УДК 62-50

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И ДОСТИЖИМЫЕ ИНЖЕНЕРНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА

В.Н. Честнов
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: vnchest@yandex.ru

Ключевые слова: линейные системы, дискретные регуляторы, ограниченное внешнее возмущение, ошибка регулирования, время регулирования, радиус запасов устойчивости.

Аннотация: Рассматриваются линейные дискретные объекты управления, подверженные действию неизвестных ограниченных внешних возмущений с известной верхней границей. Для дискретных регуляторов таких объектов, полученных, например, на основе l_1-оптимизации, оптимальных по быстродействию регуляторов, LQR-оптимизации, H_∞-оптимизации и других подходов к синтезу дискретных регуляторов, анализируются достижимые инженерные показатели качества: ошибка по регулируемой переменной, время регулирования и радиус запасов устойчивости. Последний показатель – радиус запасов устойчивости $0 < r < 1$ (минимальное расстояние годографа Найквиста разомкнутой системы от критической точки $(-1, j0)$) всегда в инженерной практике определяет саму возможность реализации замкнутой системы в практике автоматических систем. Малые его значения $r < 0.3$, говорят о ненадежной работе таких регуляторов и большом перерегулировании в переходной функции замкнутой системы даже при нулевых начальных условиях и номинальных значениях параметров объекта и регулятора. В докладе показано, что все перечисленные выше техники синтеза регуляторов приводят к малому значению радиуса запасов устойчивости (если этот показатель прямо не оптимизируется в процедуре синтеза регулятора) и, более того, при относительно невысоком порядке дискретной модели объекта (около 20) при любом методе синтеза регулятора радиус запасов устойчивости становится весьма малым (порядка 0,1), что говорит фактически о невозможности реализовать его на практике.

1. Введение

Рассматриваются линейные дискретные объекты управления, подверженные действию неизвестных ограниченных внешних возмущений с известной верхней границей. Для дискретных регуляторов таких объектов, полученных, например, на основе l_1-оптимизации, оптимальных по быстродействию регуляторов, LQR-оптимизации, H_∞-оптимизации и других подходов к синтезу дискретных регуляторов, анализируются достижимые инженерные показатели качества: ошибка по регулируемой переменной, время регулирования и радиус запасов устойчивости. Последний показатель – радиус запасов устойчивости $0 < r < 1$ (минимальное расстояние годографа Найквиста разомкнутой системы от критической точки $(-1, j0)$) всегда в инженерной практике определяет саму возможность реализации замкнутой системы в практике автоматических систем. Малые его значения $r < 0{,}3$, говорят о ненадежной работе таких регуляторов и большом перерегулировании в переходной функции замкнутой системы (больших всплесках даже при нулевых начальных условиях и номинальных значениях параметров объекта и регулятора!!!).

В докладе показано, что все перечисленные выше техники синтеза регуляторов приводят к малому значению радиуса запасов устойчивости (если этот показатель прямо не оптимизируется в процедуре синтеза регулятора). И более того, при относительно невысоком порядке дискретной модели объекта (около 20) при любом методе синтеза регулятора радиус запасов устойчивости становится весьма малым (порядка 0.1), что говорит о невозможности реализовать его на практике.

Указанные выводы получены на основе строгих математических формул и иллюстрируются простейшими примерами объектов первого-второго порядка.

2. Постановка задачи

Рассматривается управляемая и наблюдаемая дискретная модель непрерывного объекта управления, описываемая разностными уравнениями:

(1)
$$x(k+1) = Ax(k) + B_1 w(k) + B_2 u(k),$$
$$z(k) = Cx(k), k = 0,1,2,\ldots,$$

где $x(k) \in R^n$ – измеряемый вектор состояния объекта, $w(k) \in R^m$ – вектор внешних возмущений, $u(k) \in R^m$ – управление (вход объекта), $z(k) \in R^{m_1}$ – регулируемый выход объекта. Матрицы объекта A, B_1, B_2, C известны.

