Дивергентный метод в задачах устойчивости и управления

Игорь Борисович Фуртат
д.т.н., проф., зав. лаб.

cainenash@mail.ru
https://furtat-igor.tilda.ws

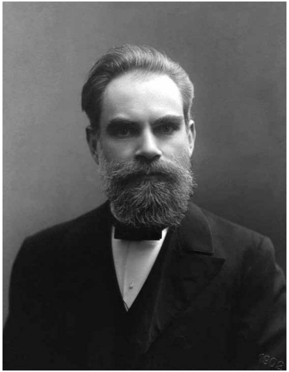
Институт проблем машиноведения РАН (ИПМаш РАН), г. Санкт-Петербург

ВСПУ 2024, 18 июня 2024 г.

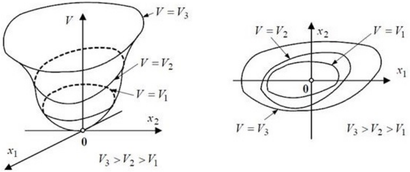
Содержание

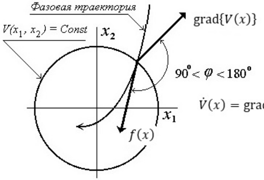
Введение

Метод функций А.М. Ляпунова



А.М. Ляпунов (06.06.1857–03.11.1918)



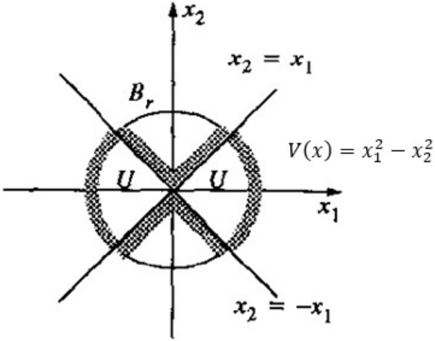


$$\dot{V}(x) = \mathrm{grad}\{V(x)\} \cdot f(x) = |\mathrm{grad}\{V(x)\}| \cdot |f(x)| \cos\varphi$$

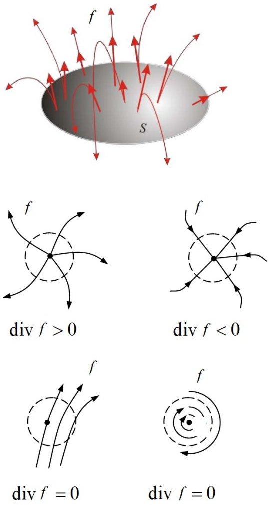
Будем называть точку равновесия *устойчивой* (*неустойчивой*) если она устойчива (неустойчива) по Ляпунову

Метод Н.Г. Четаева

Н.Г. Четаев (06.12.1092–17.10.1959)



Поток векторного поля и дивергенция



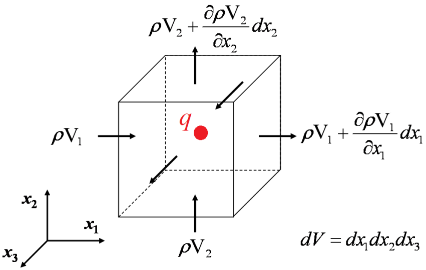
- Поток векторного поля

$$\Phi = \int_S f \cdot n \, dS$$

- Дивергенция

$$\mathrm{div}\{f\} = \lim_{V \to 0} \frac{\Phi}{V} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

Уравнение непрерывности (УН)



- Дифференциальная форма УН

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho V) = q,$$

- Интегральная форма УН

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV + \oint \rho V dS = q,$$

q>0 (исток), q<0 (сток), q=0 (ничего)

Приложения:

- ✓ Гидродинамика и механика деформируемого твердого тела
- ✓ Электромагнетизм
- ✓ Теория волн
- ✓ Квантовая механика

Работы с 1954 по 1999 гг.

Автор(ы)	Год	Журнал	Название
Zaremba S.K.	1954	Amer. Journal of Math.	Divergence of vector fields and differential equations
Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.И., Забрейко П.П.	1963	М: Физматлит	Векторные поля на плоскости
Fronteau J.	1965	Genève: CERN	Le théorèm de Liouville et le problèm général de la stabilité
Brauchli H.I.	1968	Zürich: Abhandlung Verlag	Index, Divergenz und Stabilität in Autonomen equations
Шестаков А.А., Степанов А.Н.	1979	Дифф-е ур-я	Индексные и дивергентные признаки устойчивости особой точки автономной системы дифференциальных уравнений
Жуков В.П.	1978	АиТ	Об одном методе качественного исследования устойчивости нелинейных систем
Жуков В.П.	1979, 1981, 1983–1985, 1987, 1988, 1990, 1992 (2), 1994–1998, ..., 2003.	АиТ	—
Жуков В.П.	1999	АиТ	Дивергентные условия асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем второго порядка

Работы с 1954 по 1999 гг.

- Неустойчивость систем произвольного порядка и устойчивость систем второго порядка: [Zaremba54, Красносельский и др.63, Fronteau65, Brauchli68, Жуков78,79].
- Условия неустойчивости улучшены в [Шестаков и Степанов,78, Жуков90]. Условия устойчивости для систем второго порядка улучшены в [Жуков99] за счет использования $\rho(x)$.

Исходная система	**Исследуемая система**
$\dot{x} = f(x)$	$\dot{x} = \rho(x) f(x)$
• для $x \in \mathbb{R}^n$ исследуется неустойчивость • для $x \in \mathbb{R}^2$ исследуется устойчивость	• $\rho(x) > 0$ – вспомогательная функция • $\mathrm{div}\{\rho f\} < 0$ (“У”) и $\mathrm{div}\{\rho f\} > 0$ (НУ)

Работы 2000 и 2001 г.г.

- [Rantzer00,Rantzer01]: асимптотическая устойчивость и сходимость решений **для почти всех** начальных условий в системах произвольного порядка. Также используется $\rho(x)$ (*названная density function*)
- Методы [Rantzer00,Rantzer01] получили наибольшее распространение
- 280 цитирований по Scopus на [Rantzer, SCL, 2001]
- Anders Rantzer (prof., Lund University) в данных статьях не ссылается на работы 1954-1999 гг.

