УДК 519.6

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ЧИСЛЕННОЙ АСИМПТОТИКИ К РЕШЕНИЯМ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ

М.Г. Дмитриев
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН
Россия, 119333, Москва, Вавилова, 44, кор.2
E-mail: mdmitriev@mail.ru

Д.А. Макаров
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН
Россия, 119333, Москва, Вавилова, 44, кор.2
E-mail: makarov@isa.ru

Ключевые слова: асимптотические методы, сингулярно возмущенные задачи управления, малый параметр, итерационные алгоритмы, регулятор, техника SDRE.

Аннотация: В работе рассматривается построение асимптотических разложений в сингулярно возмущенной слабо нелинейной задаче управления с целью построения приближенного регулятора с помощью подхода SDRE. Используя равномерное нулевое асимптотическое приближение к решению соответствующего матричного дифференциального уравнения Риккати и сходящийся итерационный процесс в уравнении для невязки с точным решением, вводится понятие численной асимптотики. Численные эксперименты показали, что численная асимптотика сохраняет интерполяционные и экстраполяционные свойства по малому параметру, как и обычные асимптотические приближения.

1. Введение

Асимптотические методы, в частности, используют выявленные в математических моделях те или иные малые параметры и являются одним из инструментов приближенного решения и анализа сложных нелинейных задач динамики и управления. Они позволяет выявить качественные свойства задачи, обосновать приемы ее декомпозиции и свойства устойчивости при некоторых допущениях. Асимптотическое приближение (АП) является аппроксимацией точного решения начальных, краевых задач, задач управления и других задач с параметром, где имеется соответствующее обоснование с определением интервала близости и порядка аппроксимации. На этом интервале АП представляет семейство приближенных аналитических конструкций, фактически заменяя бесчисленное множество численных реализаций.

При построении АП для регулярно возмущенных задач используются ряды Тейлора, а для сингулярно возмущенных задач используется техника пограничных функций А.Б. Васильевой [1]. Издержками таких подходов является необходимость построения и решения вспомогательных задач для нахождения членов АП. Подобные задачи могут быть громоздкими и определение АП может быть достаточно трудоёмким процессом в приложениях. Естественен вопрос о построении АП другим способом разложений, например с помощью сходящихся итерационных алгоритмов.

На данный момент существуют различные варианты численных методов, использующих АП (см, например, [2] и [3]), которые либо рассматривают задачу оптимизации функционала (в задаче управления), либо сводят исходную (начальную, краевую) задачу к задаче минимизации соответствующей невязки, и используют АП для формирования начального приближения, что существенно сокращает время поиска и повышает вероятность нахождения решения, близкого по критерию к глобальному оптимуму в задачах управления или минимуму соответствующей суммы квадратов невязок для начальных и краевых задач.

В данной работе представляется подход, основанный на использовании сходящихся итерационных процессов в различных задачах управления и оптимизации с малым параметром, где можно строить формальный ряд по параметру, каждый член которого есть некоторая численная реализация в узлах сетки по независимой переменной. Такой ряд будем называть численной асимптотикой (ЧА). Полученные ЧА могут быть использованы для построения соответствующих интерполяционных и экстраполяционных процедур по параметру, а также в методах машинного обучения.

Здесь планируется развитие метода построения ЧА, фактически предложенного в [4-6], и будет продолжено исследование, как с помощью сходящихся итерационных процессов в различных задачах управления с параметром, который предполагается малым, можно строить аппроксимации АП, восстанавливая ЧА с помощью одного вычислительного эксперимента для конкретного набора данных.

