УДК 519.977

БЫСТРОДЕЙСТВИЕ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОКРАТНЫМ РАЗДЕЛЕНИЕМ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

А.С. Бортаковский
Московский авиационный институт (*национальный исследовательский университет*)
Россия, 125993, Москва, Волоколамское ш., 4
E-mail: asbortakov@mail.ru

Ключевые слова: гибридная система управления, задача быстродействия, машина Дубинса, разделение объектов управления.

Аннотация: Рассматривается задача быстродействия гибридной системы, в процессе функционирования которой количество объектов управления меняется. Движение начинает один объект управления (носитель). В некоторый момент времени от него отделяются несколько подвижных объектов, которые направляются в заданные терминальные состояния (цели). Движение управляемых объектов описывается дифференциальными уравнениями, при этом, в частности, применяется модифицированная модель машины Дубинса, допускающая траектории неограниченной кривизны. Решается задача минимизации времени достижения всех целей.

1. Введение

Задачи группового управления имеют многочисленные приложения, в том числе при управлении подвижными объектами, в частности летательными аппаратами. Постановки задач группового управления подвижными объектами весьма разнообразны. Например, задачи сбора группы в заданной области, обход препятствий, перехват подвижной цели, управление в конфликтной среде. Для моделирования движения беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) нередко используется модель Маркова-Дубинса [1, 2] или ее модификации и обобщения [3-7].

Рассматривается задача достижения точечных целей группой подвижных объектов за наименьшее время. Процесс управления разбивается на два этапа. На первом этапе объект управления один – это так называемый носитель. Первый этап заканчивается, когда от носителя отделяются несколько объектов, которые направляются в заданные терминальные состояния (цели). На втором этапе происходит управление группой отделяемых объектов. Второй этап заканчивается, когда все отделяемые объекты попадают в заданные терминальные состояния. Требуется найти наименьшее время достижения целей, т.е. решить задачу группового быстродействия.

Для решения поставленной задачи нужно найти оптимальное управление на каждом этапе, а также оптимальную точку разделения объектов управления, в которой заканчивается первый этап – управление носителем, и начинается второй этап – управление группой отделяемых объектов. Оптимальное управление подвижными объектами находится при помощи принципа максимума Понтрягина [8]. Наилучшее положение точки разделения определяем, применяя негладкий анализ [9] и параметрическую оптимизацию.

2. Постановка задачи

На промежутке времени $[0, s]$ движение носителя описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),$$

где $x(t)$ – состояние носителя в момент времени t, $x \in R^n$; $u(t)$ – значение управления, $u(t) \in U \subset R^r$, U – множество допустимых значений управления. Предполагаем, что функция $f: [0, s] \times R^n \times U \to R$ непрерывна вместе градиентом f_x на всей области определения. Начальное состояние носителя задано $x(0) = x_0$.

В момент времени s происходит отделение от носителя m управляемых объектов, движение которых описывается уравнениями

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_i(t), u_i(t)), s \leq t \leq T_i, i = 1, \ldots, m.$$

Здесь $x_i(t)$ – состояние -го отделяемого объекта, $x_i(t) \in R^{n_i}$; $u_i(t)$ – значение управления $u_i(t) \in U_i \subset R^{r_i}$. Функции $f_i: [s, T] \times R^{n_i} \times U_i \to R$, $i = 1, \ldots, m$, непрерывны вместе градиентами $\partial f_i / \partial x_i$. Начальное (стартовое) состояние i-го отделяемого объекта определяется конечным состоянием носителя

(1) $$x_i(s) = g_i(x(s)), i = 1, \ldots, m.$$

Время T_i окончания движения и конечное состояние отделяемого объекта ограничиваются равенством

