УДК 519.246.2

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СКРЫТЫХ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ШУМАМИ

А.В. Борисов
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук
Россия, 119333, Москва, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2
E-mail: ABorisov@frccsc.ru

Ключевые слова: скрытая марковская модель, мультипликативные шумы, сглаживание на фиксированном интервале наблюдения, EM-алгоритм.

Аннотация: Доклад посвящен задаче оценивания параметров скрытых марковских моделей. В качестве скрытого состояния выступает однородный марковский скачкообразный процесс с конечным множеством состояний. Доступны косвенные наблюдения с винеровскими шумами, интенсивности которых различны и зависят от скрытого состояния. Оцениванию подлежат как матрица интенсивностей переходов состояния, так и параметры сноса и диффузии наблюдений. Предложен итеративный алгоритм идентификации, основанный на сглаживании состояния системы на фиксированном интервале наблюдения. Приведен численный пример, иллюстрирующий качество предложенных оценок идентификации.

1. Введение

Проблемам идентификации параметров систем наблюдения со скрытыми марковскими состояниями скоро исполнится шестьдесят лет [1, 2]. Несмотря на возраст, теоретические решения и алгоритмы их реализации [3–5] не теряют своей актуальности из-за практической востребованности и постоянного расширения классов систем наблюдения и моделей доступной измерительной информации [6–9].

Цель доклада – представление нового алгоритма идентификации параметров *скрытых марковских моделей* (СММ) с непрерывным временем по наблюдениям, шумы в которых зависят от скрытого состояния. Обычно такие шумы называют мультипликативными. Задачи оценивания состояний и параметров систем по наблюдениям такого типа исследуются достаточно редко из-за известных теоретических сложностей [10, 11]. Детальное описание теоретического решения задачи фильтрации, анализ алгоритмов его численной реализации, а также алгоритма идентификации параметров системы наблюдения приведены в [12–14].

2. Постановка задачи

На триплете с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}, \{\mathcal{F}\}_{t\in[0,T]})$ рассматривается СММ

$$X_t = X_0 + \int_0^t \Lambda^\top X_s ds + M_t^X, \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

$$\mathcal{Y}_r = \int_{t_{r-1}}^{t_r} f X_s ds + \int_{t_{r-1}}^{t_r} \sum_{n=1}^{N} X_s^n g_n^{\frac{1}{2}} dW_s, \quad r \in \{1,\dots,R\}, \quad t_r = r\delta, \quad T = R\delta, \tag{2}$$

где

- $X_t = \mathrm{col}(X_t^1,\dots,X_t^N) \in \mathbb{S}^N$ – ненаблюдаемое состояние – однородный марковский скачкообразный процесс (МСП) с конечным множеством состояний $\mathbb{S}^N \triangleq \{e_1,\dots,e_N\}$ ($\mathbb{S}^N$ – множество единичных векторов $\mathbb{R}^N$), матрицей интенсивностей переходов (МИП) Λ и начальным распределением $\pi_0 = \mathrm{col}(\pi_0^1,\dots,\pi_0^N)$; процесс M_t^X – $\mathcal{F}_t$-согласованный мартингал,

- $\mathcal{Y}_r = \mathrm{col}(\mathcal{Y}_r^1,\dots,\mathcal{Y}_r^M) \in \mathbb{R}^M$ – диффузионные наблюдения

$$Y_t = \int_0^t f X_s ds + \int_0^t \sum_{n=1}^{N} X_s^n g_n^{\frac{1}{2}} dW_s, \tag{3}$$

  дискретизованные по времени с шагом δ; $W_t = \mathrm{col}(W_t^1,\dots,W_t^M) \in \mathbb{R}^M$ – $\mathcal{F}_t$-согласованный стандартный винеровский процесс шумов, $M \times N$-мерная матрица f и набор $M \times M$-мерных матриц $\{g_n\}_{n=\overline{1,N}}$ определяют снос и интенсивность шумов при условии $X_t = e_n$.

Для системы наблюдения (1) – (2) выполнены следующие условия:

1. Все параметры СММ Λ, f и $\{g_n\}_{n=\overline{1,N}}$ являются неизвестными неслучайными матрицами подходящей размерности.
2. Матрица Λ удовлетворяет условиям $\min\limits_{i,j:\, i\neq j} \lambda^{ij} > 0$ и $\sum_j \lambda^{ij} \equiv 0$.
3. Шумы в $\mathcal{Y}$ равномерно невырождены [15], т.е. $\min\limits_{1\leqslant n\leqslant N} g_n > \alpha I > 0$ для некоторого $\alpha > 0$; здесь и далее I – единичная матрица подходящей размерности.
4. Набор матриц интенсивностей шумов $\{g_n\}_{n=\overline{1,N}}$ удовлетворяет *условию идентифицируемости* [16], заключающемуся в том, что все g_n различны.

