СИНТЕЗ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ КАК ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ

М.В. Хлебников

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Лаборатория адаптивных и робастных систем им. Я.З. Цыпкина

XIV Всероссийское совещание по проблемам управления
(ВСПУ 2024)
Москва, ИПУ РАН, 17–20 июня 2024 г.

ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ ПОДХОД К УПРАВЛЕНИЮ

- Описание системы управления (*линейная; непрерывная или дискретная*)
- Цель управления (*квадратичный критерий; подавление внешних возмущений*)
- Закон управления (*линейная обратная связь по состоянию или по выходу*)
- Возникает задача оптимизации, где переменные — это матрицы обратной связи. Исследуются её свойства (*область определения, выпуклость, гладкость*), выписывается градиент и обосновывается градиентный метод оптимизации.

Для линейно-квадратичной задачи градиент (для управления по состоянию) был выписан в работе Калмана[a] 1960 года, а для обратной связи по выходу — в статье Левина и Атанса[b].

С тех пор неоднократно применялись итеративные методы оптимизации градиентного типа, однако их обоснование стало появляться лишь недавно.

[a] *Kalman R.E.* Contributions to the Theory of Optimal Control // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. 1960. Vol. 5. No. 1. P. 102–119.

[b] *Levine W., Athans M.* On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1970. Vol. 15. No. 1. P. 44–48.

I. ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА

• Линейная система управления:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы

$y(t) \in \mathbb{R}^\ell$ — выход

$u(t) \in \mathbb{R}^p$ — управление

• Критерий качества:

$$f(K) = \mathbb{E}_{\sim x(0)} \int_0^\infty \big(x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)\big)dt, \quad Q, R \succ 0$$

Начальные условия $x(0)$ распределены нормально с нулевым средним и ковариационной матрицей Σ.

• Цель: найти матрицу K обратной связи по состоянию $u(t) = -Kx(t)$ или по выходу (если она существует) $u(t) = -Ky(t)$, минимизирующую $f(K)$.

Задача оптимизации

Исходная задача эквивалента оптимизационной задаче:

$$f(K) = \operatorname{tr} X\Sigma \to \min$$

при ограничении

$$(A - BKC)^{\mathrm{T}} X + X(A - BKC) + C^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} RKC + Q = 0$$

- Область определения $f(K)$: $A_K = A - BKC$ — гурвицева матрица.

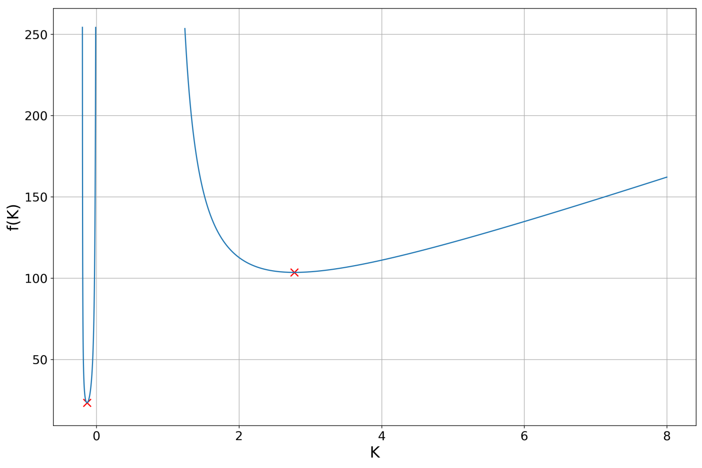
- Свойства $f(K)$: функция $f(K)$ гладкая, но невыпуклая. Область ее определения может быть несвязным и невыпуклым множеством, причем его граница может быть негладкой. $f(K)$ неограниченно возрастает при приближении к границе.

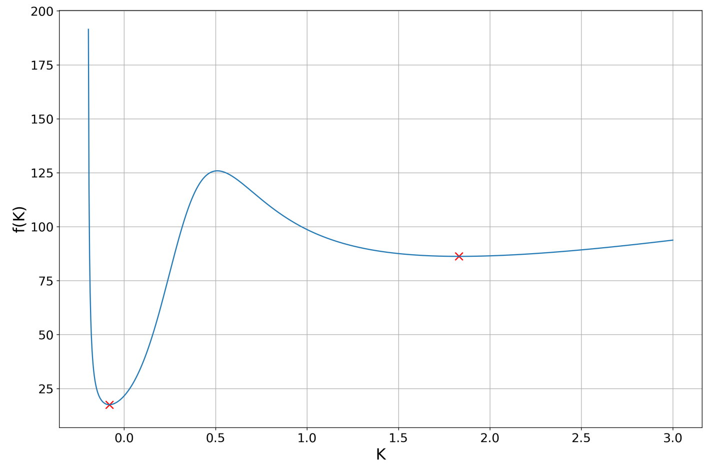
- Вычисление $f'(K)$: $f'(K) = 2(RKC - B^{\mathrm{T}} X)YC^{\mathrm{T}}$, где $A_K^{\mathrm{T}} Y + YA_K = -\Sigma$.

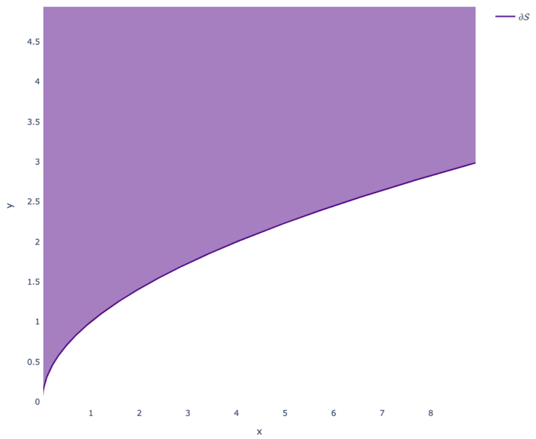
Теорема. Пусть известен K_0 — стабилизирующий регулятор. Тогда $f'(K)$ липшицев с константой L на множестве уровня $\{K\colon\ f(K) \leqslant f(K_0)\}$, а для управления по состоянию выполнено условие градиентного доминирования (PL-condition)

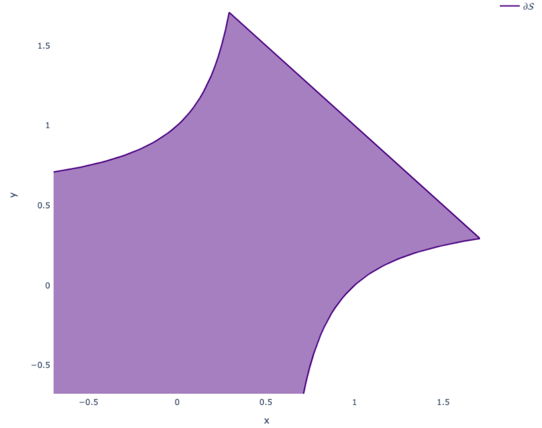
$$\|f'(K)\|^2 \geqslant \mu\big(f(K) - f(K_*)\big)$$

Примеры функций $f(K)$









Метод оптимизации

Градиентный метод:

$$K_{j+1} = K_j - \gamma_j f'(K_j)$$

На каждой итерации нужно решить два матричных уравнения Ляпунова.