2. The main result

Theorem 1. *Given the equation $\dot{x}(t) = f(x(t))$, where $f \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ and $f(0) = 0$, suppose there exists a non-negative $\rho \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ such that $\rho(x)f(x)/|x|$ is integrable on $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geqslant 1\}$ and*

$$[\nabla \cdot (f\rho)](x) > 0 \quad \text{for almost all } x. \tag{1}$$

Then, for almost all initial states $x(0)$ the trajectory $x(t)$ exists for $t \in [0, \infty)$ and tends to zero as $t \to \infty$. Moreover, if the equilibrium $x = 0$ is stable, then the conclusion remains valid even if ρ takes negative values.

✓ *Rantzer A., Parrilo P.A.* On convexity in stabilization of nonlinear systems // 39th IEEE CDC, 2000.

✓ *Rantzer A.* A dual to Lyapunov's stability theorem // Systems & Control Letters. 2001.

Содержание

Автономные системы

Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

- $x \in \mathbb{R}^n$
- $f = [f_1, ..., f_n]^{\mathrm{T}} : D \to \mathbb{R}^n$ – непрерывно-дифференцируемая функция, определенная в области $D \subset \mathbb{R}^n$
- D содержит $x = 0$ и $f(0) = 0$

Обратная теорема устойчивости

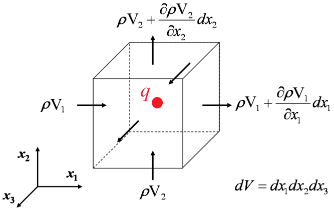
Теорема 1 (Фуртат, Автоматика и телемеханика, 2020; Furtat et al., IFAC WC, 2020)

Пусть $x = 0$ – асимптотически устойчивая точка равновесия системы (1). Тогда существуют положительно определенные непрерывно-дифференцируемые функции $\rho(x)$ и $S(x)$ такие, что $\rho(x) \to \infty$ и $S(x) \to \infty$ при $x \to \bar{D}$, $|\nabla\{S(x)\}| \neq 0$ для любых $x \in D \setminus \{0\}$ и для которых выполнено одно из следующих условий:

1. $\int_V \operatorname{div}\{\rho(x) f(x)\} dV < 0$, $V = \{x \in D : S(x) \leq C\}$
2. $\int_{V_{inv}} \operatorname{div}\{\rho^{-1}(x) f(x)\} dV_{inv} > 0$, $V_{inv} = \{x \in D : S^{-1}(x) \geq C\}$

Сравнение

[Rantzer01]	Предложенные условия
• —	• $\int_V \operatorname{div}\{\rho(x)f(x)\}dV < 0$
• $\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} > 0$	• $\int_{V_{inv}} \operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}dV_{inv} > 0$



- Диф-ая форма УН

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{=0} + \operatorname{div}(\rho V) < 0$$

- Интегральная форма УН

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_S \rho dV}_{=0} + \int_S \operatorname{div}(\rho V)dS < 0$$

Достаточные условия устойчивости

Теорема 2 (Фуртат, Автоматика и телемеханика, 2020; Furtat et al., IFAC WC, 2020)

Пусть задана положительно определенная непрерывно-дифференцируемая функция $\rho(x)$, определенная в области D. Тогда точка $x = 0$ устойчива (асимптотически устойчива), если выполнено одно из следующих условий:

1. $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} \leq \rho(x)\mathrm{div}\{f(x)\}$
2. $\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} \geq 0$ *и* $\mathrm{div}\{f(x)\} \leq 0$
3. $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} \leq \beta(x)\rho^2(x)\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}$, *где* $\beta(x) > 1$ *и* $\mathrm{div}\{f(x)\} \leq 0$ *или только* $\beta(x) = 1$
4. $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} \leq 0$ *и* $\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} \geq 0$

Если в 1–4 заменить нестрогие неравенства на строгие, то $x = 0$ асимптотически устойчива.

Диф-ая форма УН $\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{=0} + \mathrm{div}(\rho V) < 0$

Сравнение достаточных условий

[Rantzer01]	Предложенные достаточные условия
• — • —	• $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} \le \rho(x)\mathrm{div}\{f(x)\}$ (У) • $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} < \rho(x)\mathrm{div}\{f(x)\}$ (АУ)
• — • $\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} > 0$ и $\mathrm{div}\{f(x)\} < 0$ (АУ)	• $\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} \ge 0$ и $\mathrm{div}\{f(x)\} \le 0$ (У) • $\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} > 0$ и $\mathrm{div}\{f(x)\} < 0$ (АУ)
• — • —	• $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} \le \beta(x)\rho^2(x)\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}$ (У), где $\beta(x) > 1$ и $\mathrm{div}\{f(x)\} \le 0$ или только $\beta(x) = 1$ • $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} < \beta(x)\rho^2(x)\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}$ (АУ), где $\beta(x) > 1$ и $\mathrm{div}\{f(x)\} > 0$ или только $\beta(x) = 1$
• — • —	• $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} \le 0$ и $\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} \ge 0$ (У) • $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} < 0$ и $\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} > 0$ (АУ)

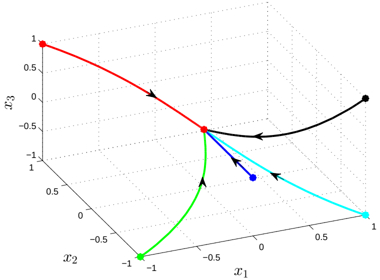
(У) – устойчивость
(АУ) – асимптотическая устойчивость

Пример (Rantzer vs. предложенный дивергентный метод)

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -4x_1x_2^2 - x_1^3,\\
\dot{x}_2 &= 4x_1^2x_2 - x_2^3 - 8x_2x_3^2,\\
\dot{x}_3 &= -x_3^3 + 8x_2^2x_3
\end{aligned}$$

Точка равновесия $(0,0,0)$.



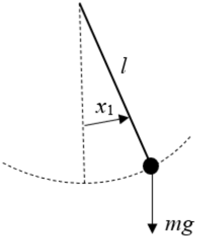
[Rantzer01]	**Предложенные условия**
• Сходимость для почти всех НУ • — (т.к. $\mathrm{div}\{f\} = x_1^2 + x_2^2 - 11x_3^2$)	• Необходимые условия выполнены • АУ ($\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} < \rho(x)\mathrm{div}\{f(x)\}$)

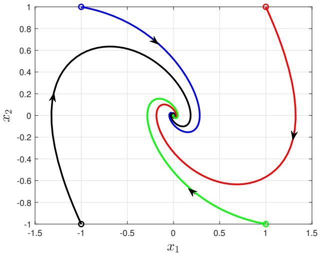
Пример (метод функция Ляпунова vs. дивергентный метод)

Модель маятника

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2$$

Точка равновесия $(0, 0)$.