Задача идентификации СММ заключается в построении оценок параметров системы $\xi \triangleq \mathrm{vec}(\Lambda, f, g_1,\dots,g_N)$ по имеющимся наблюдениям $\mathfrak{Y}_R \triangleq \sigma\{\mathcal{Y}_1,\dots,\mathcal{Y}_R\}$.

3. Алгоритм идентификации параметров скрытой марковской модели

Перед представлением алгоритма идентификации параметров СММ приведем некоторые наводящие соображения. Исследуем СММ с непрерывным временем

(1), (3), в которой *оба процесса* X_t и Y_t являются *наблюдаемыми.* Рассмотрим вспомогательные процессы:

$$(4)\qquad N_t^{i,j} = \int_0^t X_{s-}^i dX_s^j, \quad \text{– числа скачков МСП } e_i \to e_j \ (i \neq j),$$

$$(5)\qquad O_t^i = \int_0^t X_s^i ds, \qquad i = \overline{1,N}, \quad \text{– времени пребывания МСП в состоянии } e_i,$$

$$(6)\qquad Q_t^i = \int_0^t X_s^i dY_s, \qquad i = \overline{1,N} \quad \text{– «уровневых сумм» (\textit{level sums}).}$$

По усиленному закону больших чисел для МСП [19] и процессов восстановления [20] имеет место сходимости

$$(7)\qquad \frac{N_T^{ij}}{O_T^i} \to \lambda^{ij}, \quad \frac{1}{O_T^i} Q_T^i \to f e_i \text{ при } T \to \infty \quad \mathsf{P}-\text{п.н. для любых} \quad i,j = \overline{1,N}: \quad i \neq j.$$

Помимо этого для любых $i = \overline{1,N}$ на множестве $\{\omega \in \omega : \ O_T^i(\omega) > 0\}$ верно равенство

$$(8)\qquad \frac{1}{O_T^i}\left[Q_T^i \left(Q_T^i\right)^\top - \int_0^T Q_s^i d\left(Q_s^i\right)^\top - \int_0^T dQ_s^i \left(Q_s^i\right)^\top\right] = g_i$$

Формулы (7) и (8) могут быть интерпретированы как вариант метода моментов [21]. Если в (7) заменить ненаблюдаемые процессы $N_t^{i,j}$, O_t^i и Q_t^i на их оптимальные оценки по всем наблюдениям $\widehat{N}_t^{i,j} \triangleq \mathsf{E}\left\{N_t^{i,j}|\mathcal{Y}_R\right\}$, $\widehat{O}_t^i \mathsf{E}\left\{O_t^i|\mathcal{Y}_R\right\}$ и $\widehat{Q}_t^i \mathsf{E}\left\{Q_t^i|\mathcal{Y}_R\right\}$, то сходимости (7) определят цикл EM-алгоритма оценки параметров Λ и f [6]. Данные оценки сглаживания в отличие от оценок состояния $\widehat{X}_r^s$ для своего вычисления не допускают применения симметричного алгоритма двухфильтрового сглаживания [17,18]. Поэтому в предлагаемом алгоритме данные оценки заменяются на их субоптимальные варианты, построенные на основе оценки максимальной апостериорной вероятности состояния МСП

$$(9)\qquad \widehat{\mathcal{X}}_r = \operatorname*{argmax}_n \left(e_n^\top \widehat{X}_r^s\right).$$

В этом случае формулы пересчета оценок параметров принимают вид

$$(10)\qquad \widehat{\lambda}^{ij} = \frac{\sum_{r=1}^R \widehat{\mathcal{X}}_{r-1}^{is}(\widehat{\mathcal{X}}_r^{js} - \widehat{\mathcal{X}}_{r-1}^{js})}{\sum_{r=1}^R \widehat{\mathcal{X}}_{r-1}^{is}}, \quad i \neq j, \qquad \widehat{\lambda}^{ii} = \sum_{j:j\neq i} \widehat{\lambda}^{ij},$$

$$(11)\quad \widehat{f}e_i = \frac{1}{\delta \sum_{r=1}^R \widehat{\mathcal{X}}_{r-1}^{is}} \sum_{r=1}^R \widehat{\mathcal{X}}_{r-1}^{is} \mathcal{Y}_r, \qquad \widehat{g}_i = \frac{1}{\delta \sum_{r=1}^R \widehat{\mathcal{X}}_{r-1}^{is}} \sum_{r=1}^R \widehat{\mathcal{X}}_r^{is}(\mathcal{Y}_r - \delta \widehat{f}e_i)(\mathcal{Y}_r - \delta \widehat{f}e_i)^\top.$$

Процесс идентификации должен заканчиваться либо по выполнении максимального числа итераций N_{iter}, либо при относительном изменении оценки ξ_u меньше некоторого фиксированного порога ε^ξ.

