unit feedback synthesis are illustrated here with an extremely simple example.

Motivating Example: Unit Feedback in Hilbert Space

FT Stabilization

Infinite-dimensional system in Hilbert Space H

$$\dot{x} = U(x), \quad x(0) = x^0 \in H \quad (16)$$

Discontinuous (at $x = 0$) Unit Control Input

$$U(x) = -\frac{x}{\|x\|}, \quad (17)$$

Since the norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ in the Hilbert space is defined via the inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$, differentiating the function $\|x(t)\|^2$ on the trajectories of the closed-loop system (16), (17) yields

$$\begin{aligned} \frac{d\|x(t)\|^2}{dt} &= 2(x(t), \dot{x}(t)) = -2\|x(t)\| \\ &\Downarrow \end{aligned}$$

Sliding motion in the origin $x = 0$ starting from $t \geq \|x(0)\|$

Example: Unit Feedback in Hilbert Space (cont'd)

Rejection of External Disturbances of Bounded Magnitude



Perturbed System

$$\dot{x} = -\frac{x}{\|x\|} + h(x, t) \quad (18)$$

Example: Unit Feedback in Hilbert Space (cont'd)

Rejection of External Disturbances of Bounded Magnitude

- Perturbed System

$$\dot{x} = -\frac{x}{\|x\|} + h(x, t) \quad (18)$$

- Disturbance Norm Constraint

$$\|h(x, t)\|_H \leq \varepsilon$$

Example: Unit Feedback in Hilbert Space (cont'd)

Rejection of External Disturbances of Bounded Magnitude

- Perturbed System

$$\dot{x} = -\frac{x}{\|x\|} + h(x, t) \quad (18)$$

- Disturbance Norm Constraint

$$\|h(x, t)\|_H \leq \varepsilon$$

- Lyapunov Function

$$V(t) = \|x(t)\|^2$$

Example: Unit Feedback in Hilbert Space (cont'd)

Rejection of External Disturbances of Bounded Magnitude

- Perturbed System

$$\dot{x} = -\frac{x}{\|x\|} + h(x, t) \quad (18)$$

- Disturbance Norm Constraint

$$\|h(x, t)\|_H \leq \varepsilon$$

- Lyapunov Function

$$V(t) = \|x(t)\|^2$$

- Time Derivative along the Trajectories of Perturbed System

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -2(1 - \varepsilon)\sqrt{V(t)} \\ &\Downarrow \end{aligned}$$

Example: Unit Feedback in Hilbert Space (cont'd)

Rejection of External Disturbances of Bounded Magnitude

- Perturbed System

$$\dot{x} = -\frac{x}{\|x\|} + h(x, t) \quad (18)$$

- Disturbance Norm Constraint

$$\|h(x, t)\|_H \leq \varepsilon$$

- Lyapunov Function

$$V(t) = \|x(t)\|^2$$

- Time Derivative along the Trajectories of Perturbed System

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -2(1 - \varepsilon)\sqrt{V(t)} \\ &\Downarrow \end{aligned}$$

- FS of the Perturbed System

- Скользящие режимы остаются одним из основных методов робастного управления, широко применяемых на практике благодаря простоте их реализации.

- Скользящие режимы остаются одним из основных методов робастного управления, широко применяемых на практике благодаря простоте их реализации.
- Профессор В.И. Уткин оставил богатое теоретическое наследие. Его фундаментальные результаты сформировали современную теорию управления на скользящих режимах и оказали влияние на развитие общей теории управления.

- Скользящие режимы остаются одним из основных методов робастного управления, широко применяемых на практике благодаря простоте их реализации.
- Профессор В.И. Уткин оставил богатое теоретическое наследие. Его фундаментальные результаты сформировали современную теорию управления на скользящих режимах и оказали влияние на развитие общей теории управления.
- Благодаря простоте в реализации, скользящие режимы получили широкое международное признание. Так в этом году проводится 17-ая международная школа по системам с переменной структурой, которую в 1992 г. инициировал В.И. Уткин и которую он долгое время возглавлял. В ней традиционно принимают участие научные коллективы из многих стран.