Метод фун-й Ляпунова [Khalil02]	Дивергентный подход [Furtat & Gushchin, IEEE Access, 21]
• $V(x) = \frac{g}{l}[1 - \cos(x_1)] + 0.5x_2^2$ • Устойчивость ($\dot{V} = -\frac{k}{m}x_2^2$)	• $\rho(x) = \frac{g}{l}[1 - \cos(x_1)] + 0.5x_2^2$ • Асимптотическая устойчивость • Не полиномиальная правая часть и ρ в отличие от [Rantzer01]

Анализ неустойчивости

Метод	Условия неустойчивости
• [Zaremba54,Жуков78]	• $\operatorname{div}\{f(x)\} > 0$
• [Жуков79]	• $\operatorname{div}\{\rho(x)f(x)\} > 0$ и $\rho(x) > 0$
• [Furtat & Gushchin, IEEE Access, 22]	• 4-и новых условия • $\rho(x)$ может быть не положительно-определенной

Анализ неустойчивости

Теорема 3 (Furtat & Gushchin, IEEE Access, 2022)

Пусть $\rho(x) : D \to \mathbb{R}$ *– непрерывно дифференцируемая функция такая, что* $\rho(0) = 0$ *и* $\rho(x_0) > 0$ *для некоторого* x_0 *с произвольно малой величиной* $\|x_0\|$. *Зададим* $U = \{x \in B : \rho(x) > 0\}$ *и* $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r, r > 0\}$ *такие, что* $B \subseteq D$. *Точка равновесия* $x = 0$ *системы* (1) *неустойчива, если хотя бы одно из следующих условий выполнено для любых* $x \in U$*:*

1. $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} > \rho(x)\mathrm{div}\{f(x)\}$
2. $\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} < 0$ *и* $\mathrm{div}\{f(x)\} \geq 0$
3. $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} > \beta(x)\rho^2(x)\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}$, *где* $\beta(x) > 1$ *и* $\mathrm{div}\{f(x)\} \geq 0$ *или только* $\beta(x) = 1$
4. $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} > 0$ *и* $\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} < 0$

Диф-ая форма УН $\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{=0} + \mathrm{div}(\rho V) > 0$

Содержание

- Введение
- Анализ
  - Автономные системы
  - Неавтономные системы (кратко)
- Синтез закона управления. Функция плотности
- Заключение

Неавтономные системы

Рассмотрим неавтономную систему

$$\dot{x} = f(x, t), \tag{2}$$

- $x \in \mathbb{R}^n$
- $f : D \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ непрерывна по t и непрерывно-дифференцируема по x в $D \times [0, \infty)$
- $D \subset \mathbb{R}^n$ содержит $x = 0$ и $f(0, t) = 0$

Необходимые условия устойчивости

Теорема 4 (Краткий результат. Furtat & Gushchin. Journal of Franklin Institute, 2020)

1. $\int_V \left[\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} + \mathrm{div}\{\mu(x,t)|\nabla\{\rho(x,t)\}|f(x,t)\}\right] dV < 0$
2. $\int_{V_{inv}} \left[\frac{\partial\rho^{-1}(x,t)}{\partial t} + \mathrm{div}\{\mu(x,t)|\nabla\{\rho^{-1}(x,t)\}|f(x,t)\}\right] dV_{inv} > 0$

Диф-я форма УН $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho V) = q < 0$ Инт-я форма УН $\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV + \oint \rho V dS = q < 0$

Динамика жидкости	$\lvert\nabla\rho\rvert\mu$ или $\lvert\nabla\rho^{-1}\rvert\mu$ – плотность жидкости и f – поток вектора скорости
Теория электромагнетизма	$\mu\lvert\nabla S\rvert f$ и $\mu\lvert\nabla\rho^{-1}\rvert f$ – плотность тока и ρ – плотность заряда
Закон сохранения энергии	$\mu\lvert\nabla\rho\rvert f$ или $\mu\lvert\nabla\rho^{-1}\rvert f$ – вектор потока энергии и ρ – локальная плотность энергии
Квантовая механика	ρ – функция плотности вероятности и $\mu\lvert\nabla\rho\rvert f$ или $\mu\lvert\nabla\rho^{-1}\rvert f$ – вероятность тока

Достаточное условие устойчивости

Теорема 5 (Furtat & Gushchin, Journal of the Franklin Institute, 2020)

$x = 0$ – *равномерно устойчива, если*

1. $\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \mathrm{div}\{\rho(x,t)f(x,t)\} \le \rho(x,t)\mathrm{div}\{f(x,t)\}$
2. $\frac{\partial \rho^{-1}(x,t)}{\partial t} + \mathrm{div}\{\rho^{-1}(x,t)f(x,t)\} \ge 0$ *и* $\mathrm{div}\{f(x,t)\} \le 0$
3. $2\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \mathrm{div}\{\rho(x,t)f(x)\} \le 0$ *и* $\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x,t)\} \ge 0$

Если неравенства строгие, тогда $x = 0$ – *равномерно асимптотически устойчивая.*

Диф-ая форма УН $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho V) < 0$

Содержание

- Введение
- Анализ
- Синтез закона управления. Функция плотности
    - Использование ρ для анализа
    - Использование ρ для синтеза
- Заключение

Пример
Использование функции плотности ρ для анализа устойчивости замкнутой системы

Рассмотрим следующую систему

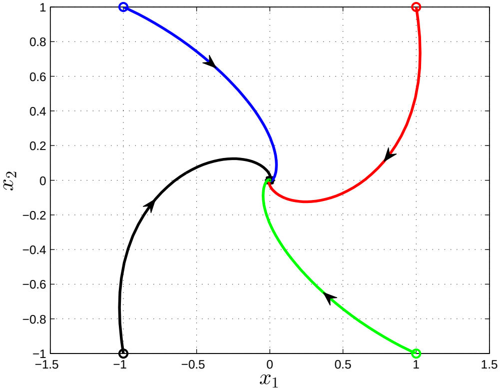
$$\dot{x}_1 = x_2 - \frac{g(t)x_1}{1+x_2^2},$$
$$\dot{x}_2 = u,$$