Теорема. *Для* $0 < \gamma_j \leqslant \frac{2}{L}$ *метод дает невозрастающую последовательность* $\{f(K_j)\}$*; при этом*

$$f'(K_j) \to 0, \qquad \min_{0 \leqslant j \leqslant k} \|f'(K_j)\|_F^2 \leqslant \frac{f(K_0)}{c_1 k}$$

и для $C = I$ *процесс сходится к глобальному минимуму* K_* *с линейной скоростью*

$$\|K_j - K_*\| \leqslant cq^j, \quad 0 \leqslant q < 1$$

- Градиентный метод сходится к оптимальному решению в случае управления по состоянию и к стационарной точке при управлении по выходу.

- Возможны и другие методы первого порядка (например, метод сопряженных градиентов).

II. ПОДАВЛЕНИЕ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

- Система управления:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dw, \quad x(0) = x_0$$

$$y = C_1 x$$

$$z = C_2 x$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние

$y(t) \in \mathbb{R}^\ell$ — измеряемый выход

$z(t) \in \mathbb{R}^r$ — регулируемый выход

$u(t) \in \mathbb{R}^p$ — управление

$w(t) \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение, ограниченное в каждый момент времени:

$$\|w(t)\|_2 \leqslant 1 \quad \text{для всех } t \geqslant 0$$

- Цель: стабилизирующая статическая линейная обратная связь по состоянию

$$u = Kx$$

или по выходу (если она существует)

$$u = Ky$$

минимизирующая “пиковое” значение величины выхода $z(t)$.

Подходы к решению

Точное решение этой задачи затруднительно, однако возможна минимизация верхней оценки величины

$$\max_{t\geqslant 0}\ \max_{\|w\|\leqslant 1} \|z(t)\|$$

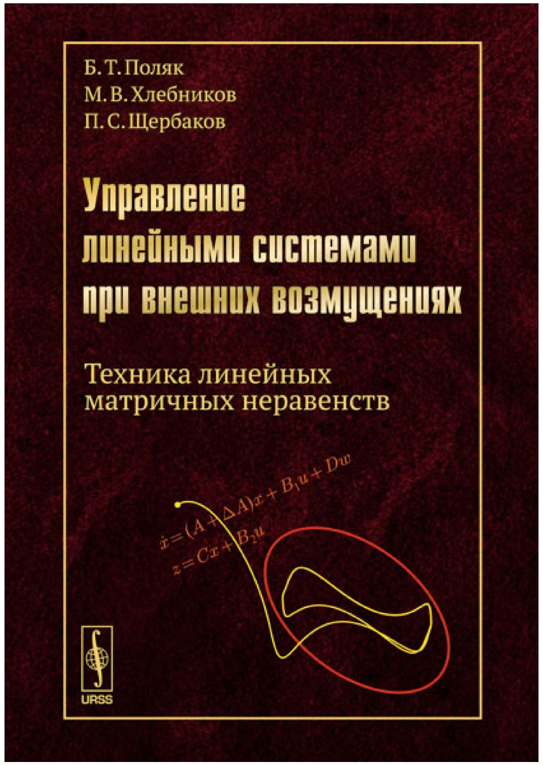
устанавливаемой с помощью понятия инвариантного эллипсоида и техники линейных матричных неравенств (ЛМН).

Такой подход впервые был применен в монографии

- *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.

и развит в монографии

- *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: URSS, 2014.



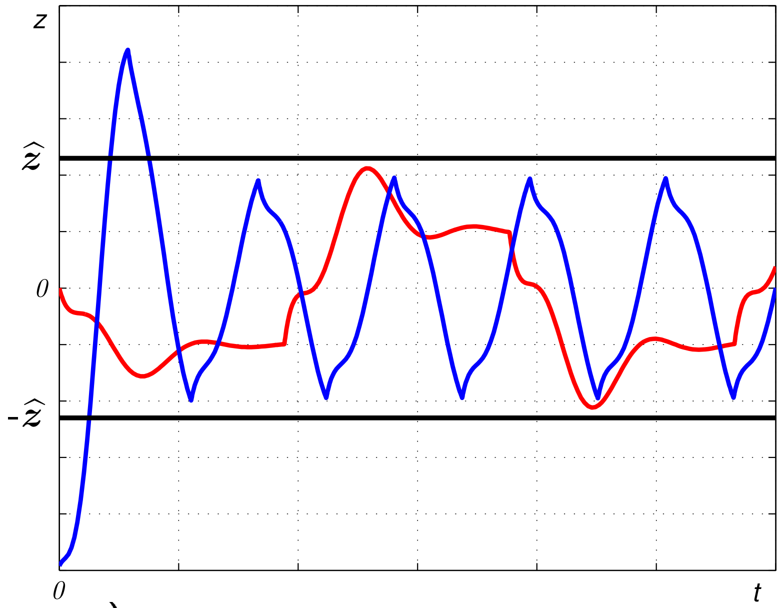
Подходы к решению (продолжение)

Устойчивая система:

$$\dot{x} = Ax + Dw$$

$x \in \mathbb{R}^n$ — состояние, $w \in \mathbb{R}^m$ — ограниченное внешнее возмущение:

$$\|w(t)\| \leqslant 1 \quad \text{для всех } t \geqslant 0$$



- Для скалярного выхода

$$z = c^{\mathrm{T}} x, \quad c \in \mathbb{R}^n$$

рассмотрим (при нулевых начальных условиях) величину

$$\widehat{z} = \max_{t \geqslant 0} \max_{\|w\| \leqslant 1} |z(t)|$$

- При $x(0) = 0$ имеем равномерную оценку поведения выхода системы:

$$|z(t)| \leqslant \widehat{z} \quad \text{для всех } t \geqslant 0$$

- При $x(0) \neq 0$ оценка будет асимптотической
- Многомерный случай: заключим вектор выхода системы в эллипсоид

Инвариантные эллипсоиды

- Эллипсоид

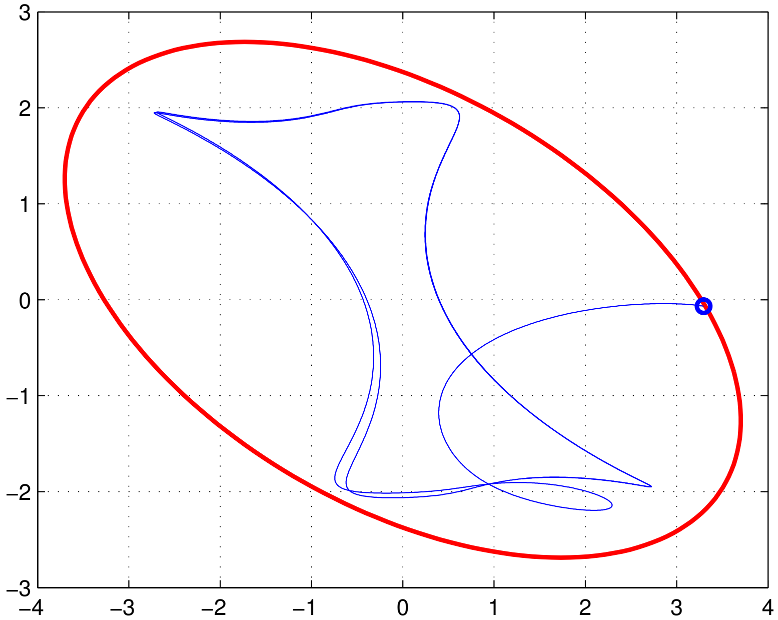
$$\mathcal{E}_x = \left\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ x^{\mathrm{T}} P^{-1} x \leqslant 1\right\}, \quad P \succ 0$$