В процессе идентификации необходимо контролировать положительность внедиагональных элементов оценки МИП $\widehat{\Lambda}$. Для этого вместо оценки $\widehat{\lambda}^{ij}$ (10) следует использовать его модификацию

$$(12)\qquad \widehat{\lambda}_\varepsilon^{ij} = \max(\varepsilon^\lambda |\widehat{\lambda}^{ii}|, \widehat{\lambda}^{ij}).$$

Таким образом, алгоритм идентификации параметров имеет следующий вид:

Шаг 1. Инициализация начальных значений параметров СММ $\widehat{\xi}_0$, параметров N_{iter}, ε^{ξ}, ε^{λ} и цикла идентификации $u := 0$.

Шаг 2. Начало цикла $u := u + 1$.

Шаг 3. Вычисление оценок фильтрации в прямом времени $\{\widehat{\mathbf{X}}_r(\xi_{u-1})\}_{r=\overline{1,R}}$ [12, 13] с использованием параметров $\widehat{\xi}_{u-1}$ предыдущего шага.

Шаг 4. Вычисление оценок фильтрации в обратном времени $\{\widehat{\mathbf{X}}_r^b(\xi_{u-1})\}_{r=\overline{1,R}}$ [12,13,17, 18] с использованием параметров $\widehat{\xi}_{u-1}$ предыдущего шага.

Шаг 5. Вычисление оценок сглаживания $\{\widehat{\mathbf{X}}_r^s(\xi_{u-1})\}_{r=\overline{1,R}}$ [17, 18].

Шаг 6. Пересчет $\{\widehat{\mathbf{X}}_r^s(\xi_{u-1})\}_{r=\overline{1,R}}$ в $\{\widehat{\mathcal{X}}_r(\xi_{u-1})\}_{r=\overline{1,R}}$ по формуле (9).

Шаг 7. Вычисление оценок $\widehat{\lambda}_u^{ij}$, $\widehat{f}_u$ и $\widehat{g}_u$ по формулам (10), (11) и (12).

Шаг 8. Если $u < N_{Iter}$ и $\frac{\|\xi_{u+1}-\xi_u\|}{\|\xi_u\|} \leqslant \varepsilon^{\xi}$, то перейти к Шагу 2, в противном случае закончить процесс идентификации.

4. Численный пример

На отрезке времени [0; 1000] рассмотрена СММ со следующими параметрами: $N = 3$; $M = 1$; $\delta = 0{,}0002$; $N_{iter} = 15$, $\varepsilon^{\xi} = 0,005$, $\varepsilon^{\lambda} = 0,1$.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 5 & -10 & 5 \\ 1 & 4 & -5 \end{bmatrix};\ \pi_0 = \begin{bmatrix} 0{,}3571 \\ 0{,}2858 \\ 0{,}3571 \end{bmatrix};\ f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ g_1 = 0{,}1;\ g_2 = 0{,}2;\ g_3 = 0{,}3.$$

Приведенная ниже таблица содержит истинные значения оцениваемых параметров ξ СММ, начальные условия ξ_0 для старта итерационной процедуры идентификации и окончательные оценки $\widehat{\xi}$.

Истинное значение Λ			Начальное условие Λ_0			Оценка $\widehat{\Lambda}$		
-5,0	4,0	1,0	-1,0	0,5	0,5	-4,5455	3,7613	0,7842
5,0	-10,0	5,0	0,5	-1,0	0,5	4,3470	-8,4221	4,0751
1,0	4,0	-5,0	0,5	0,5	-1,0	0,8508	3,3833	-4,2341
Истинное значение f			Начальное условие f_0			Оценка $\widehat{f}$		
0,0	0,0	0,0	-1,0	0,0	1,0	-0,02	0,0278	-0,0171
Истинное значение g			Начальное условие g_0			Оценка $\widehat{g}$		
0,1	0,2	0,3	0,05	0,15	0,4	0,0997	0,1992	0,3003

5. Заключение

Доклад представляет субоптимальный алгоритм идентификации параметров СММ с непрерывным временем. В качестве скрытого состояния выступает однородный МСП с конечным множеством состояний. Имеющиеся наблюдения являются косвенными и содержат мультипликативные шумы.