- $g(t)$ неизвестна, но $0 < g(t) < \overline{g} < \infty$
- Требуется обеспечить равномерную асимптотическую устойчивость $x = 0$

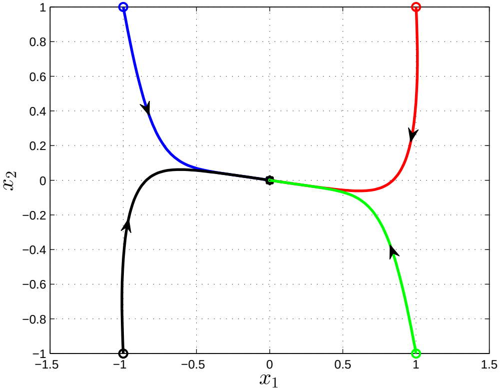
Пример (дивергентный метод vs. метод функций Ляпунова)

Дивергентный подход	Метод функций Ляпунова
1. Выберем $\rho(x) = (x_1^2 + x_2^2)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}$ $\boxed{\mathrm{div}\{f\} < 0 \text{ и } \mathrm{div}\{\rho^{-1} f\} > 0}$ 2. Найдем u : $\mathrm{div}\{f\} = \frac{g}{1+x_2^2} + \frac{\partial u}{\partial x_2} < 0$ Пусть $\frac{g}{1+x_2^2} + \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\gamma - g}{1+x_2^2}, \quad \gamma > \bar{g} \qquad (3)$ 3. Одно из решений (3): $u = -\gamma\, \mathrm{atan}(x_2) - x_1 \qquad (4)$ 4. Проверим $\mathrm{div}\{\rho^{-1} f\} = (x_1^2 + x_2^2)^{-\alpha-1} \times \left[\frac{(2\alpha g - g - \gamma)x_1^2}{1+x_2^2} + 2\alpha\gamma x_2 \mathrm{atan}(x_2) - \frac{(g+\gamma)x_2^2}{1+x_2^2}\right] > 0$	1. Выберем $V(x) = (x_1^2 + x_2^2)^\alpha$ 2. Найдем $\frac{dV}{dt} = (x_1^2 + x_2^2)^{-\alpha-1}\left[x_1 x_2 - \frac{g x_1}{1+x_1^2} + x_2 u\right]$ 3. Подставим (4) $\frac{dV}{dt} = -(x_1^2 + x_2^2)^{-\alpha-1}\left[\frac{g x_1}{1+x_1^2} + \gamma x_2 \mathrm{atan}(x_2)\right] < 0$

Пример. Иллюстрация



$\gamma = 2,\ g(t) = 1 + 0,95\sin(t)$



$\gamma = 10,\ g(t) = 1 + 0,95\sin(t)$

Робастное управление. Использование ρ для синтеза u

- Объект управления (минимально-фазовый)

$$Q(p)y(t) = R(p)u(t)$$

  - $y \in \mathbb{R}$ – выходной сигнал, $u \in \mathbb{R}$ – входной сигнал (управление)
  - $Q(p)$ и $R(p)$ – линейные дифференциальные операторы

	Ioannou and Sun 12 (book) Khalil and Praly IJRNC 14 Цыкунов и др. АиТ 07-17	Предложенный метод Furtat & Gushchin, IJC, 2020 Фуртат, АиТ, 2023
Закон управления	$u(t) = -\alpha \frac{Q_m(p)}{pR_m(p)(\mu p+1)^{\gamma-1}} y(t)$	$u(t) = -\alpha \frac{Q_m(p)}{pR_m(p)(\mu p+1)^{\gamma-1}} \rho(y,t) y(t)$
Цель управления	$\overline{\lim}_{t\to T} \lvert y(t)\rvert < \delta$	• Зависит от выбора ρ • Например, $\underline{g}(t) < y(t) < \overline{g}(t)$

Адаптивное управление. Использование ρ для синтеза u

- Объект управления (минимально-фазовый и $\deg Q - \deg R = 1$)

$$Q(p)y(t) = R(p)u(t) \tag{5}$$

	Мирошник, Никифоров, Фрадков 2000 (book) Андриевский, Фрадков 99 (book) Annaswamy et al. TAC 86 Цыкунов АиТ 05	Предложенный метод Фуртат, АиТ, 2023
Закон управления	$u(t) = c^{\mathrm{T}}(t)w(t)$ $\dot{c} = -\alpha y w$	$u(t) = c^{\mathrm{T}}(t)w(t) + \rho(y,t)$ $\dot{c} = -\alpha y w$
Замкнутая система	$\dot{y}(t) = (c(t) - c_0)^{\mathrm{T}} w(t) - \alpha y$	$\dot{y}(t) = (c(t) - c_0)^{\mathrm{T}} w(t) + \rho(y,t)$
Цель управления	$\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$	• Зависит от выбора ρ • Например, $\underline{g}(t) < y(t) < \overline{g}(t)$

Пример. Адаптивное управление

- $\rho(y,t) = -\alpha y$ – адаптивное управление: Мирошник, Никифоров, Фрадков 2000 (book)
- $\rho(y,t) = \alpha \ln \frac{g-y}{g+y}$

