

УДК 519.714

# АНИЗОТРОПИЙНАЯ НОРМА ЛИНЕЙНОЙ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ С НУЛЕВЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

**А.Д. Титов**

*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана*  
Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1  
E-mail: titovad2@student.bmstu.ru

**А.В. Юрченков**

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*  
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., д. 65  
E-mail: rchenkovav@bmstu.ru

**Ключевые слова:** анизотропия, анизотропийная норма, дискретные системы, стохастические системы.

**Аннотация:** Проведено исследование линейной дискретной стационарной системы, описывающей повторяющийся процесс. Внешнее возмущение представляет собой стационарную последовательность случайных векторов, имеющее ограничение на уровень средней анизотропии. Осуществлён вычислительный эксперимент на предмет способа вычисления границы анизотропийной нормы, использующий реализацию в пространстве состояний, в терминах системы матричных неравенств при условии ограничения начального состояния на каждом цикле повторяющегося процесса.

## 1. Введение

Многие производственные системы выполняют серию циклов, которые называются повторениями. Каждое повторение происходит в течение определенного ограниченного временного интервала [1]. В таких системах происходят процессы, чьи динамические свойства зависят от нескольких независимых переменных. Стандартные методы теории управления не могут решать подобные задачи, потому что они не учитывают многомерный характер системы [2-4].

В конце прошлого столетия в теории управления начинает развиваться направление, получившее название анизотропийная теория управления. Основоположителем этой теории стал И.Г. Владимиров [5, 6]. Особенностью этой теории является выбор способов описания внешнего возмущения и коэффициента усиления от входа к управляемому выходу системы. Основой данной теории являются введенные понятия анизотропии случайного вектора, средней анизотропии и анизотропийной нормы системы. Анизотропию случайного вектора можно рассматривать как меру отклонения распределения данного вектора от стандартного гауссовского распределения. Это позволяет описывать случайные векторы с неизвестными стохастическими характеристиками с помощью одной величины. За последние 30 лет появилось множество работ по анизотропийной теории управления как для стационарных, так и для нестационарных систем [7, 8].

## 2. Постановка задачи

## 2.1. Векторизация системы

Рассмотрим динамическую систему следующего вида:

$$(1) \quad \begin{cases} x_{k+1}(p+1) = Ax_{k+1}(p) + Bw_{k+1}(p) + B_0y_k(p) \\ y_{k+1}(p) = Cx_{k+1}(p) + Dw_{k+1}(p) + D_0y_k(p) \end{cases},$$

где  $x_k(p) \in \mathbf{R}^n$  — вектор состояния,  $y_k(p) \in \mathbf{R}^m$  — вектор выходных значений, а  $w_k(p) \in \mathbf{R}^l$  — вектор входных возмущений. Заданы следующие граничные условия:  $x_{k+1}(0) = d_{k+1} = 0 \in \mathbf{R}^n$  — вектор состояния, параметр длины прохода  $\delta = 20$  ( $0 \leq p \leq 19$ ), номер прохода  $k \geq 0$ . Внешнее возмущение  $W = \{w_k\}$  представляет собой последовательность случайных векторов, имеющей уровень средней анизотропии, не превосходящий фиксированное неотрицательное число  $a$ . Требуется определить границу  $a$ -анизотропийной нормы в зависимости от параметра  $a$ .

Систему (3.1) можно привести к следующему виду:

$$(2) \quad \begin{cases} x_k = \hat{A}_y y_{k-1} + \hat{B} w_k \\ y_k = \hat{C} x_k + \hat{D}_y y_{k-1} + \hat{D} w_k \end{cases}.$$

Соответствующее уравнение динамики имеет форму:

$$(3) \quad \begin{cases} y_k = (\hat{C}\hat{A}_y + \hat{D}_y) y_{k-1} + (\hat{C}\hat{B} + \hat{D})w_k \\ z_{k-1} = I y_{k-1} + O w_k \end{cases},$$

где  $y_k$  можно интерпретировать как состояние, а  $z_{k-1}$  — выход системы ( $I$  — единичная матрица,  $O$  — нулевая матрица).