называется **инвариантным**, если

$$x(0) \in \mathcal{E}_x \implies x(t) \in \mathcal{E}_x \quad \text{для всех } t \geqslant 0$$

- Свойство притягиваемости:

$$x(0) \notin \mathcal{E}_x \implies x(t) \to \mathcal{E}_x \quad \text{при } t \to \infty$$



- Выход $z = Cx$ при $x(0) \in \mathcal{E}_x$ принадлежит **ограничивающему** эллипсоиду

$$\mathcal{E}_z = \left\{z \in \mathbb{R}^\ell\colon \quad z^{\mathrm{T}} (CPC^{\mathrm{T}})^{-1} z \leqslant 1\right\}$$

а при $x(0) \notin \mathcal{E}_x$ стремится к нему

- В случае скалярного выхода $\mathcal{E}_z$ — отрезок

- **Цель:** найти минимальный (по некоторому критерию) инвариантный или ограничивающий эллипсоид

Обсуждение

- Задача подавления внешних возмущений при управлении по состоянию

$$u = Kx$$

с помощью специальных замен матричных переменных сводится к параметрической задаче полуопределенного программирования (SDP) из класса задач выпуклой оптимизации.

Для таких задач существуют удобные численные методы решения.

- При управлении по выходу

$$u = Ky$$

такое сведение принципиально невозможно.

Для таких задач требуются новые методы решения!

Постановка задачи и предлагаемый подход

- Исходная задача эквивалентна задаче матричной оптимизации:

$$f(K,\alpha) = \operatorname{tr} C_2 P C_2^{\mathrm{T}} + \rho\|K\|_F^2 \to \min$$

при ограничении

$$\Big(A + BKC_1 + \frac{\alpha}{2}I\Big)P + P\Big(A + BKC_1 + \frac{\alpha}{2}I\Big)^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\alpha}DD^{\mathrm{T}} = 0$$

относительно матричных переменных $P = P^{\mathrm{T}}$, K *и скалярного параметра* $\alpha > 0$.

- Первая компонента $f(K,\alpha)$ определяет размер ограничивающего эллипсоида (по критерию следа), содержащего регулируемый выход, а вторая — штраф за величину управления (коэффициент $\rho > 0$ регулирует его важность). Ее наличие позволяет избежать появления больших значений матрицы регулятора.

- Предположение: известен стабилизирующий регулятор K_0, т. е. такой, что матрица $A + BK_0C_1$ гурвицева.

- Предлагается итеративный подход к решению задачи; в его основе лежит попеременное применение градиентного метода по переменной K и минимизации по α по методу Ньютона.

Минимизация функции $f(K,\alpha)$ по α

Минимизация по α эффективно проводится с помощью метода Ньютона:

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{f'_\alpha(K,\alpha_j)}{f''_{\alpha\alpha}(K,\alpha_j)}$$

где

$$f'_\alpha(K,\alpha) = \operatorname{tr} Y\Big(P - \frac{1}{\alpha^2} DD^{\mathrm T}\Big), \qquad f''_{\alpha\alpha}(K,\alpha) = 2\operatorname{tr} Y\Big(X + \frac{1}{\alpha^3} DD^{\mathrm T}\Big)$$

а P, Y и X — решения уравнений Ляпунова

$$\Big(A + BKC_1 + \frac{\alpha_j}{2} I\Big)P + P\Big(A + BKC_1 + \frac{\alpha_j}{2} I\Big)^{\mathrm T} + \frac{1}{\alpha_j} DD^{\mathrm T} = 0$$

$$\Big(A + BKC_1 + \frac{\alpha_j}{2} I\Big)^{\mathrm T} Y + Y\Big(A + BKC_1 + \frac{\alpha_j}{2} I\Big) + C_2^{\mathrm T} C_2 = 0$$

$$\Big(A + BKC_1 + \frac{\alpha_j}{2} I\Big)X + X\Big(A + BKC_1 + \frac{\alpha_j}{2} I\Big)^{\mathrm T} + P - \frac{1}{\alpha_j^2} DD^{\mathrm T} = 0$$

- Можно гарантировать глобальную сходимость метода (быстрее, чем геометрическая прогрессия с коэффициентом 1/2) и его квадратичную сходимость в окрестности решения.
- Реально требуется не более 3–4 итераций для получения решения с большой точностью.

Минимизация функции $f(K,\alpha)$ по K

Функция $f(K,\alpha)$ определена на множестве $\mathcal{S}$ стабилизирующих обратных связей K и для $0<\alpha<2\sigma(A+BKC_1)$ и стремится к бесконечности на его границе.

- На этом множестве она дифференцируема, причем

$$f'_K(K,\alpha) = 2(B^{\mathrm{T}}YPC_1^{\mathrm{T}} + \rho K)$$

где Y — решение уравнения Ляпунова

$$\Big(A+BKC_1+\frac{\alpha}{2}I\Big)^{\mathrm{T}}Y + Y\Big(A+BKC_1+\frac{\alpha}{2}I\Big) + C_2^{\mathrm{T}}C_2 = 0$$

- Шаг градиентного метода:

$$K_{j+1} = K_j - \gamma_j f'_K(K_j,\alpha_j)$$

где длина шага $\gamma_j>0$ подбирается дроблением пробного шага γ до выполнения:

а) K_{j+1} обращает матрицу $A+BKC_1+\frac{\alpha_j}{2}I$ в гурвицеву;

б) $f(K_{j+1}) \leqslant f(K_j) - \tau\gamma_j\|f'_K(K_j,\alpha_j)\|^2, \quad 0<\tau<1.$

- Для полученного K_{j+1} решается задача минимизации $f(K_{j+1},\alpha)$ по α, после чего вновь делается шаг градиентного метода по переменной K и т.д.

Комментарии

Предлагаемый метод сходится в следующем смысле.

Теорема. *На каждой итерации реализуется лишь конечное число дроблений γ_j, функция $f(K_j, \alpha_j)$ монотонно убывает, и ее градиент стремится к нулю со скоростью геометрической прогрессии.*

