УДК 793.71

О РАЗЛИЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Е.И. Атамась

МГУ имени М.В. Ломоносова

Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1

E-mail: eatamas@cs.msu.ru

Ключевые слова: интервальные системы, передаточные функции, пространство состояний, неопределенность.

Аннотация: В работе рассматриваются задачи перехода между представлением в виде передаточных функций и представлением в пространстве состояний для управляемых линейных интервальных систем, то есть систем, чьи параметры известны лишь с точностью до интервала, в котором они лежат. Предложены конструктивные алгоритмы для таких переходов, учитывающие особенности интервальной арифметики. Приведены численные примеры их применения для конкретных систем.

1. Введение

Одним из возможных подходов к описанию параметрической неопределенности в системах управления является применение интервальных вычислений. В этом случае коэффициенты системы задаются не вещественными числами, а интервальными числами, то есть множествами вида $a = [\underline{a},\ \overline{a}] = \{x \mid \underline{a} \leqslant x \leqslant \overline{a},\ x \in \mathbb{R}\}$, в которых заведомо содержится точное значение коэффициентов. Подобная ситуация может возникнуть, например, если параметры системы измерены с некоторой заранее известной погрешностью. В дальнейшем с такими объектами можно работать, используя развитый инструментарий интервальной арифметики [1]. При этом все операции и преобразования являются надежными с вычислительной точки зрения, а потому мы можем быть уверены в достоверности полученных результатов.

Множество вещественных интервальных чисел будем обозначать $\mathbb{IR}$. Для интервальных чисел $a, b \in \mathbb{IR}$ определены стандартные арифметические операции следующим образом. Их результат – это снова интервал, содержащий в себе все возможные значения, получающиеся при выполнении стандартных арифметических операций с элементами интервалов-операндов:

$$a * b = \{\tilde{a} * \tilde{b} \mid \tilde{a} \in a,\ \tilde{b} \in b\}.$$

В частности:
1) сложение: $a + b = [\underline{a},\ \overline{a}] + [\underline{b},\ \overline{b}] = [\underline{a} + \underline{b},\ \overline{a} + \overline{b}]$;
2) вычитание: $a - b = [\underline{a},\ \overline{a}] - [\underline{b},\ \overline{b}] = [\underline{a} - \overline{b},\ \underline{a} - \overline{b}]$;

3) умножение: $a \cdot b = [\underline{a},\ \overline{a}] \cdot [\underline{b},\ \overline{b}] = [\alpha,\ \beta]$, где $\alpha = \min\{\underline{a}\underline{b},\ \underline{a}\overline{b},\ \overline{a}\underline{b},\ \overline{a}\overline{b}\}$, $\beta = \max\{\underline{a}\underline{b},\ \underline{a}\overline{b},\ \overline{a}\underline{b},\ \overline{a}\overline{b}\}$.

К сожалению, применение интервальных вычислений имеет свои недостатки. Так, многие привычные нам свойства даже арифметических операции для них не выполняются, не говоря уже о более сложных объектах, таких как операции с функциями. Например, в интервальной арифметике тождество $a - a = 0$, вообще говоря, неверно, а вычисляемые значения функций $f(x) = x^2 - x$ и $f(x) = (x + 0.5)^2 - 0.25$ для $x = [-1, 1]$ различны. Из-за этого, в частности, выполнение таких простых операций, как деление двух многочленов, становится затруднительным. Другая проблема заключается в том, что при выполнении арифметических операций с интервальными числами «размах» результата (длина интервала) может увеличиваться по сравнению с операндами. Особенно сильно этот эффект сказывается при выполнении операций над интервальными матрицами. Таким образом, при работе с интервальными системами необходимо ограничиться лишь теми операциями, которые реализуемы в интервальной арифметике, и при этом стараться минимизировать число выполняемых действий.

Целью данной работы является построение алгоритмов решения классической задачи теории управления – перехода между представлением системы в пространстве состояний и в виде передаточной функции – для случая интервальных систем. Эта задача возникла из желания перенести полученные для интервальных систем, заданных в пространстве состояний, алгоритмы стабилизации на случай систем, заданных в виде передаточных функций. Далее мы рассмотрим как переход из пространства состояний к передаточной функции, так и обратный переход – задачу реализации. Предложенные алгоритмы будут сопровождаться иллюстрирующими их примерами.

2. Переход из пространства состояний к передаточной функции

Пусть нам необходимо определить передаточную функцию системы, заданной в пространстве состояний интервальными матрицами A, B, C :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Для системы с точечными параметрами можно было бы использовать стандартную формулу

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{C \cdot \operatorname{adj}(sI - A) \cdot B}{\det(sI - A)}, \tag{1}$$

однако для интервальных систем при этом возникает целый ряд трудностей. Во-первых, не ясно, как производить интервальные вычисления с параметром s, в частности, как выбирать минимальное и максимальное значения в формулах для интервального умножения. Во-вторых, вычисление определителей с использованием определения требует большого числа арифметических операций, что значительно увеличивает «размах» результата. Существующие модификации метода Гаусса для интервальных матриц также не рассчитаны на наличие параметра.