2. Вспомогательное управление и итерационный процесс

2.1. Схема SDRE на конечном интервале

На примере одного класса сингулярно возмущенной слабо нелинейной задачи управления приведем схему алгоритма построения ЧА. Пусть уравнения динамики имеют вид

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = A_1(x,\varepsilon)x + A_2(x,\varepsilon)y + B_1(x,\varepsilon)u, x(0) = x^0, x \in X \subset \mathbb{R}^{n_x},\\ &\varepsilon\,\frac{dy}{dt} = A_3(x,\varepsilon)x + A_4(x,\varepsilon)y + B_2(x,\varepsilon)u, y(0) = y^0, y \in Y \subset \mathbb{R}^{n_y},\\ &u \in \mathbb{R}^r, w = [x \quad y]^T \in W \subset \mathbb{R}^n, W = X \times Y, t \in [0,t_f], 0 < \varepsilon \ll 1,\end{aligned}$$

где x, y – медленные и быстрые переменные состояния соответственно; w – совокупный вектор переменных состояния; u – вектор управления; ε – положительный малый параметр; X, Y – некоторые ограниченные множества. Введем вспомогательный критерий

$$(2)\qquad J(u) = \frac{1}{2}w^T(t_f)Fw(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}(w^TQ(x,\varepsilon)w + u^TRu)\ dt \to \min_u.$$

Требуется на основе некоторого сходящегося итерационного процесса построить ЧА для управления в (1)-(2), где F – постоянная положительно полуопределенная матрица, R – постоянная положительно определенная матрица, а положительно полуопределенная матрица Q подбирается специальным образом.

Оптимальное управление в задаче (1)-(2) задачи согласно подходу SDRE на конечном интервале [7] имеет вид

$$(3)\qquad u(w,t,\varepsilon) = -R^{-1}B^T(x,\varepsilon)(P(w,t,\varepsilon)w + \Pi(w,t,\varepsilon)),$$

где $\Pi(w,t,\varepsilon) = \frac{1}{2}\left[w^T\frac{\partial P(w,t,\varepsilon)}{\partial w_1}w \quad w^T\frac{\partial P(w,t,\varepsilon)}{\partial w_2}w \quad \dots \quad w^T\frac{\partial P(w,t,\varepsilon)}{\partial w_n}w\right]^T \in \mathbb{R}^n$, а матрица $P(w,t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ является решением следующей задачи Коши для матричного дифференциального уравнения типа Риккати

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\frac{dP}{dt} + PA(x,\varepsilon) + A^T(x,\varepsilon)P - PB(x,\varepsilon)R^{-1}B^T(x,\varepsilon)P + Q(x,\varepsilon) + \Omega(w,t,\varepsilon) = 0,\\ &P(w(t_f),t_f,\varepsilon) = F.\end{aligned}$$

Здесь

$A(x,\varepsilon)=\begin{pmatrix}A_1(x,\varepsilon) & A_2(x,\varepsilon)\\ \frac{A_3(x,\varepsilon)}{\varepsilon} & \frac{A_4(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\end{pmatrix}, B(x,\varepsilon)=\begin{pmatrix}B_1(x,\varepsilon)\\ \frac{B_2(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\end{pmatrix}, Q(x,\varepsilon)=\begin{pmatrix}Q_1(x,\varepsilon) & Q_2(x,\varepsilon)\\ Q_2{}^T(x,\varepsilon) & Q_3(x,\varepsilon)\end{pmatrix},$

$F=\begin{pmatrix}F_1 & \varepsilon F_2\\ \varepsilon F_2{}^T & \varepsilon F_3\end{pmatrix}$, $\Omega(w,t,\varepsilon)=\frac{1}{4}\hat{P}_w{}^T B(x,\varepsilon)R^{-1}B^T(x,\varepsilon)\hat{P}_w=\begin{bmatrix}\Omega_1 & \Omega_2\\ \Omega_2{}^T & \Omega_3\end{bmatrix}$,$\hat{P}_w(w,t,\varepsilon)=\left[\frac{\partial P}{\partial w_1}w \quad \frac{\partial P}{\partial w_2}w \quad \dots \quad \frac{\partial P}{\partial w_n}w\right]^T$, $Q_i(x,\varepsilon)=Q_{i,0}+\varepsilon Q_{i,1}(x), i=\overline{1,3}$, а $\frac{dP}{dt}$ – полная производная по t от $P(w,t,\varepsilon)$.