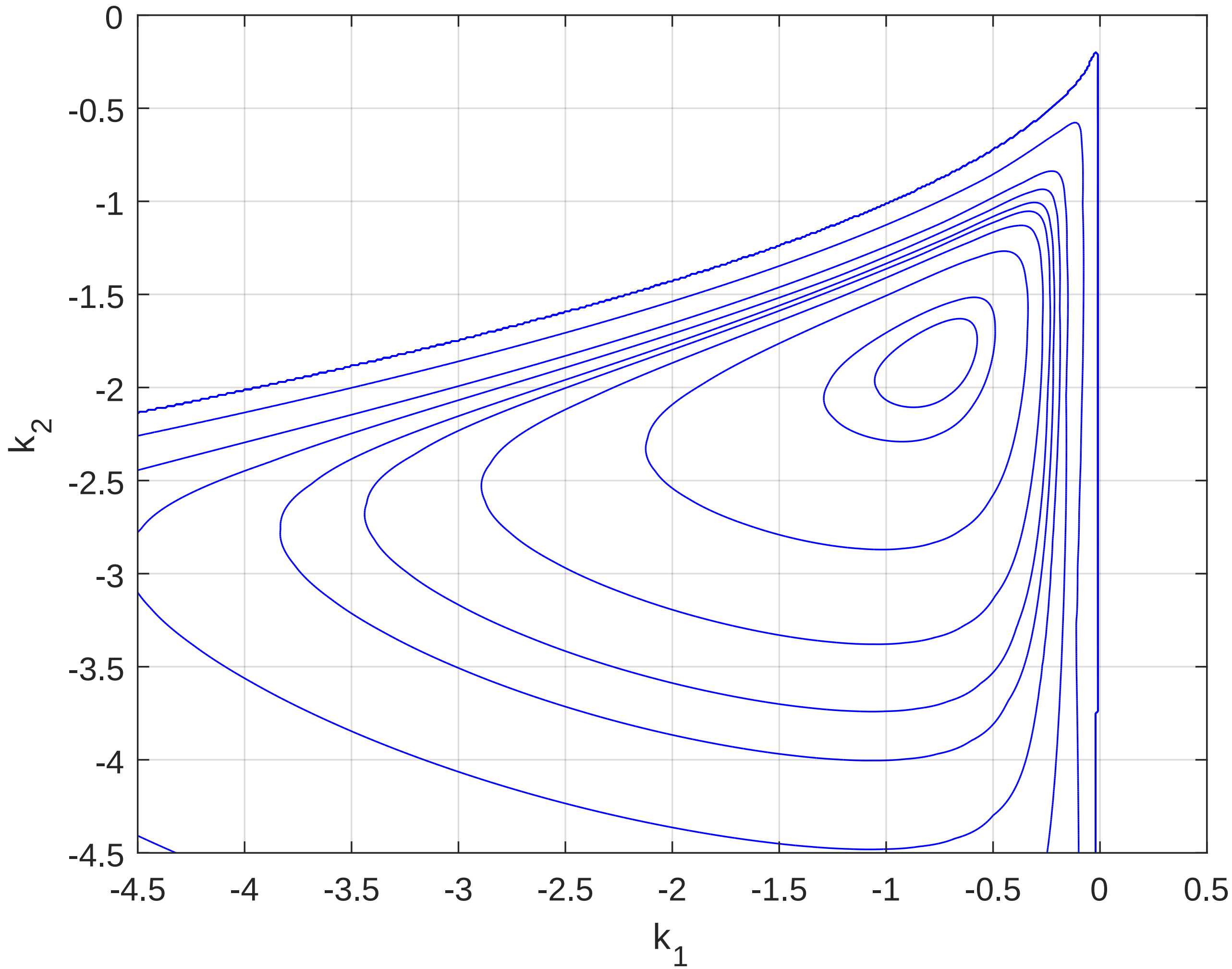
- Весьма перспективным с вычислительной точки зрения является способ выбора пробного шага, основанный на использовании вторых производных:

$$\gamma_j = \frac{\|f'_K(K_j, \alpha_j)\|^2}{\langle f''_{KK}(K_j, \alpha_j)[f'_K(K_j, \alpha_j)], f'_K(K_j, \alpha_j)\rangle}$$

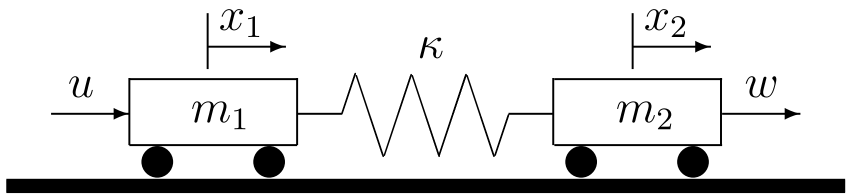
Это требует решения всего лишь еще одного уравнения Ляпунова, т. е. не сильно усложняет вычисления.

- Трудно рассчитывать на сходимость метода к глобальному минимуму, поскольку область определения $f(K)$ может быть даже несвязной. Однако для задачи управления по состоянию по-видимому можно гарантировать и глобальную сходимость к единственной точке минимума.

Пример функции $f(K)$



Пример 1. Двухмассовая система из двух твердых тел с массами m_1 и m_2, соединенных пружиной с коэффициентом упругости κ, скользящих без трения вдоль неподвижного горизонтального стержня; к левому телу приложено управление u, к правому — внешнее возмущение w, $|w| \leqslant 1$.



Непрерывная модель колебаний системы (далее параметры системы единичны):

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= v_1 \\
\dot{x}_2 &= v_2 \\
\dot{v}_1 &= -\frac{\kappa}{m_1}x_1 + \frac{\kappa}{m_2}x_2 + \frac{1}{m_1}u \\
\dot{v}_2 &= \frac{\kappa}{m_2}x_1 - \frac{\kappa}{m_2}x_2 + \frac{1}{m_2}w
\end{aligned}$$

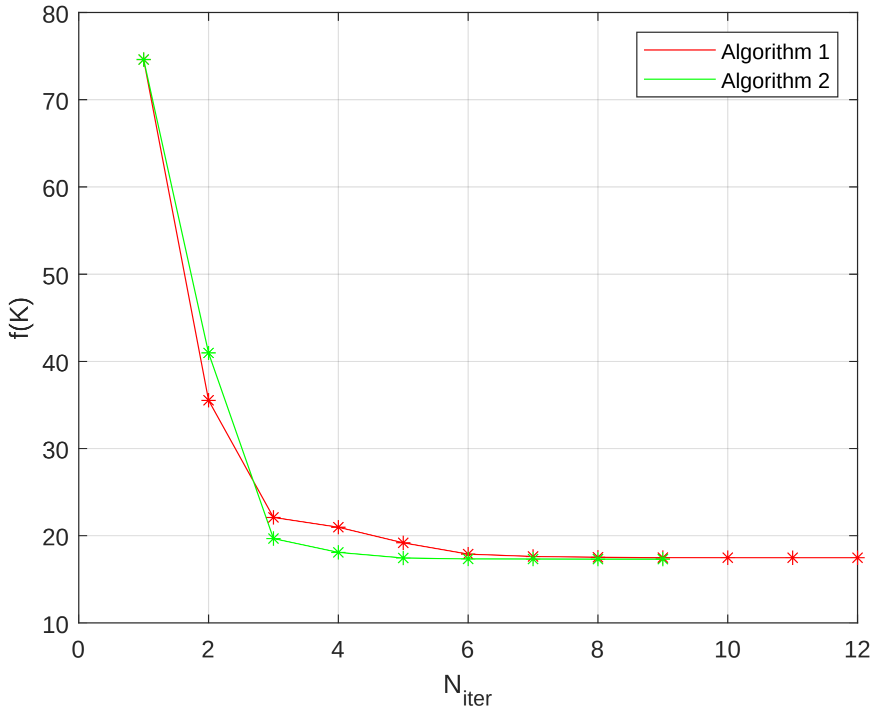
- Наблюдаемый выход: $y = x = (x_1 \;\; x_2 \;\; v_1 \;\; v_2)^{\mathrm{T}}$
- Регулируемый выход: $z = (x_1 \;\; x_2)^{\mathrm{T}}$

Начальная точка:

$$K_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

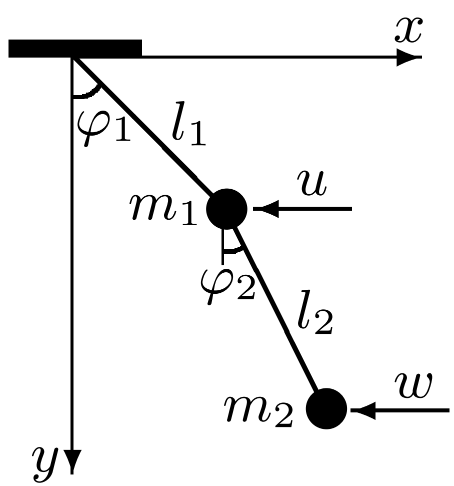
Процесс завершился нахождением регулятора по состоянию

$$K_* = \begin{pmatrix} -1{,}2971 & -0{,}1020 & -1{,}5231 & -0{,}7396 \end{pmatrix}$$



- Из разных начальных точек получаются очень близкие регуляторы и близкое значение критерия.