Стоит отметить, что с помощью векторизации данную систему также допустимо свести к форме:

$$(4) \quad \begin{cases} x_{k+1} = \hat{A} x_k + \hat{A}_y y_{k-1} + \hat{B} w_{k,k+1} \\ y_k = \hat{C} x_k + \hat{D}_y y_{k-1} + \hat{D} w_{k,k+1} \end{cases},$$

где  $w_{k,k+1}$  является вектором входных возмущений.

Здесь можно ввести расширенный вектор состояния  $\xi_k = [x_k \ y_{k-1}]^T$ . И тогда вторая векторизованная система (3.4) примет форму:

$$(5) \quad \begin{cases} \xi_{k+1} = [\hat{A} \ \hat{A}_y] \xi_k + \hat{B} w_{k,k+1} \\ y_k = [\hat{C} \ \hat{D}_y] \xi_k + \hat{D} w_{k,k+1} \end{cases},$$

которую также можно считать уравнением динамики [1, 6].

## 2.2. Ограниченность анизотропийной нормы

Следующие равносильные теоремы устанавливают достаточные условия строгой ограниченности анизотропийной нормы системы заданным пороговым значением.

**Теорема 1.** Рассмотрим систему (1), описывающую повторяющийся процесс. Пусть заданы граничные условия  $x_{k+1}(0) = d_{k+1} = 0 \in \mathbf{R}^n$  и условие относительно матрицы собственной динамики  $\rho(A) < 1$ . Анизотропийная норма такой системы строго ограничена заданным значением  $\gamma > 0$ , то есть  $\|F\|_a < \gamma$ , если следующая система неравенств

$$(6) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & (\hat{C}\hat{B} + \hat{D})^T \Phi & 0 \\ \Phi(\hat{C}\hat{B} + \hat{D})^T & -\Phi & 0 \\ 0 & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0;$$

$$(7) \quad \begin{bmatrix} -\Phi & 0 & (\hat{C}\hat{A}_y + \hat{D}_y)^T \Phi & I_m \\ 0 & -\eta I_m & (\hat{C}\hat{B} + \hat{D})^T \Phi & 0 \\ \Phi(\hat{C}\hat{A}_y + \hat{D}_y) & \Phi(\hat{C}\hat{B} + \hat{D}) & -\Phi & 0 \\ I_m & 0 & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0;$$

$$(8) \quad \eta - (e^{2a} \det(\Psi))^{\frac{1}{m}} < \gamma^2;$$

$$(9) \quad \eta - \gamma^2 > 0$$

имеет решение относительно скалярных переменных  $\eta$ ,  $\gamma^2$  и симметричных положительно определенных положительно определенных матриц  $\Phi$ ,  $\Psi$ .

**Следствие.** Условия теоремы 1 справедливы относительно фиксированного порогового значения  $\gamma$ , однако определить минимально возможное  $\gamma$  можно, решив задачу оптимизации с выпуклым ограничением  $\gamma^2 \rightarrow \min$  при условиях (6)–(9),  $\eta - \gamma^2 > 0$ ;  $\Phi > 0$ ;  $\Psi > 0$ .

Поскольку исходная система (1) имеет альтернативную форму приведения к стандартной записи (5), можно сформулировать следующее утверждение.