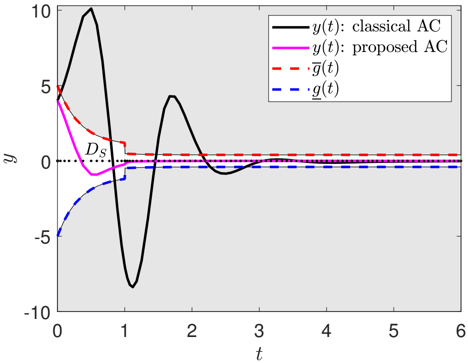
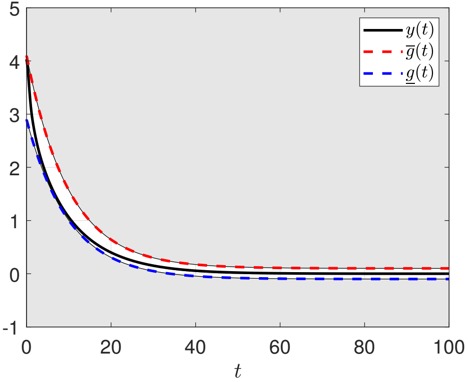
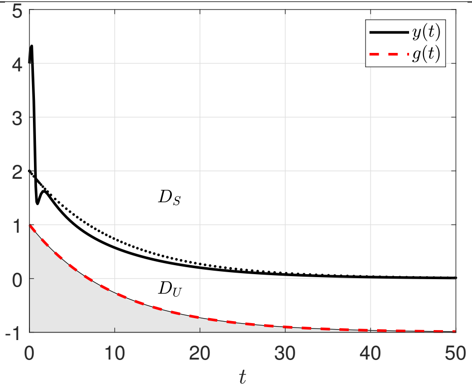
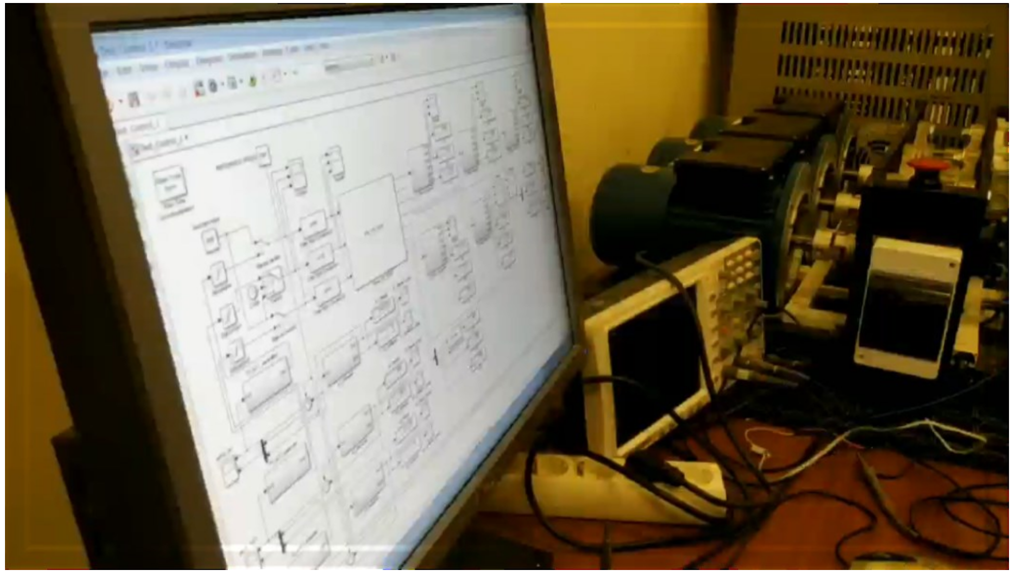
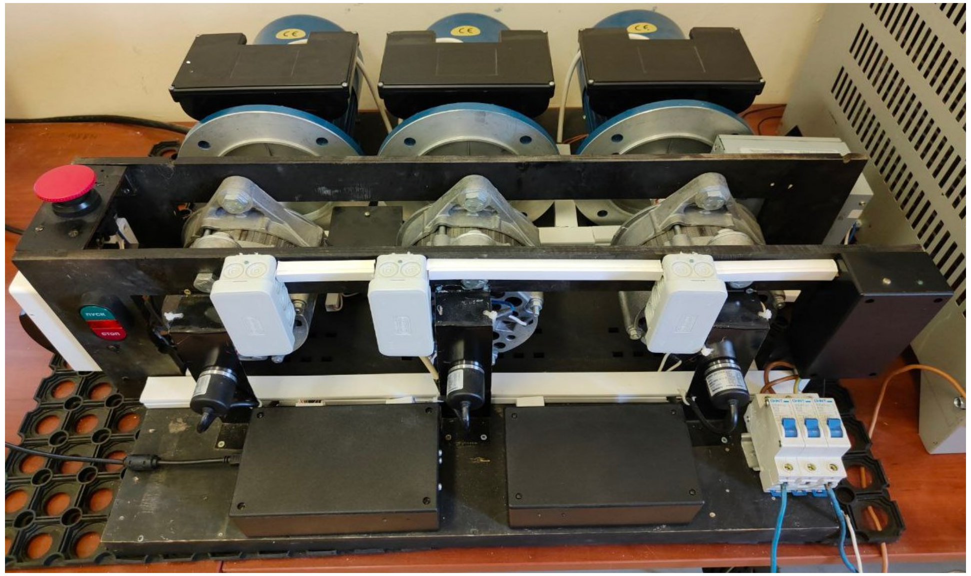


Рис.: Переходные процессы при $\rho(y,t) = -\alpha y$ и $\rho(y,t) = \alpha \ln \frac{g-y}{g+y}$.

• $\rho(y,t) = \alpha \ln \frac{\overline{g}-y}{y-\underline{g}}$	• $\rho(y,t) = -\alpha \ln(y-g)$
	