Матрица P представляется в блочной форме вида $P(w,t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}P_1(w,t,\varepsilon) & \varepsilon P_2(w,t,\varepsilon)\\ \varepsilon P_2{}^T(w,t,\varepsilon) & \varepsilon P_3(w,t,\varepsilon)\end{pmatrix}$.

2.2. Итерационный процесс

Для определения блоков решения P уравнения (3) используется итерационный процесс [4], полученный на основе подхода из [8-9]

$$P_1^{[i]}=\bar{P}_1+\tilde{P}_1{}^{[i-1]}(x^{[i-1]}),$$

$$\begin{pmatrix}P_2^{[i]}\\ P_3^{[i]}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{P}_2\\ \bar{P}_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\tilde{P}_2{}^{[i-1]}(x^{[i-1]})\\ \tilde{P}_3{}^{[i-1]}(x^{[i-1]})\end{pmatrix}-L\cdot\tilde{P}_1{}^{[i-1]}(x^{[i-1]}),$$

$$(x^{[i]},y^{[i]})=s(P_1{}^{[i]},P_2{}^{[i]},P_3{}^{[i]}),$$

$$(5)\ \frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}\tilde{P}_2{}^{[i]}\\ \tilde{P}_3{}^{[i]}\end{pmatrix}=-\frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix}\tilde{N}_2(\tilde{P}_1{}^{[i-1]}(x^{[i-1]}),\tilde{P}_2{}^{[i]}(x^{[i]}),\tilde{P}_3{}^{[i]}(x^{[i]}),\varepsilon)\\ \tilde{N}_3(\tilde{P}_2{}^{[i]}(x^{[i]}),\tilde{P}_3{}^{[i]}(x^{[i]}),\varepsilon)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\tilde{P}_2{}^{[i]}(0)\\ \tilde{P}_3{}^{[i]}(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{P}_1{}^{[i]}=\tilde{N}_1(\tilde{P}_1{}^{[i]}(x^{[i]}),\tilde{P}_2{}^{[i]}(x^{[i]}),\tilde{P}_3{}^{[i]}(x^{[i]}),\varepsilon),$$

$$\tilde{P}_1{}^{[i]}(t_f)=0,$$

$$\tau=t_f-t,\tilde{P}_1{}^{[-1]}\equiv\tilde{P}_2{}^{[-1]}\equiv\tilde{P}_3{}^{[-1]}\equiv 0,$$

$$\tilde{P}_2{}^{[0]}\equiv\tilde{P}_3{}^{[0]}\equiv 0, i=0,1,2\dots$$

В (5) матричные величины, кроме L, вытянуты в векторы; $\tilde{P}^{[i]}{}_1,\tilde{P}_2{}^{[i]},\tilde{P}_3{}^{[i]}$ - невязки между соответствующими блоками точного решения задачи (4) и блоками текущего решения (4) на i-м шаге; $\bar{P}_1=P_{1,0}$, $\bar{P}_2=P_{2,0}+\Pi_{2,0}(\tau_1)$, $\bar{P}_3=P_{3,0}+\Pi_{3,0}(\tau_1)$ представляют собой равномерные приближения решений нулевого порядка для соответствующих блоков P; s – функция интегрирования системы (1) вдоль управления (2), вычисленного для значений блоков на i-м шаге $P_1{}^{[i]},P_2{}^{[i]},P_3{}^{[i]}$, величины $\tilde{N}_1,\tilde{N}_2,\tilde{N}_3$ определяются как