Для вычисления передаточной функции предлагается использовать алгоритм Д. К. Фаддеева [2], позволяющий за относительно небольшое число операций найти коэффициенты числителя и знаменателя в формуле (1). Пусть нам дана передаточная функция

$$W(s) = \frac{C(s^{n-1} + B_1 s^{n-2} + \ \dots \ + B_{n-1})B}{s^n + p_1 s^{n-1} + \ \dots \ + p_n} = \frac{q_0 s^{n-1} + q_1 s^{n-2} + \ \dots \ + q_{n-1}}{s^n + p_1 s^{n-1} + \ \dots \ + p_n}, \tag{2}$$

где $B_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $p_i \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{array}{rll} A_1 = A, & p_1 = -\mathrm{tr} A_1, & B_1 = A_1 + p_1 I, \\ A_2 = AB_1, & p_2 = -\frac{1}{2}\mathrm{tr} A_2, & B_2 = A_2 + p_2 I, \\ \dots & \dots & \dots \\ A_n = AB_{n-1}, & p_n = -\frac{1}{n}\mathrm{tr} A_n, & B_n = A_n + p_n I. \end{array}$$

Этот алгоритм позволяет получить явные выражения для коэффициентов q_i, p_i через элементы матриц A, B, C.

Таблица 1. Результаты примера 1

	Оптимизация	Интервальные вычисления
q_0	$[1.4,\ 2.11]$	$[1.4,\ 2.11]$
q_1	$[3.013,\ 6.5171]$	$[2.263,\ 6.1834]$
q_2	$[-6.5032,\ 0.46]$	$[-10.7567,\ 2.9912]$
q_3	$[-15.0798,\ -6.1403]$	$[-38.5736,\ 6.1661]$
p_1	$[0.1,\ 0.5]$	$[0.1,\ 0.5]$
p_2	$[-1.01,\ 0.511]$	$[-1.2,\ 0.671]$
p_3	$[2.929,\ 5.731]$	$[1.2705,\ 7.2761]$
p_4	$[0.8005,\ 3.0453]$	$[-7.8039,\ 11.4829]$

Отметим, что в приведенных формулах присутствует вычисление степеней интервальной матрицы A. Прямое использование интервальной арифметики при этом ведет к существенному росту «размаха» в результатах вычислений по сравнению с точными оценками. Это связано с тем, что каждый элемент матрицы A участвует в формулах многократно, а при прямых интервальных вычислениях каждое вхождение считается независимым, тогда как в реальности все эти вхождения согласованы между собой. Поэтому разумно использовать более точные методы для вычисления степеней интервальных матриц [3]. В Таблице 1 приведено сравнение результатов, полученных при обычных интервальных вычислениях, и точных оценок, полученных с помощью оптимизационной процедуры. Отметим, что оценки, полученные с использованием метода из работы [3] очень близки к точным.

Пример 1. *Рассмотрим систему с матрицами реализации*

$$A = \begin{pmatrix} [0.1,\ 0.2] & [1.8,\ 1.9] & [-1.7,\ -1.5] & [0.4,\ 0.7] \\ [0.2,\ 0.3] & [-0.4,\ -0.3] & [0.2,\ 0.3] & [-1.5,\ -1.3] \\ [1.1,\ 1.2] & [0.3,\ 0.4] & [-0.7,\ -0.6] & [1.8,\ 1.9] \\ [1,\ 1.1] & [-0.1,\ -0.03] & [0.2,\ 0.3] & [0.5,\ 0.6] \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} [1,\ 1.1] & [2,\ 2.1] & [0,\ 0] & [-1,\ -0.8] \end{pmatrix}^T,$$

$$C = \begin{pmatrix} [1.1,\ 1.3] & [0.3,\ 0.4] & [-1.5,\ -1.4] & [0.2,\ 0.3] \end{pmatrix}.$$

В результате применения описанного алгоритма получаем набор коэффициентов, приведенный в таблице 1.

3. Переход от передаточной функции в пространство состояний

Далее рассмотрим обратный переход – задачу реализации. Хорошо известно, что скалярной системе (2) соответствует ее реализация в канонической форме управляемости

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -p_1 & -p_2 & \cdots & -p_{n-1} & -p_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_{n-1} & q_n \end{bmatrix}.$$

Этим обстоятельством можно воспользоваться, заменяя числовые коэффициенты интервальными и, тем самым, получая интервальную реализацию. Существенным преимуществом в данном случае является отсутствие каких-либо интервальных вычислений, что позволяет избежать расширения интервалов.