(2) $$G_i(T_i, x_i(T_i)) = 0.$$

В промежуточных (1) и терминальных (2) условиях, функции $g_i: R^n \to R^{n_i}$ и $G_i: R^{n_i} \to R^{p_i}$ – непрерывные. В частности, стартовые состояния отделяемых объектов могут совпадать с конечным состоянием носителя, а конечные состояния объектов – с заданными точечными целями

$$x_i(s) = x(s), x_i(T_i) = x_{iT}, i = 1, \ldots, m.$$

Качество управления оценивается временем T достижения всех целей:

(3) $$T = \max_{i=1,\ldots,m} T_i.$$

Требуется найти наименьшее значение $T_{\min}$ функционала (3) и оптимальный процесс, на котором это время достигается, т.е. решить задачу группового быстродействия:

$$\max_{i=1,\ldots,m} T_i \to \min.$$

В постановке задачи могут быть учтены дополнительные условия, отражающие особенности прикладных задач: фазовые ограничения, запрещающие движение в некоторых областях пространства состояний, условия, не допускающие чрезмерного сближения отделяемых объектов, ограничение множества допустимых точек разделения объектов и т.п. Допустимо требование одновременного достижения всеми отделяемыми объектами конечных состояний [10].

3. Оптимальные траектории

Процесс управления гибридной системой выполняется в два этапа. На первом этапе осуществляется управление одним объектом – носителем, а на втором – управление группой отделяемых объектов. Переход от первого этапа ко второму происходит в момент разделения объектов управления. Если зафиксировать точку разделения, то для носителя получим задачу быстродействия с фиксированными концами траектории, а для каждого отделяемого объекта – задачу быстродействия с фиксированным левым и подвижным правым концами траектории. При этом решение задачи быстродействия для каждого объекта управления, включая носитель, не зависит от других объектов.

Предполагаем, что решение каждой из полученных задач быстродействия известно. Например, оно может быть получено при помощи принципа максимума Понтрягина. Тогда задача группового управления сводится к поиску оптимальной точки разделения объектов, т.е. к задаче конечномерной оптимизации. На практике вместо оптимального управления часто используется рациональное (с точки зрения инженеров) управление, которое, как правило, мало уступает оптимальному.

4. Модели движения

В рассматриваемой задаче группового быстродействия можно использовать разные модели движения объектов управления. Наиболее простое движение с постоянной линейной скоростью V описывается уравнениями

$$\dot{x}(t) = V\cos\gamma(t), y(t) = V\sin\gamma(t),$$

где x, y – координаты положения объекта. Управлением служит угол γ направления движения, т.е. угол между вектором скорости и направлением оси абсцисс. Поскольку допустимы мгновенные изменения угла направления, то оптимальными по быстродействию траекториями будут отрезки.

Прямолинейными оказываются оптимальные по быстродействию траектории системы

$$\dot{x}(t) = v(t)\cos\gamma(t), y(t) = v(t)\sin\gamma(t), \dot{v}(t) = u(t)$$

с ограниченной линейной скоростью $0 \leq v \leq V$ и ограниченным ускорением $|\, u \,| \leq U$. Здесь управлениями являются угол направления γ и ускорение u.

Классическая модель машины Дубинса описывается уравнениями

$$\dot{x}(t) = V\cos\gamma(t), y(t) = V\sin\gamma(t), \dot{\gamma}(t) = \omega(t),$$

где $\omega(t)$ – угловая скорость, которая служит управлением, ограниченным по модулю $|\,\omega\,| \leq \Omega$. Оптимальные траектории (ограниченной кривизны) представляют собой гладкие соединения отрезков и дуг окружностей (радиуса $1/\Omega$).