**Теорема 2.** Рассмотрим систему (1), описывающую повторяющийся процесс. Пусть заданы граничные условия  $x_{k+1}(0) = d_{k+1} = 0 \in \mathbf{R}^n$  и дополнительное условие  $\rho(A) < 1$ . Тогда анизотропийная норма такой системы строго ограничена заданным значением  $\gamma > 0$ , то есть  $\|F\|_a < \gamma$ , если система неравенств (8), (9), а также

$$(9) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \hat{B}^T \Phi & \hat{D}^T \\ \Phi \hat{B} & -\Phi & 0 \\ \hat{D} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0;$$

$$(10) \quad \begin{bmatrix} -\Phi & 0 & [\hat{A} \hat{A}_y]^T \Phi & [\hat{C} \hat{D}_y]^T \\ 0 & -\eta I_m & \hat{B}^T \Phi & \hat{D}^T \\ \Phi[\hat{A} \hat{A}_y] & \Phi \hat{B} & -\Phi & 0 \\ [\hat{C} \hat{D}_y] & \hat{D} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0$$

имеет решение относительно скалярных переменных  $\eta$ ,  $\gamma^2$  и симметричных положительно определенных положительно определенных матриц  $\Phi$ ,  $\Psi$ .

Стоит отметить, что результаты в виде сведения задачи оценивания анизотропийной нормы для 2D системы к выпуклой задаче полуопределенного программирования носят достаточный характер.

### 3. Вычислительный эксперимент

В данном разделе отражены результаты численного моделирования 2D-системы с нулевыми граничными условиями. Поставленная задача была решена с применением пакета прикладных программ MATLAB R2020b с помощью интерфейса YALMIP. Этот интерфейс имеет множество программ-решателей в коммерческом и свободном доступе [9]. Расчёт осуществлялся исходя из уравнения динамики вида (3), где  $y_k$  можно интерпретировать как состояние, а  $z_{k-1}$  — выход системы, матрицы  $\hat{C}$ ,  $\hat{A}_y$ ,  $\hat{D}_y$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{D}$  получены при помощи процесса векторизации исходных данных.

Для системы (1) были приняты следующие параметры:

$$A = \begin{bmatrix} 1,9118 & -0,9559 & -1,4706 & 0,7353 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

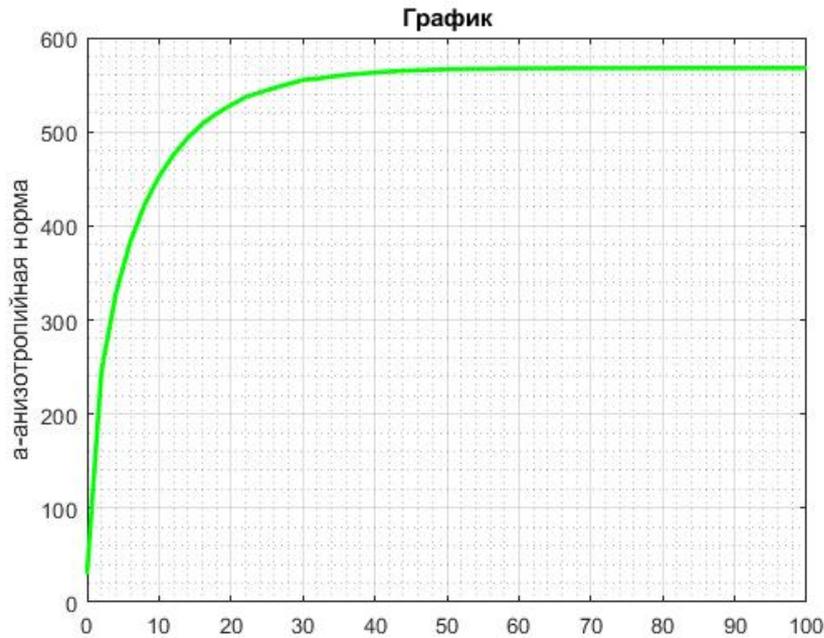
$$B = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \quad B_0 = [0,7794 \ 0 \ 1 \ 0]^T;$$

$$C = [1,9118 \quad -0,9559 \quad -1,4706 \quad 0,7353]^T;$$

$$D = 1; D_0 = 0,7794.$$

Собственные числа лежат внутри единичного круга, хотя и довольно близко к границе. Значит, такая дискретная система считается устойчивой.

Установлено, что с ростом числа точек внутри прохода наблюдается рост нормы, в зависимости от значения средней анизотропии норма тоже растет. График  $a$ -анизотропийной нормы представлен на рис. 1.