Пример 2. Двойной математический маятник в вязкой среде с коэффициентом сопротивления γ.



На нижнее тело воздействует ограниченное внешнее возмущение $|w| \leqslant 1$, для компенсации которого к верхнему телу приложено управляющее воздействие u.

Линеаризованная система:

$$\dot\varphi_1 = \varphi_3$$

$$\dot\varphi_2 = \varphi_4$$

$$\dot\varphi_3 = -\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g}{l_1}\varphi_1 + \frac{m_2}{m_1}\frac{g}{l_1}\varphi_2 - \frac{\gamma}{m_1}\varphi_3 + \frac{1}{m_1}u$$

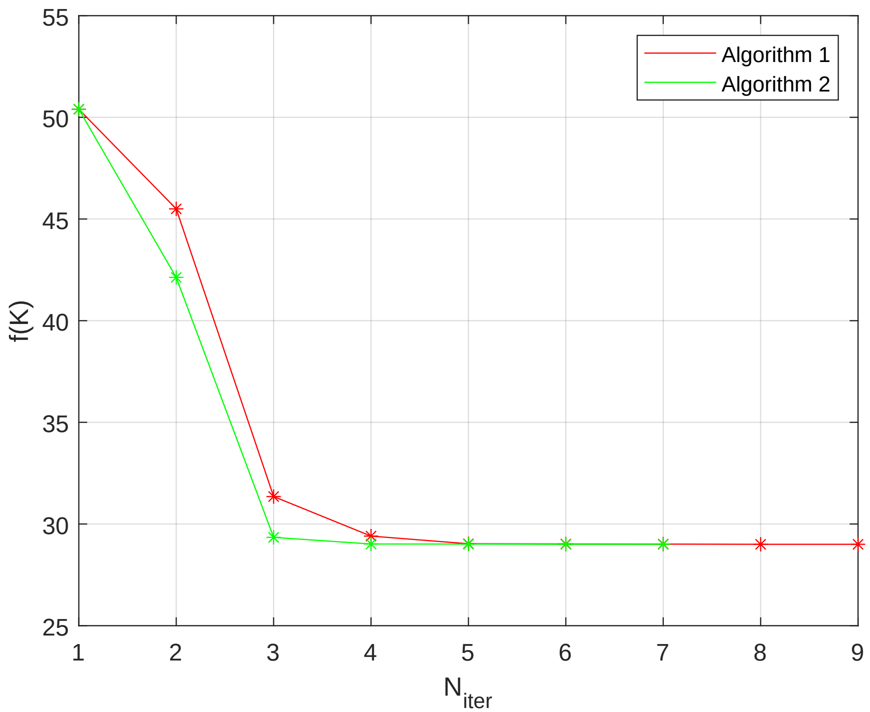
$$\dot\varphi_4 = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g}{l_2}\varphi_1 - \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g}{l_2}\varphi_2 - \frac{\gamma}{m_2}\varphi_4 + \frac{1}{m_2}w$$

Пусть $m_1 = m_2 = 1,\ \ l_1 = l_2 = g,\ \ \gamma = 0{,}2.$

- Наблюдаемый выход: $y = \begin{pmatrix}\varphi_1 & \varphi_2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$
- Регулируемый выход: $z = \begin{pmatrix}\dot\varphi_1 & \dot\varphi_2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

Разомкнутая система устойчива: в качестве начального приближения для регулятора выберем

$$K_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Процесс завершился на 9-м шаге нахождением стабилизирующего регулятора по выходу

$$K_* = \begin{pmatrix} 0{,}0087 & -0{,}8657 \end{pmatrix}$$

III. ГАРАНТИРУЮЩАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Динамическая система:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_1 u_k + D_1 w_k \\ y_k &= Cx_k + B_2 u_k + D_2 w_k \\ z_k &= C_1 x_k \end{aligned}$$

с состоянием $x_k \in \mathbb{R}^n$, начальным условием x_0, входом $u_k \in \mathbb{R}^p$, наблюдаемым выходом $y_k \in \mathbb{R}^\ell$, оцениваемым выходом $z_k \in \mathbb{R}^r$ и ограниченным внешним возмущением (шумом) $w_k \in \mathbb{R}^m$:

$$\|w_k\| \leqslant 1 \quad \text{для всех } k = 0, 1, \dots$$

- Для оценивания выхода z_k построим фильтр, включающий рассогласование выхода y_k и его прогноза $C_1 \widehat{x}_k$:

$$\widehat{x}_{k+1} = A\widehat{x}_k + Bu_k + L(y_k - C_1 \widehat{x}_k), \quad \widehat{x}_0 = 0$$

($L \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$ — матрица фильтра).

- Цель: минимизировать ошибку оценки $z_k - \widehat{z}_k = C_1(x_k - \widehat{x}_k) = C_1 e_k$

Комментарии

• Невязка $e_k = x_k - \widehat{x}_k$ удовлетворяет разностному уравнению

$$e_{k+1} = (A - LC)e_k + (D_1 - LD_2)w_k, \quad e_0 = x_0$$

При этом допустимая матрица фильтра L стабилизирует систему, обращая матрицу $A-LC$ в шуровскую. Ее существование вытекает из свойства наблюдаемости исходной системы.

• Здесь рассматривается случай неслучайных ограниченных помех. Для случайного гауссовского шума вполне естественно применять калмановскую фильтрацию.

• В рамках гарантирующего подхода к решению задачи фильтрации при ограниченных шумах можно явным образом выписать прямые формулы, основанные на градиентом спуске.

• Гарантирующий подход позволяет строить оптимальные матрицы фильтра по каждой из координат вектора состояния системы в отдельности (этой возможности нет в фильтре Калмана).

Задача оптимизации

Пусть L^*, P^* *— решение оптимизационной задачи*

$$f(L,\alpha) = \operatorname{tr} C_1 P C_1^{\mathrm{T}} + \rho \|L\|_F^2 \to \min$$

при ограничении

$$\frac{1}{\alpha}(A-LC)P(A-LC)^{\mathrm{T}} - P + \frac{1}{1-\alpha}(D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^{\mathrm{T}} = 0$$

относительно матричных переменных $P = P^{\mathrm{T}}$, L *и параметра* $0 < \alpha < 1$.

Тогда ошибка оценки $z_k - \widehat{z}_k$ *выхода системы с нулевым начальным условием при помощи наблюдателя с матрицей* L^* *заключена в минимальный ограничивающий эллипсоид с матрицей*

$$C_1 P^* C_1^{\mathrm{T}}$$

- В критерий качества помимо компоненты, определяющей размер ограничивающего эллипсоида по критерию следа, введен штраф за величину матрицы фильтра (коэффициент $\rho > 0$ регулирует его важность).

Алгоритм минимизации $f(L, \alpha)$

1. Задаемся параметрами $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, $0 < \tau < 1$ и начальным допустимым приближением L_0. Вычисляем величину $\alpha_0 = \big(1 + \rho^2(A - L_0 C)\big)/2$.