Управление электроэнергетическим стендом

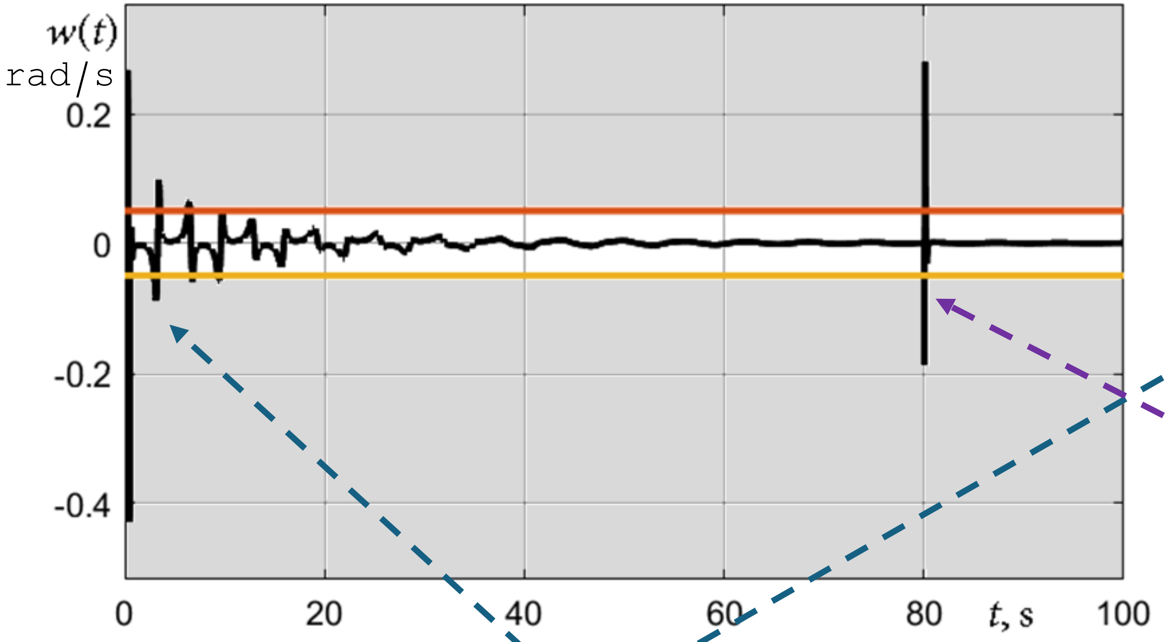




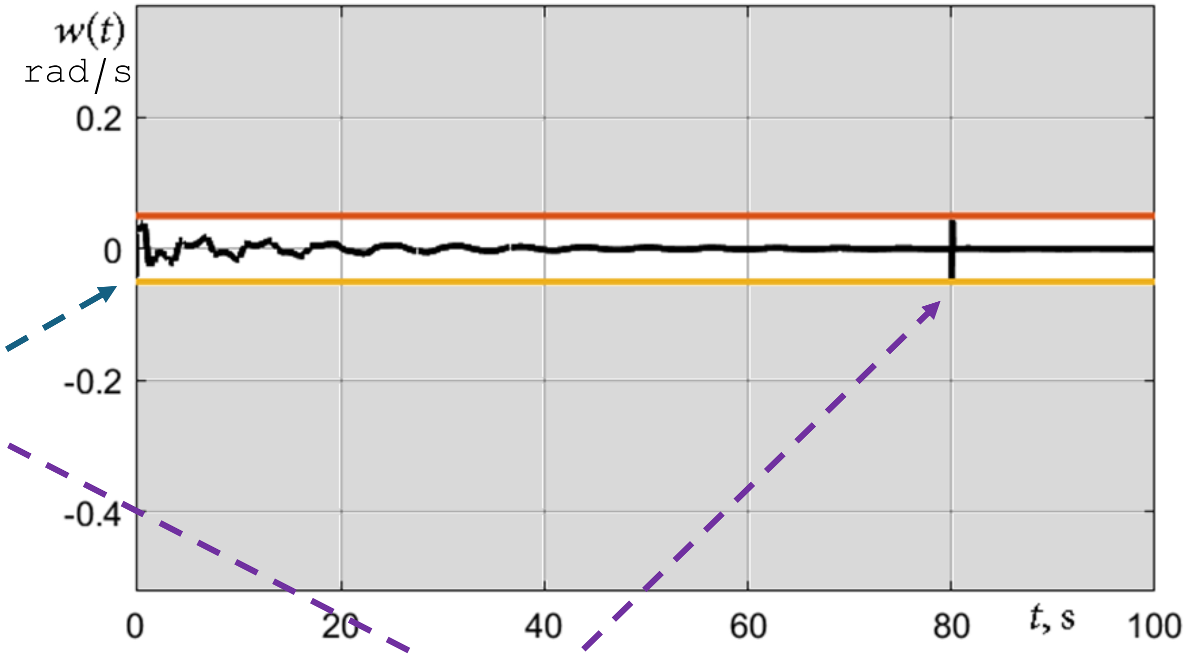
Furtat et al. *Int. Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2022

Управление электроэнергетическим стендом

- Линеаризация обратной связью и робастное управление [Wang, Xie, Hill et al., *CDC* 1992]
- Робастное управление с компенсацией возмущений [Furtat et al., *IJ ACSP* 2022]



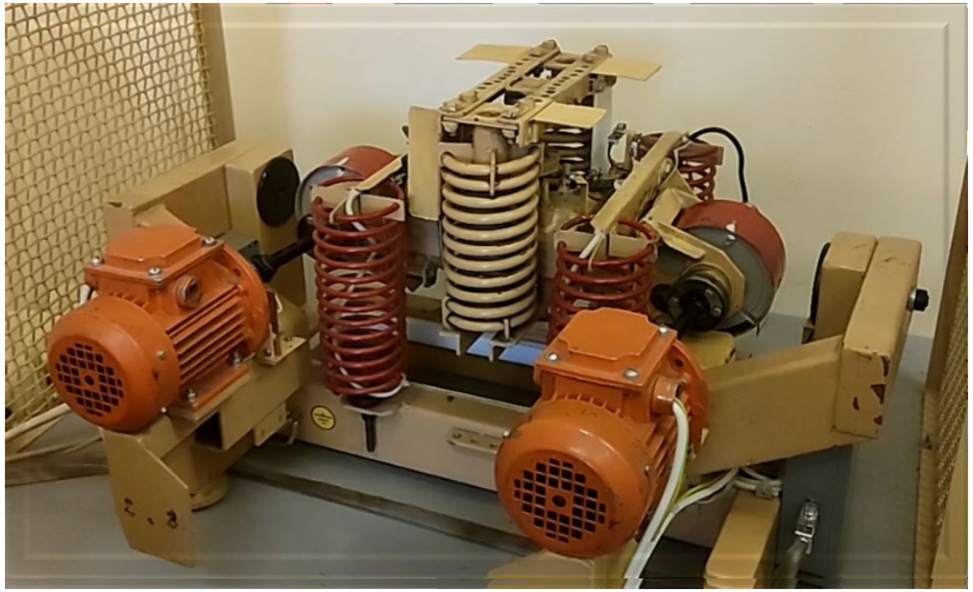
- Предложенный (плотностной) закон управления [Furtat et al., *IFAC WC*, 2023]