Предложена итерационная процедура оценивания параметров СММ, родственная EM-алгоритму. Она основана на попеременном решении задач сглаживания скрытого состояния и вычислении на основе этих результатов и имеющихся наблюдений оценок параметров СММ методом моментов.

Алгоритм идентификации сходится за малое число итераций. Проведенные численные примеры демонстрируют высокое качество оценивания матриц сноса f и диффузии g, и приемлемое качество оценивания МИП Λ. Тем не менее, продемонстрированной точности достаточно для последующего успешного решения задач фильтрации скрытого состояния МСП с использованием идентифицированных значений параметров.

Список литературы

1. Baum L., Petrie T. Statistical Inference for Probabilistic Functions of Finite State Markov Chains // Ann. Math. Statist. 1966. Vol. 37, No. 6. P. 1554–1563.
2. Baum L., Petrie T., Soules. G., Weiss N. Technique Occurring in the Statistical Analysis of Probabilistic Functions of Markov Chains // Ann. Math. Statist. 1970. Vol. 41, No. 1. P. 164–171.
3. Cappé O., Moulines E., Rydén T. Inference in Hidden Markov Models. New York: Springer, 2005.
4. Rabiner L. A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition // Proc. IEEE. 1989. Vol. 77, No. 2. P. 257–286.
5. Ephraim Y., Merhav N. Hidden Markov Processes // IEEE Trans. Inform. Theory. 2002. Vol. IT-48, No. 6. P. 1518–1569.
6. Elliott R.J., Moore J.B., Aggoun L. Hidden Markov Models :Estimation and Control. New York: Springer, 2008.
7. Zeitouni O., Dembo A. Exact filters for the estimation of the number of transitions of finite-state continuous-time Markov processes // IEEE Trans. Inf. Theory. 1988. Vol. IT-34, No. 7. P. 890–893.
8. Dembo A., Zeitouni O. Parameter estimation of partially observed continuous time stochastic processes via the EM algorithm // Stochastic Processes and Their Applications. 1986. Vol. 23. P. 91–113.
9. James M., Krishnamurthy V., Le Gland F. Time Discretization of Continuous-Time Filters and Smoothers for HMM Parameter Estimation // IEEE Trans. Autom. Contr. 1996. Vol. AC-42, No. 2. P. 593–605.
10. Липцер Р., Ширяев А. Теория мартингалов. М.: Физматлит, 1986.
11. Takeuchi Y., Akashi H. Least-squares state estimation of systems with state-dependent observation noise // Automatica. 1985. Vol. 21, No. 3. P. 303–313.
12. Борисов А.В. $\mathcal{L}_1$-оптимальная фильтрация марковских скачкообразных процессов I: точное решение и численные схемы реализации // Автоматика и телемеханика. 2020. №. 11. С. 11–31.
13. Борисов А.В. $\mathcal{L}_1$-оптимальная фильтрация марковских скачкообразных процессов II: численный анализ конкретных схем // Автоматика и телемеханика. 2020. №. 12. С. 24–49.
14. Борисов А.В. $\mathcal{L}_1$-оптимальная фильтрация марковских скачкообразных процессов III: идентификация параметров системы // Автоматика и телемеханика. 2022. №. 11. С. 121–144.
15. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
16. Borisov A., Sokolov, I. Optimal Filtering of Markov Jump Processes Given Observations with State-Dependent Noises: Exact Solution and Stable Numerical Schemes // Mathematics. 2020. Vol. 8, No. 4. 506.
17. Борисов А. Представление марковских скачкообразных процессов в обратном времени и смежные вопросы. I. Оптимальное линейное оценивание // Автоматика и телемеханика. 2006. №. 8. С. 51–76.
18. Борисов А. Представление марковских скачкообразных процессов в обратном времени и

смежные вопросы. II. Оптимальное нелинейное оценивание // Автоматика и телемеханика. 2006. №. 9. С. 120–141.

19. Meyn S., Tweedie R. Markov Chains and Stochastic Stability. Berlin: Springer, 1993.
20. Боровков А. *Теория вероятностей.* М.: Физматлит, 1986.
21. Боровков А. *Математическая статистика.* М.: Физматлит, 1984.