2. На j-й итерации, имея величины L_j и α_j, находим градиент $f'_L(L_j, \alpha_j)$. Если $\|f'_L(L_j, \alpha_j)\| \leqslant \varepsilon$, то L_j принимаем за приближенное решение и завершаем работу алгоритма.

3. Делаем шаг градиентного метода

$$L_{j+1} = L_j - \gamma_j f'_L(L_j, \alpha_j)$$

при этом длину шага $\gamma_j > 0$ подбираем дроблением γ до выполнения условий:

а. L_{j+1} обращает матрицу $(A - LC)/\sqrt{\alpha_j}$ в шуровскую;

б. $f(L_{j+1}) \leqslant f(L_j) - \tau\gamma_j \|f'_L(L_j, \alpha_j)\|^2$.

4. Для полученного L_{j+1} решаем задачу минимизации $f(L_{j+1}, \alpha)$ по α по методу Ньютона:

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{f'_\alpha(L_{j+1}, \alpha_j)}{f''_{\alpha\alpha}(L_{j+1}, \alpha_j)}$$

и получаем α_{j+1}. Переходим к п. 2.

Пример 3. Рассмотрим вагонетку, которая может двигаться без трения по бесконечным рельсам. В начальный момент вагонетка находится в нулевом положении. Внешние возмущения придают ей ускорение. Положение вагонетки измеряется каждые Δt секунд, при этом измерения неточны.

- Задача состоит в отслеживании положения s и скорости $\dot{s} = v$ вагонетки.
- Соответствующая система представима в формате

$$x_{k+1} = Ax_k + B_1 u_k + G w_k$$
$$y_k = Cx_k + B_2 u_k + v_k$$

при

$$x_k = \begin{pmatrix} s \\ \dot{s} \end{pmatrix}, \quad x_0 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \dfrac{(\Delta t)^2}{2} \\ \Delta t \end{pmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = 0, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим две постановки задачи.

1. На k-м такте вагонетка движется с постоянным ускорением, распределенным по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением σ_x, а погрешность измерений имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением σ_y:

$$w_k \sim N(0, \sigma_x), \quad v_k \sim N(0, \sigma_y)$$

- Гарантирующий подход:

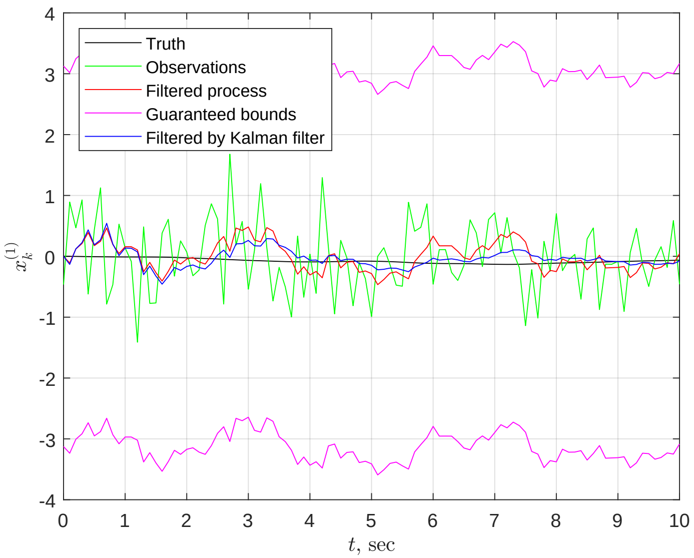
$$L_1^* = \begin{pmatrix} 0{,}2359 \\ 0{,}1412 \end{pmatrix}$$

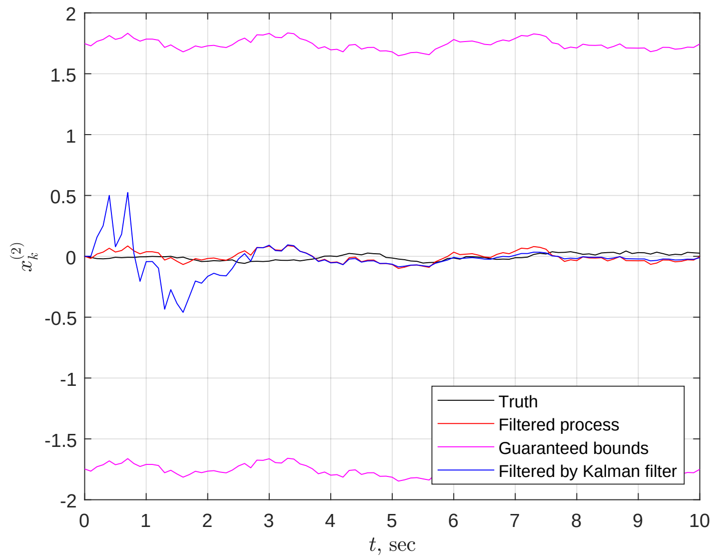
для координаты $x^{(1)} = s$ и

$$L_2^* = \begin{pmatrix} 0{,}1122 \\ 0{,}0386 \end{pmatrix}$$

для координаты $x^{(2)} = \dot{s}$.

• Результаты сравнения с фильтром Калмана (при $\Delta t = 0{,}1$, $\sigma_x = 0{,}1$, $\sigma_y = 0{,}5$) для каждой из координат:





• Обратим внимание на поведение гарантирующей и калмановской оценок на начальном участке траектории: последняя имеет явно выраженный всплеск.

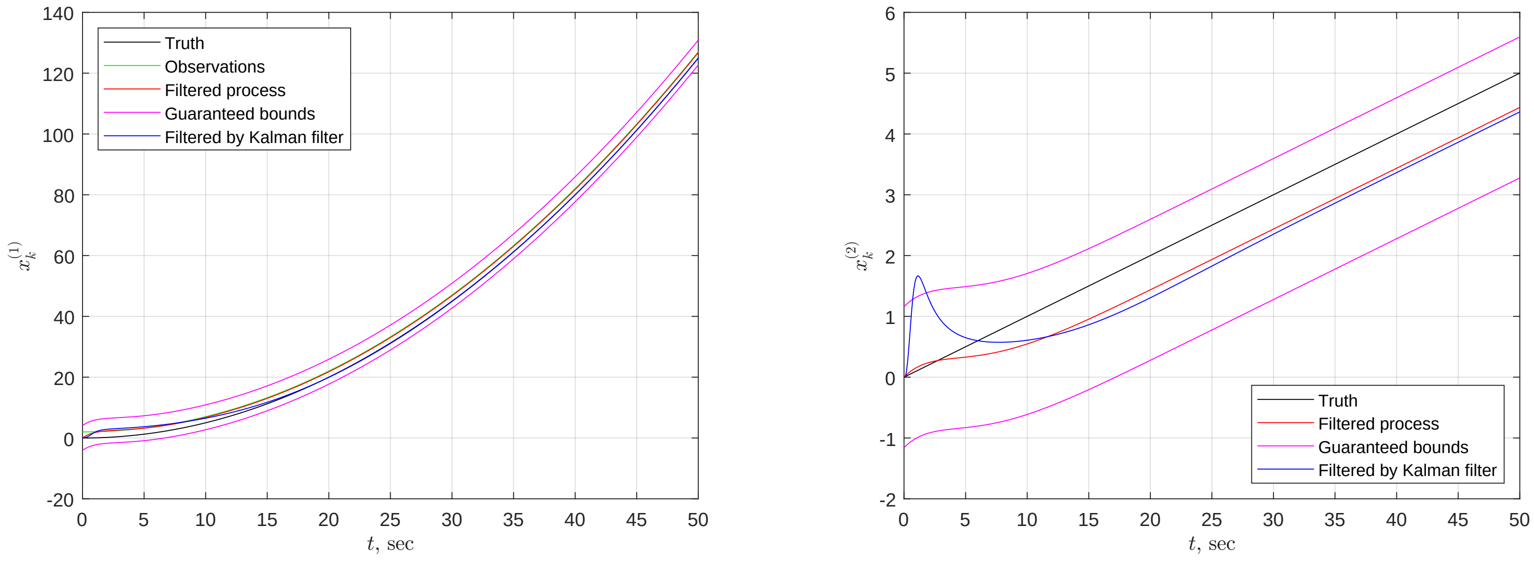
2. Пусть w_k и v_k принимают произвольные значения на отрезках $[-a, a]$ и $[-v, v]$:

$$|w_k| \leqslant a, \quad |v_k| \leqslant v$$

- Гарантирующий подход:

$$L_1^* = \begin{pmatrix} 0{,}1397 \\ 0{,}0492 \end{pmatrix}, \quad L_2^* = \begin{pmatrix} 0{,}0574 \\ 0{,}0101 \end{pmatrix}$$

- Результаты сравнения с фильтром Калмана (при $\Delta t = 0{,}1$, $a = 0{,}1$, $v = 2$):



Обсуждение

- Как видно, и фильтр Калмана, и гарантирующий фильтр, с одной стороны, не слишком сильно отличаются по своим результатам, а с другой — во обеих моделях они вполне работоспособны.

- Как и ожидалось, для гауссовских помех фильтр Калмана дает немного (но не кардинально) лучшее поведение оценки по сравнению с гарантирующим фильтром, тогда как для неслучайных ограниченных помех преимущество остается за гарантирующим фильтром.

- Ширина трубки, в которую гарантированно заключена соответствующая оценка, довольно сильно завышена, что хорошо видно на рисунках. Это — характерное поведение методов гарантированного оценивания, направленных на противодействие “наихудшей” из возможных реализаций неопределенности.

- Наконец, гарантирующий фильтр позволяет получить равномерную оценку точности фильтрации. Вспомним поведение гарантирующей и калмановской оценок на начальном участке траектории (при этом последняя также имеет явно выраженный всплеск).

IV. СИНТЕЗ ПИД-РЕГУЛЯТОРОВ

SISO-система управления:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$$
$$y = c^{\mathrm{T}} x$$

с состоянием $x \in \mathbb{R}^n$, выходом $y \in \mathbb{R}$ и управлением $u \in \mathbb{R}$ в виде ПИД-регулятора

$$u(t) = -k_P y(t) - k_I \int_0^t y(\tau) d\tau - k_D \dot{y}(t)$$

- Цель: определить параметры $K = \begin{pmatrix} k_P & k_I & k_D \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ обратной связи, которая
  - а) доставляет замкнутой системе степень устойчивости $\sigma > 0$ и
  - б) минимизирует квадратичный функционал

$$f(K) = \mathbb{E}_{\sim x(0)} \int_0^\infty y^2(t) dt + \rho \|K\|^2, \quad \rho > 0$$

Начальные условия $x(0)$ распределены нормально с нулевым средним и ковариационной матрицей Σ.

- Наличие штрафа за величину управления позволяет избежать появления больших значений коэффициентов ПИД-регулятора.

Задача оптимизации

- Исходная задача эквивалентна задаче матричной оптимизации:

$$f(K) = \operatorname{tr} Q \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \rho \|K\|^2 \to \min$$

при ограничении

$$\Big(A_0 + \sum_{i=1}^{3} k_i A_i + \sigma I\Big)^{\mathrm{T}} Q + Q\Big(A_0 + \sum_{i=1}^{3} k_i A_i + \sigma I\Big) + \begin{pmatrix} cc^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

относительно матричной переменной $Q \in \mathbb{S}^{n+1}$ *и векторной переменной* $K \in \mathbb{R}^3$, *где*

$$A_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ c^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -bc^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -bc^{\mathrm{T}} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Для того, чтобы гарантировать желаемую степень устойчивости $\sigma > 0$ замкнутой системы, в ее матрицу введена компонента σI.
- Задача свелась к рассмотренной выше линейно-квадратичной задаче.

Свойства функции $f(K)$ и алгоритм оптимизации

• Функция $f(K)$ определена и положительна на множестве $\mathcal{S}$ стабилизирующих регуляторов. На этом допустимом множестве она дифференцируема, причем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f(K)}{\partial k_i} = \operatorname{tr} YQA_i + \rho k_i, \quad i = 1, 2, 3$$

где

$$\Big(A_0 + \sum_i k_i A_i + \sigma I\Big)Y + Y\Big(A_0 + \sum_i k_i A_i + \sigma I\Big)^{\mathrm{T}} + \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

• Пусть известен регулятор K_0, стабилизирующий систему с заданным запасом устойчивости σ. Задаемся параметрами $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, $0 < \tau < 1$.

• На j-й итерации задано K_j. Находим матрицы Q и Y и вычисляем градиент $f'(K_j)$. Если $\|f'(K_j)\| \leqslant \varepsilon$, то K_j принимаем за приближенное решение.

• Делаем шаг градиентного метода:

$$K_{j+1} = K_j - \gamma_j f'(K_j)$$

где длина шага $\gamma_j > 0$ подбирается дроблением пробного шага γ до выполнения:

а) K_{j+1} — стабилизирующий регулятор

б) $f(K_{j+1}) \leqslant f(K_j) - \tau\gamma_j \|f'(K_j)\|^2, \quad 0 < \tau < 1$

Пример 4. Рассмотрим передаточную функцию[a]

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)(1+\alpha s)(1+\alpha^2 s)(1+\alpha^3 s)}, \quad \alpha = 0{,}5$$

Матрицы системы в пространстве состояний:

$$A = \begin{pmatrix} -15 & -70 & -120 & -64 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 64 \end{pmatrix}$$

- Положим $\Sigma = I$, $\sigma = 0{,}25$, $\rho = 10$ и выберем в качестве начального некоторый регулятор

$$K_0 = \begin{pmatrix} 9{,}5717 & 4{,}8538 & 8{,}0028 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