$\widetilde{N}_1(\tilde{P}_1,\tilde{P}_2,t,\varepsilon) = N_1\big(\tilde{P}_1 + P_{1,0},\tilde{P}_2 + \bar{P}_2 - L_1\,\tilde{P}_1,t,\varepsilon\big) - N_1\big(P_{1,0},P_{2,0},t,0\big),$
$\widetilde{N}_2(\tilde{P}_1,\tilde{P}_2,\tilde{P}_3,t,\varepsilon) =$
$N_2(\tilde{P}_1 + P_{1,0},\tilde{P}_2 + \bar{P}_2 - L_1\,\tilde{P}_1,\tilde{P}_3 + \bar{P}_3 - L_2\,\tilde{P}_1,t,\varepsilon) - N_2(P_{1,0},\bar{P}_2,\bar{P}_3,t,0) + \dot{L}_1\tilde{P}_1$
$+\varepsilon L_1\widetilde{N}_1(\tilde{P}_1,\tilde{P}_2,t,\varepsilon),$
$\widetilde{N}_3(\tilde{P}_1,\tilde{P}_2,\tilde{P}_3,t,\varepsilon) =$
$N_3(\tilde{P}_2 + \bar{P}_2 - L_1\,\tilde{P}_1,\tilde{P}_3 + \bar{P}_3 - L_2\,\tilde{P}_1,t,\varepsilon) - N_3(\bar{P}_2,\bar{P}_3,t,0) + \dot{L}_2\tilde{P}_1 + \varepsilon L_2\widetilde{N}_1(\tilde{P}_1,\tilde{P}_2,t,\varepsilon),$
$N_1(P_1,P_2,t,\varepsilon) =$
$-P_1A_1 - {A_1}^TP_1 - P_2A_3 - {A_3}^T{P_2}^T + P_1S_1P_1 + P_1S{P_2}^T + P_2S^TP_1 + P_2S_2{P_2}^T - Q_1 - \Omega_1,$
$N_2(P_1,P_2,P_3,t,\varepsilon) =$
$-P_1A_2 - P_2A_4 - \varepsilon{A_1}^TP_2 - {A_3}^TP_3 + \varepsilon P_1S_1P_2 + P_1SP_3 + \varepsilon P_2S^TP_2 + P_2S_2P_3 - Q_2 - \Omega_2,$
$N_3(P_2,P_3,t,\varepsilon) =$
$-\varepsilon{P_2}^TA_2 - \varepsilon{A_2}^TP_2 - P_3A_4 - {A_4}^TP_3 + \varepsilon^2{P_2}^TS_1P_2 + \varepsilon{P_2}^TSP_3 + \varepsilon P_3S^TP_2 + P_3S_2P_3 - Q_3 - \Omega_3,$
$S_1 = B_1R^{-1}{B_1}^T, S_2 = B_2R^{-1}{B_2}^T, S = B_1R^{-1}{B_2}^T.$

Задачи для L, $P_{1,0}$, $P_{2,0}$, $P_{3,0}$, $\Pi_{1,0}$, $\Pi_{2,0}$, $\Pi_{3,0}$, а также условия сходимости итерационного процесса приведены в [4]. После его сходимости нетрудно установить утверждения об асимптотических приближениях различного порядка к управлению.

2.3. Численная асимптотика и аппроксимация

Приведем схему построения ЧА для сингулярно возмущенной задачи Коши (4) при условии сходимости итерационного процесса (5):

1) Строится равномерное нулевое приближение. Для регулярно возмущенной задачи оно состоит из решения предельной задачи, а для сингулярно возмущенной еще добавляются нулевые члены пограничного ряда (или пограничных рядов, если рассматривается краевая задача).
2) Строится уравнение для невязки между точным решением и равномерным нулевым приближением.
3) Подбирается число итераций и сетка по времени так, чтобы наблюдалось уверенная сходимость итерационного процесса в уравнении для невязки (желательно, чтобы улучшение от итерации к итерации прибавляло порядок приближения).
4) Формируется ЧА определенного порядка в виде суммы равномерного нулевого приближения и формальных степенных рядов по параметру.