**Рис. 1.** График  $a$ -анизотропийной нормы в зависимости от значения средней анизотропии при длине прохода  $\delta = 20$ .

В таблице 1 приведены значения  $a$ -анизотропийной нормы в зависимости от параметра  $a$ .

**Таблица 1.** Значения  $a$ -анизотропийной нормы при различных значениях параметра при  $\delta = 20$ .

Значение параметра $a$	Значение нормы
0	29,914
5	357,85
10	425,283
15	500,982
20	528,315
25	544,25
30	555,115
35	559,74
40	563,03
45	565,062
50	566,251
55	566,988
60	567,381
65	567,744
70	567,75
75	567,781

80	567,851
85	567,863
90	567,867
95	567,891
100	567,892

Как видно из результатов, у нормы существует верхняя оценка, что согласуется с теоретическими сведениями. Для исследуемой значение  $a$ -анизотропной нормы не превышает 567,892. При дальнейшем увеличении значения параметра средней анизотропии вычисленное пороговое значение для  $\gamma$  не меняется.

## 4. Заключение

Проведено исследование линейной дискретной стационарной системы, описывающей повторяющийся процесс в рамках анизотропной теории управления, получены условия в виде системы неравенств для вычисления верхней границы анизотропной нормы. Сформулирована задача выпуклой оптимизации для поиска минимальной границы сверху анизотропной нормы.

С помощью пакета прикладных программ MATLAB и с использованием интерфейса YALMIP было реализовано моделирование процесса. Для частного случая представлены результаты вычислительного эксперимента на предмет поиска анизотропной нормы в зависимости от значения средней анизотропии: получены верхняя оценка  $a$ -анизотропной нормы и график зависимости  $a$ -анизотропной нормы от значения средней анизотропии.

## Список литературы

1. Rogers E., Galkowski K., Owens D.H. Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes // Lecture Notes Control Inform. Sci. Berlin: Springer, 2007. Vol. 349.
2. Пакшин П.В., Галковский К., Роджерс Э. Линейно-квадратичная параметризация стабилизирующих управлений в дискретных системах с двумерной динамикой // Автоматика и телемеханика. 2011. № 11. С. 157-173.
3. Пакшин П.В., Галковский К., Роджерс Э., Емельянова Ю.П., Емельянов М.А. Стохастическая устойчивость некоторых классов 2D-систем // Автоматика и телемеханика. 2018. № 1. С. 113-129.
4. Emelianov M., Pakshin P., Galkowski K., et al.  $H_\infty$  based Stabilization and Disturbance Attenuation for Nonlinear Differential Repetitive Processes with an Iterative Learning Control Application [Электрон. ресурс] // 2014 IEEE Int. Symp. Intelligent Control. Nice/Antibes. France. October 8–10, 2014. P. 554–559. Available by <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/mostRecentIssue.jsp?punumber=6960120>.
5. Пакшин П.В., Галковский К., Роджерс Э., Емельянова Ю.П. Устойчивость двумерных нелинейных систем, описываемых непрерывной моделью Роессера // Автоматика и телемеханика. 2014. № 5, С. 50-66.
6. Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V. On Computing the Anisotropic Norm of Linear Discrete-time-invariant Systems // IFAC Proceedings Volumes. 1996. Vol. 29, No. 1. P. 3057-3062.
7. Yurchenkov A.V., Kustov A.Yu., Timin V.N. The sensor network estimation with dropouts: Anisotropy-based approach // Automatica. 2023. Vol. 151. P. 110924.
8. Чайковский М.М., Тимин В.Н., Кустов А.Ю., Курдюков А.П. Численные процедуры анизотропного анализа стационарных систем и синтез субоптимальных регуляторов и фильтров // Автоматика и телемеханика. 2018. № 1. С. 162-182.
9. Lofberg J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB // Proc. of the CACSD Conference, Taipei, Taiwan. 2004. URL: <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/>.