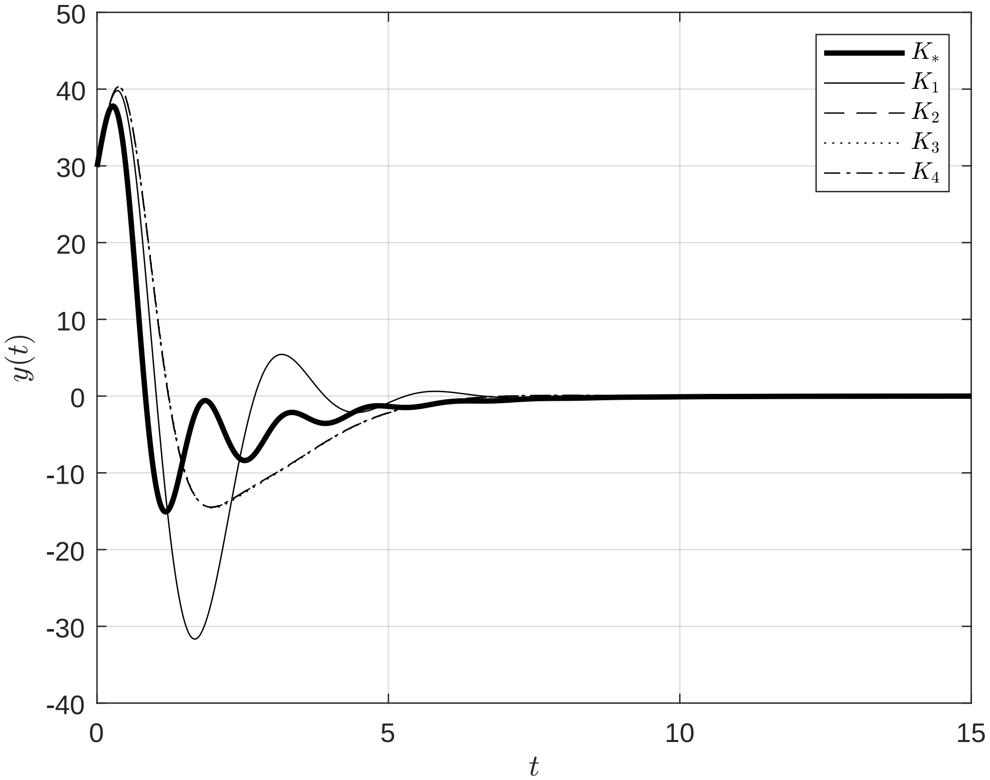
Оптимизационная процедура приводит к регулятору

$$K_* = \begin{pmatrix} 7{,}6296 & 3{,}4331 & 3{,}1795 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

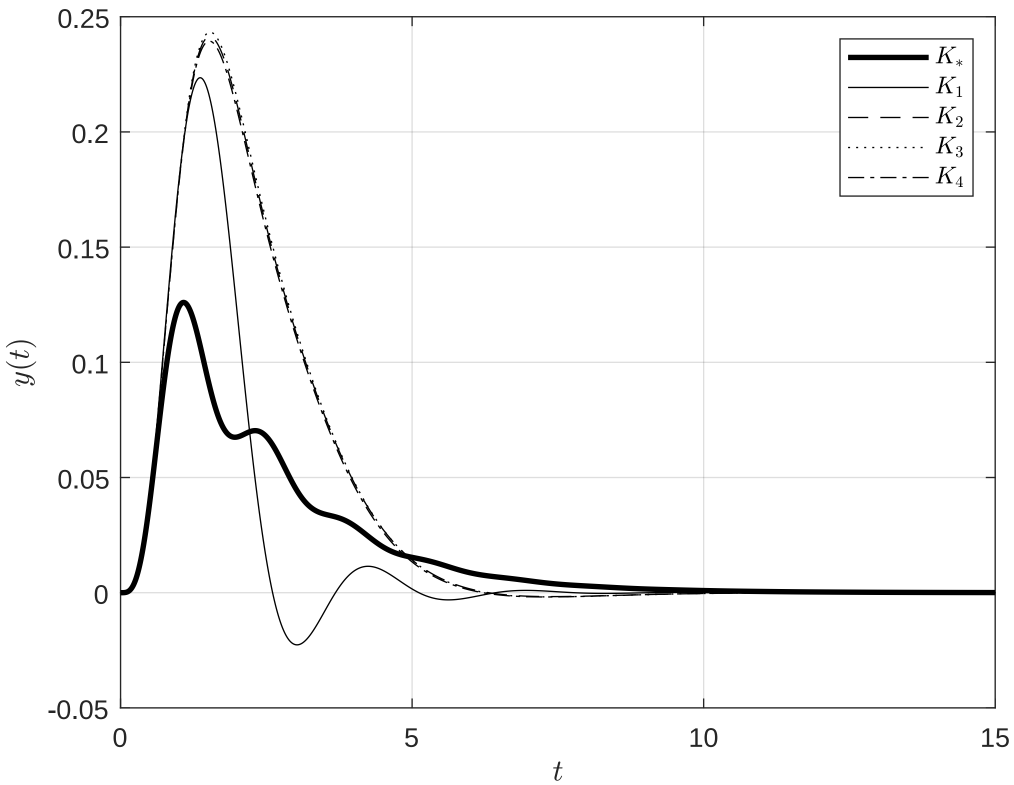
---

[a] *Åström K.J., Hägglund T.* Benchmark Systems for PID Control // IFAC Proceedings Volumes. 2000. Vol. 33. Iss. 4. P. 165–166.

• Система, замкнутая ПИД-регулятором K_*, устойчива по критерию Найквиста; ее минимальный запас устойчивости по модулю — 7,41 дБ, по фазе — 27,5°.



• Динамика выхода $y(t)$ системы при некотором начальном условии x_0 из единичного шара: при замыкании найденным ПИД-регулятором K_* (жирная линия) и предлагаемыми в литературе регуляторами.



• Динамика выхода $y(t)$ системы, замкнутой найденным ПИД-регулятором K_* (жирная линия) и известными регуляторами при единичном ступенчатом возмущении и нулевом начальном условии.

• Как видно, синтезированный ПИД-регулятор вполне удовлетворителен по своим характеристикам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- В настоящее время оптимизационный подход становится все более популярным. Он сочетается с адаптацией и обучением в современных постановках задач (policy optimization, reinforcement learning).

- Мы рассмотрели лишь несколько классических задач управления, в то время как обсуждаемый подход может быть обобщен и на более широкий класс задач. В частности, он может быть применен для синтеза динамической обратной связи по выходу и др.

- Оптимизационный подход в равной мере применим к синтезу обратной связи для систем в непрерывном и дискретном времени.

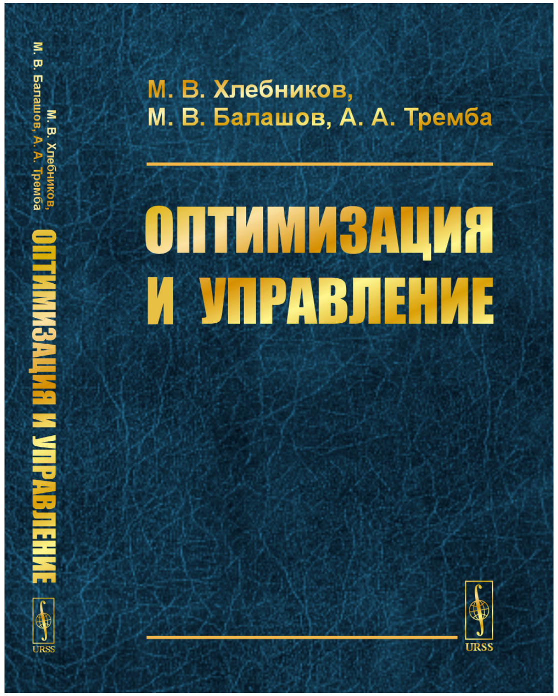
- Возможны и заметно более быстрые методы минимизации первого порядка, чем градиентный метод, в частности — метод сопряженных градиентов. Подробная проверка более эффективных методов предполагается в будущем; пока важна принципиальная возможность и эффективность нового подхода.

Хлебников М.В., Балашов М.В., Тремба А.А.

Оптимизация и управление

М.: URSS, 2024

- Глава 1. Безусловная оптимизация
- Глава 2. Условная оптимизация
- Глава 3. Оптимизация в теории автоматического управления
- Приложения



Участники ВСПУ-2024 могут получить экземпляр книги в комн. 433

Спасибо за внимание!