Простейшим способом решения задачи реализации в многосвязном случае является следующий подход. Для каждого элемента передаточной матрицы строится независимая реализация описанным выше алгоритмом, после чего все они объединяются в одну систему. Данный подход отличается максимальной простотой и отсутствием интервальных вычислений, однако порядок получающейся в результате реализации значительно превосходит минимальный.

Другой подход основан на применении алгоритма реализации Гилберта. Он состоит в разложении передаточной матрицы в сумму элементарных дробей, для каждой из которых реализация строится элементарно. К сожалению, в интервальной арифметике стандартный метод разложения рациональной функции на элементарные дроби, основанный на методе неопределенных коэффициентов, оказывается малоприменим, так как приводит к операциям над интервальными многочленами и решению интервальной системы линейных алгебраических уравнений. Будем предполагать, что $W(s)$ строго физически реализуема, то есть степень числителя каждого ее элемента строго меньше степени знаменателя, а все полюса системы простые и вещественные. Тогда мы можем записать равенство

$$W(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \ldots + \frac{A_n}{s - p_n},$$

где p_i – интервальные корни многочлена $a(s)$. Сделанное нами предположение об отсутствии кратных полюсов системы позволяет использовать относительно простые алгоритмы для поиска корней интервального полинома (например, [4]), а также получить простую формулу для коэффициентов A_i

$$A_i = \frac{b(p_i)}{a_i(p_i)},$$

где $a_i(s) = \frac{a(s)}{s-p_i}$. При этом нам потребуется лишь вычислить значения интервальных полиномов в интервальных точках, что является простой операцией. Далее, каждой элементарной дроби $\frac{A_i}{s-p_i}$ будет соответствовать своя часть реализации

$$\dot{x}_i = p_i I x + A_i u,\ y_i = I x_i,$$

где I – единичная матрица соответствующего размера. Таким образом, предложенный алгоритм позволяет строить реализацию векторной интервальной системы при указанных ограничениях. Отметим, что в случае простых корней алгоритм Гилберта приводит к минимальной реализации.

Пример 2. *Для системы с интервальной передаточной функцией*

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{[0.9, 1.1]}{s^2+[1.9, 2.1]s+[-3.1, -2.9]} & \frac{s^2+[0.9, 1.1]}{s^3+[-0.1, 0.1]s^2+[-7.1, -6.9]s+[5.9, 6.1]} \\ \frac{s+[-2.1, -1.9]}{s^2+[1.9, 2.1]s+[-3.1, -2.9]} & \frac{[1.9, 2.1]}{s+[-2.1, -1.9]} \end{bmatrix}$$

описанная процедура приводит к разложению (приводим с точностью до двух знаков после запятой)

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{[-0.29, -0.22]}{s-[-3.1, -2.9]} + \frac{[0.22, 0.29]}{s-[0.95, 1.05]} & \frac{[0.47,0.53]}{s-[-3.07,-2.94]} + \frac{[-0.71,-0.39]}{s-[0.93,1.09]} + \frac{[0.89,1.21]}{s-[1.85,2.13]} \\ \frac{[1.2,1.3]}{s-[-3.1, -2.9]} + \frac{[-0.3,-0.2]}{s-[0.95, 1.05]} & \frac{[1.9, 2.1]}{s-[1.9, 2.1]} \end{bmatrix}.$$

Видно, что корни внутри групп $\{[-3.1,\ -2.9],\ [-3.07, -2.94]\}$, $\{[0.95,\ 1.05],\ [0.93, 1.09]\}$ *и* $\{[1.85, 2.13],\ [1.9,\ 2.1]\}$ *корни, хоть и различны, но очень близки. Это позволяет нам заменить их на наиболее широкие интервалы* $[-3.1,\ -2.9]$, $[0.93, 1.09]$ *и* $[1.85, 2.13]$ *соответственно. Таким образом, у системы будет три простых вещественных полюса. Дальнейшее построение матриц реализации тривиально, полную их запись не будем приводить из соображений краткости.*

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда, проект №22-21-00162.

Список литературы

1. Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтэр Э. Прикладной интервальный анализ. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2010.
3. Ahn H.-S. Powers of parametric iterval uncertain matrix // IET Control Theory and Applications. 2010. Vol. 5, No. 3. P. 523-534.
4. Hansen, E. R. Sharp Bounds on Interval Polynomial Roots // Reliable Computing. 2002. No. 8. C. 115-122.
5. Атамась Е.И. О переходе между различными представлениями интервальных управляемых систем // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2023. No. 4. C. 3-8.