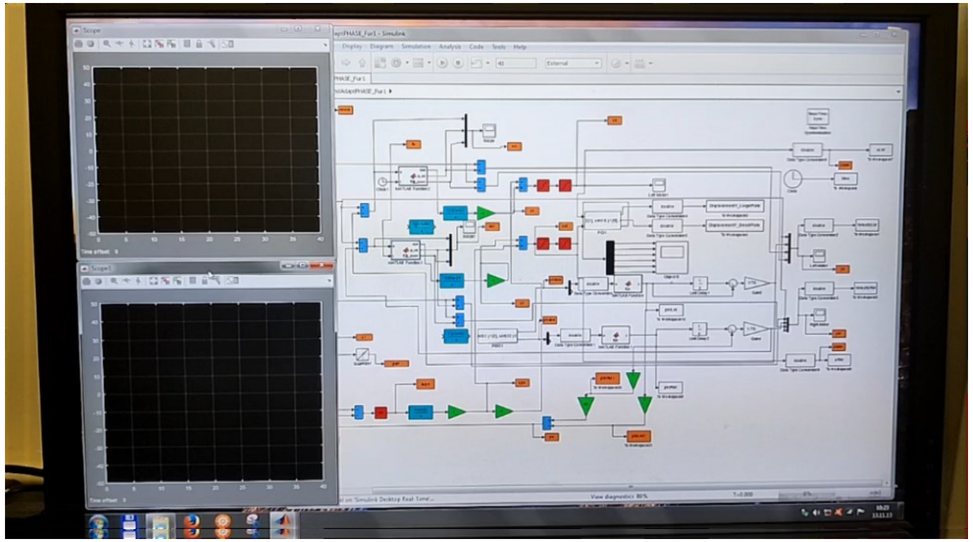


Вначале присутствует затухающее возмущение в приводе ротора генератора

На 80 сек. происходит резкое изменение сопротивление нагрузки в сети

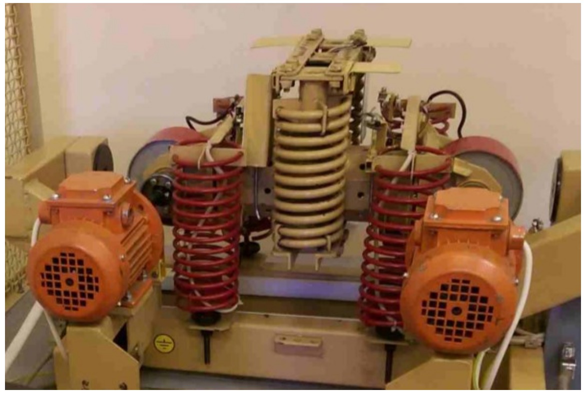
Управление вибрационным мехатронным стендом