Численное асимптотическое приближение определенного порядка строится на основе полученной конечной сходящейся последовательности $P_j^{[i]}(t,\varepsilon), i = 0,1,\dots,m, j = 1,2,3$, где m – число итераций, т.е. на основе результата применения итерационного процесса, полученного при определенном $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ и определенном выборе блоков матрицы Q. ЧА представляет собой сумму регулярного и пограничного рядов и имеет вид

$$\hat{P}_j(t,\varepsilon) = \hat{P}_{j,0}(t) + \varepsilon\hat{P}_{j,1}(t) + \ldots + \varepsilon^m\hat{P}_{j,m}(t) + \ldots + \widehat{\Pi}_{j,0}(\tau) + \varepsilon\widehat{\Pi}_{j,1}(\tau) + \ldots + \varepsilon^m\widehat{\Pi}_{j,m}(\tau) + \ldots,$$
$$\tau = (t - t_f)/\varepsilon.$$

На основе полученной ЧА для блоков матрицы $P(w,t,\varepsilon)$ можно получить и ЧА для управления (3), а с помощью схемы Ричардсона построить различные интерполяционные и экстраполяционные процедуры. Они позволяют получать приближенное решение задачи как для меньшего, так и для большего значения параметра по сравнению с тем, что использовался для получения сходящейся последовательности.

На основании предложенного подхода в докладе представляется и анализируется решение ряда примеров и задач прикладного характера.

3. Заключение

В работе представлен алгоритм построения численного асимптотического приближения к решению сингулярно возмущенных начальных, краевых задач и задач управления. Преимуществом предложенного алгоритма является возможность построения приближений к точным решениям задач на основе сходящегося итерационного процесса, найденного при заданном значении параметра, что избавляет от необходимости построения вспомогательных задач для определения членов асимптотического разложения. Проведенные вычислительные эксперименты показывают хорошую точность приближений, полученных с помощью предложенного подхода.

Список литературы

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 273 с.
2. Горнов А.Ю., Дмитриев М.Г., Тятюшкин А.И. Опыт решения задач оптимального управления с пограничным слоем. ДЕП ВИНИТИ № 8441-В85.
3. Danik Y., Dmitriev M., Makarov D., Zarodnyuk T. Numerical-Analytical Algorithms for Nonlinear Optimal Control Problems on a Large Time Interval // Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. 2018. Vol. 248. P. 113-124.
4. Dmitriev M., Makarov D. An Iterative Method for Regulator Construction in a Weakly Nonlinear Singularly Perturbed Control Problem // 2022 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). IEEE, 2022. P. 1-4. DOI:10.1109/STAB54858.2022.9807591.
5. Дмитриев М.Г., Макаров Д.А. Итерационный метод построения регулятора в слабо нелинейной задаче с двумя темпами движений // Научная конференция «Ломоносовские чтения». Секция физики. Апрель 2022. Сборник тезисов докладов / Под ред. Н.Н. Сысоева. М., Физический факультет МГУ, 2022. С. 106-108.
6. Dmitriev M., Makarov D. Asymptotic Approximations of a Regulator and a Convergent Iteration Process for a Singularly Perturbed Problem // 2023 16th International Conference Management of large-scale system development (MLSD). IEEE, 2023. P. 1-5.
7. Heydari A. Balakrishnan S.N. Closed-Form Solution to Finite-Horizon Suboptimal Control of Nonlinear Systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2015. Vol. 25, No. 15. P. 2687-2704.
8. Dmitriev M.G., Klishevich A.M. Iterative solution of optimal control problems with fast and slow motions // Systems&Control Letters. 1984. Vol. 4, No. 4. P. 223-226.
9. Клишевич А.М. Равномерные приближения в сингулярно возмущенных задачах и их применение в теории оптимального управления // Диссертация на соиск. учен. ст. к.ф.-м.н. по спец. 01.01.02. ВЦ СО АН СССР в г. Красноярске. 1985. 148 с.