Имеются многочисленные модификации Дубинса – модели Ридса-Шеппа [7], Бердышева [3], Зеликина-Борисова [5], Пацко-Федотова [6] и др. Модель [4], допускающая траектории неограниченной кривизны (повороты на месте), описывается уравнениями

$$\dot{x}(t) = v(t)\cos\gamma(t), \quad y(t) = v(t)\sin\gamma(t), \quad \dot{v}(t) = u(t), \quad \dot{\gamma}(t) = \omega(t), \quad \dot{\omega}(t) = \varepsilon(t). \tag{4}$$

Управлениями служат ускорения $u(t)$ и $\varepsilon(t)$, ограниченные по модулю $|\,u\,| \leq U$, $|\,\varepsilon\,| \leq E$. Линейная и угловая скорости также ограничены: $0 \leq v \leq V$, $|\,\omega\,| \leq \Omega$. Оптимальными траекториями будут решения уравнений движения, получаемые при постоянных ускорениях: $u(t) \in \{0, \pm U\}$, $\varepsilon(t) \in \{0, \pm E\}$.

Гибридная модель машины Дубинса [10] отличается от модели (4) тем, что повороты выполняются с постоянной линейной скоростью, а изменение линейной скорости допускается только при прямолинейном движении. В этом случае прямолинейное движение описывается уравнениями

$$\dot{x}(t) = v(t)\cos\gamma(t), y(t) = v(t)\sin\gamma(t), \dot{v}(t) = u(t), \dot{\gamma}(t) = 0;$$

а криволинейное – уравнениями

$$\dot{x}(t) = v(t)\cos\gamma(t), y(t) = v(t)\sin\gamma(t), \dot{v}(t) = 0, \dot{\gamma}(t) = \omega(t), \dot{\omega}(t) = \varepsilon(t).$$

Оптимальные траектории гибридной модели составляются из участков, каждый из которых либо поворот на месте, либо движение по спирали Эйлера (с линейным изменением кривизны траектории), либо прямолинейное движение (равномерное, равноускоренное или равнозамедленное).

В перечисленных моделях оптимальные по быстродействию процессы находятся сравнительно просто, поскольку известна конструкция оптимальных траекторий. Эти модели можно использовать как для носителя, так и для отделяемых объектов. Причем для каждого подвижного объекта модель выбирается индивидуально. Заметим только, что максимальная скорость движения носителя должна, как правило, превышать максимальную скорость каждого отделяемого объекта. В самом деле, если все отделяемые объекты двигаются быстрее носителя, то оптимальное разделение будет, разумеется, в начальный момент времени.

5. Заключение

Поставлена задача быстродействия гибридной системы однократным разделением объектов управления. Показано, что решение этой задачи сводится к децентрализованному управлению отдельными объектами с последующей конечномерной оптимизацией положения точки разделения. Приведены типичные модели плоского движения объектов управления, для которых построение оптимальных по быстродействию траекторий не вызывает затруднений. Использование таких моделей упрощает решение задачи группового быстродействия. Полученное решение может служить начальным приближением для аналогичных прикладных задач управления летательными аппаратами.

Список литературы

1. Марков А.А. Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах // Сообщения Харьк. мат. общества. Сер. 2. Т. I. 1889. С. 250-276.
2. Dubins L.E. On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents // American Mathematics. 1957. Vol. 79, No. 3. P. 497–516.
3. Бердышев Ю.И. Об оптимальном по быстродействию управлении обобщенной машиной Дубинса // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 1. С. 26–35.
4. Бортаковский А.С. Оптимальные по быстродействию траектории плоского движения с неограниченной кривизной // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 4. С. 38-48.
5. Зеликин М.И., Борисов В.Ф. Синтез оптимальных управлений с накоплением переключений // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематический обзор. 2002. Т. 90. С. 5-189.
6. Пацко В.С., Федотов А.А. Трехмерное множество достижимости для машины Дубинса: сведение общего случая ограничений на повороты к каноническому // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 4. С. 25-49.
7. Reeds J.A., Shepp L.A. Optimal Paths for a Car that Goes Both Forwards and Backwards // Pacific J. Math. 1990. Vol. 145, No. 2. P. 367-393.
8. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 392 с.
9. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
10. Бортаковский А.С. Быстродействие группы управляемых объектов // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 5. С. 51-77.