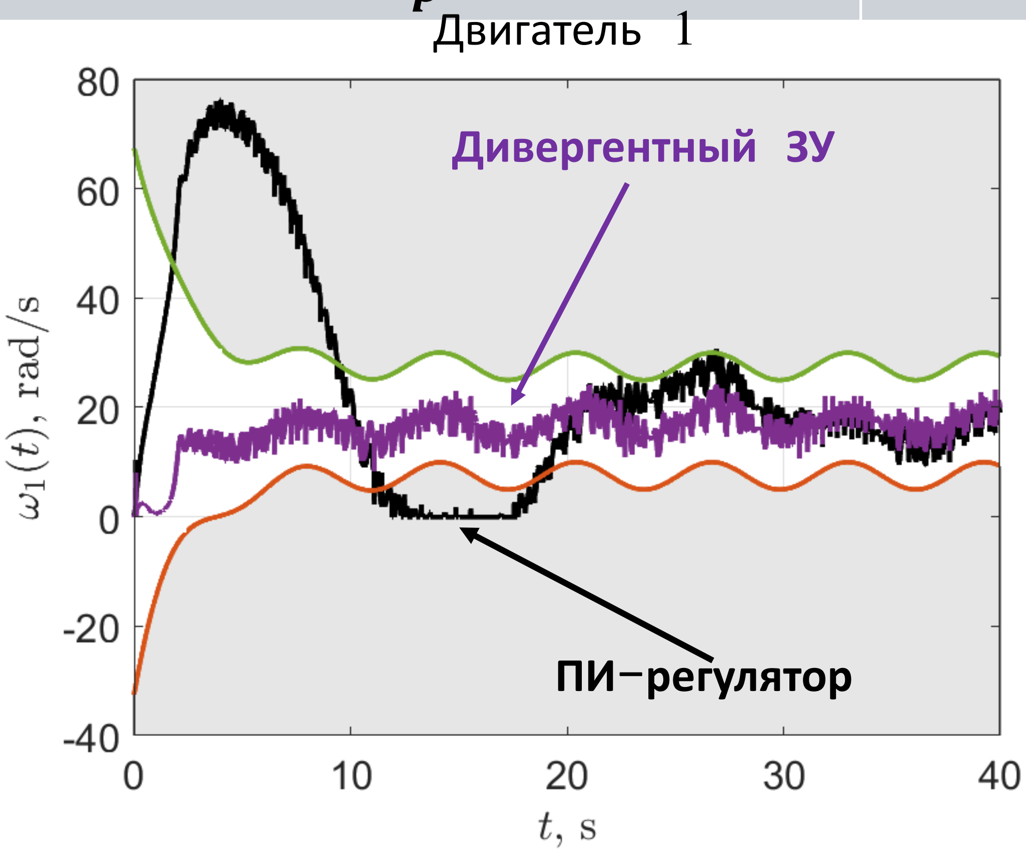


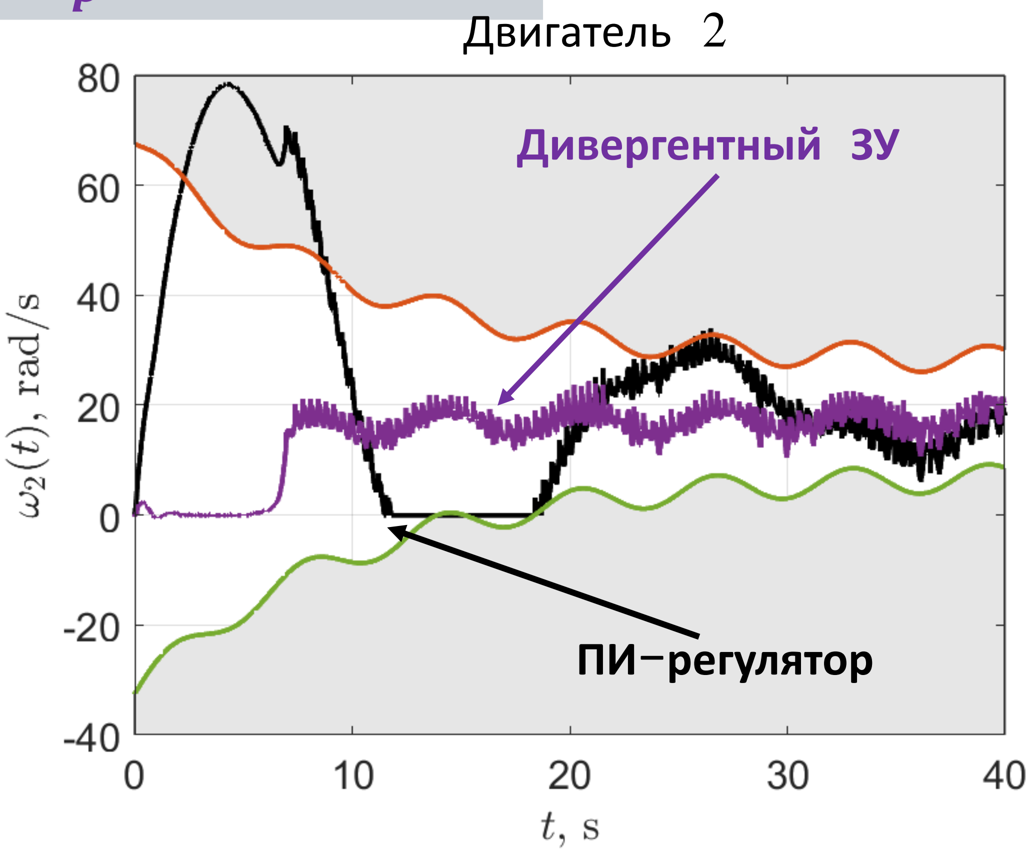


Управление вибрационным мехатронным стендом

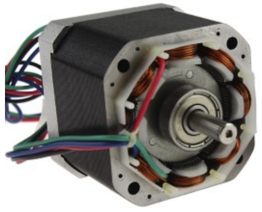
ПИ–регулятор *Andrievski et al. Symmetry 2022,* *CoDIT 2022, IFAC 2022*	**ПИ–регулятор с функцией плотности** ***Фуртат, АиТ, 2023***
$$\boldsymbol{y(t)=\frac{101p+998}{p}e(t)}$$	$$\boldsymbol{y(t)=\frac{101p+998}{p}\rho(e,t)}$$



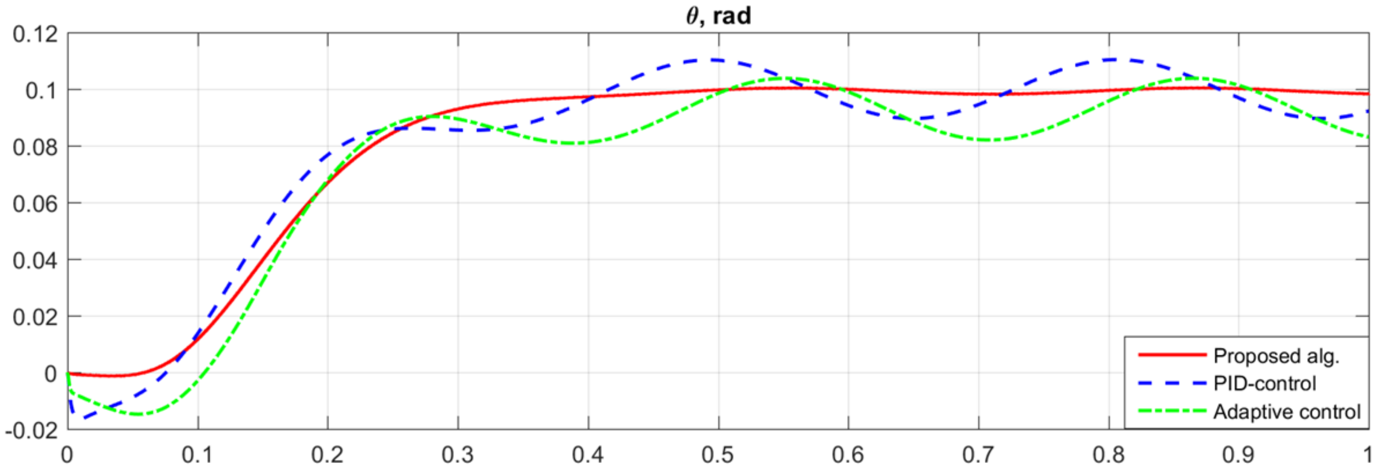




Управление мехатронными модулями в системах трансформируемых конструкций объектов авиационно–космической техники



АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М. Ф. Решетнёва»



Furtat, Zhukov, Matveev, *Cybernetics and Physics*, 2023
Фуртат, Жуков, Слободзян, *Мехатроника, автоматизация, управление*, 2023
Furtat, Zhukov, Korotkov, Pryanichnikov, *Russian Aeronautics*, 2023

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Заключение

- Предложено развитие дивергентного метода исследования устойчивости автономных и неавтономных динамических систем
- Разработанный метод может быть использован как альтернативный метод для существующих методов исследования устойчивости
- Показано использование дивергентного метода для синтеза закона управления :
  - ✓ функция плотности используется для анализа устойчивости замкнутой системы
  - ✓ функция плотности используется для синтеза закона управления

Заключение

- Обобщены теоремы Бендиксона и Бендиксона–Дюлака об отсутствии предельных циклов (для систем 2–го порядка) на n–й случай
  Furtat, Gushchin, *IEEE Access*, 2021

- Получены дивергентные условия экспоненциальной устойчивости систем n–го порядка
  Furtat, Gushchin, *IEEE Access*, 2022

- Разработаны методы управления с ограничениями на фазовые переменные и входной сигнал. Расчет параметров регулятора осуществляется с помощью LMIs (линейных матричных неравенств)
  Фуртат и др., *AuT*, 2023
  Furtat et al., *European Journal of Control*, 2024

- Разработаны дифференциатор, наблюдатель и идентификатор с использованием свойств плотности пространства