Объект (1) замыкается стабилизирующим статическим регулятором$K \in R^{m\times n}$ по полному вектору состояния:

(2) $$u(k) = Kx(k), k = 0,1,2,\ldots$$

Далее будем полагать, что возмущение действует согласно с управлением $B_1 = B_2 = B$, что в непрерывном случае позволяет указать ряд законов управления по состоянию, что ошибка по регулируемым переменным может быть сделана сколь угодно малой [2]. Для простоты ограничимся здесь случаем скалярного управления, возмущения и регулируемой переменной$m = m_1 = 1$.

Структурная схема замкнутой системы приведена на рис. 1.

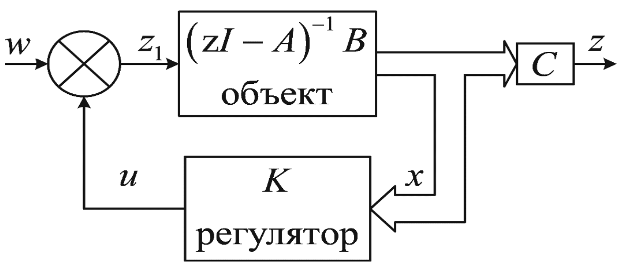

Рис. 1. Структурная схема замкнутой системы.

Возмущение w (его непрерывный образ – непрерывен и имеет кусочно-непрерывную производную [2]) является ограниченной функцией: для всех k: $|w(k)| < w^*$, где w^* – заданное число.

Пусть найден стабилизирующий регулятор по полному вектору состояния (2).

Задача. *Исследовать предельные возможности дискретных регуляторов состояния по обеспечению инженерных показателей качества замкнутых дискретных систем:*

- *к точности, которая определяется предельно достижимым коэффициентом передачи разомкнутой системы k_p при заданном периоде дискретности h;*
- *к робастности: достижимому радиусу запасов устойчивости $r < 1$;*

- *к быстродействию, определяемому степенью устойчивостиα замкнутой системы (1),(2): собственные числа матрицы $A_{cl} = A + BK$должны лежать внутри круга с центром в начале координат и радиусом α*, где $\alpha < 1$ – *достижимое число.*

Коротко прокомментируем поставленную задачу. Во-первых, все три инженерных требования взаимно противоречивы. Высокий коэффициент усиления разомкнутой системы (малая ошибка по регулируемой переменной) – малый запас устойчивости по r; высокое быстродействие – снова малый радиус и т.д. В этом легко убедиться на простейших примерах объектов 1–2 порядков, а ниже даны строгие аналитические условия, доказывающие эти утверждения.

3. Основные результаты

Основные результаты работы следуют из фундаментального тождества теории систем с обратной связью

(3) $$1 + W(\mathrm{z}) = \frac{D(\mathrm{z})}{d(\mathrm{z})},$$

где $W(\mathrm{z}) = -K(\mathrm{z}I - A)^{-1}B$ – передаточная функция разомкнутой системы (1), (2) по управлению; $d(\mathrm{z}) = \det(\mathrm{z}I - A)$ – характеристический полином разомкнутой системы; $D(\mathrm{z}) = \det(\mathrm{z}I - A - BK)$ – характеристический полином замкнутой системы. Связь между регулируемой переменной и внешним возмущением описывается формулой [1]

$$z(k) = \frac{C(\mathrm{z}I - A)^{-1}B}{1 + W(\mathrm{z})} w(k),$$

где z в аргументе передаточных функций – символ Z-преобразования, а в числителе стоит передаточная функция объекта, в знаменателе – передаточная функция возвратной разности $V(\mathrm{z})$, которая уменьшает ошибку за счет обратной связи (2). К сожалению, в дискретном случае [1] возвратная разность не может быть сделана сколь угодно большой, и ошибка по регулируемой переменной $z(k)$ всегда будет не меньше некоторой предельной.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – корни полинома $D(\mathrm{z})$, а $\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, \dots, \mathrm{z}_n$ – корни полинома $d(\mathrm{z})$, тогда тождество (3) можно переписать в виде:

(4) $$1 + W(\mathrm{z}) = \frac{D(\mathrm{z})}{d(\mathrm{z})} = \prod_{i=1}^{n} \frac{(\mathrm{z} - \lambda_i)}{(\mathrm{z} - \mathrm{z}_i)}.$$

Положим, что корни $D(\mathrm{z})$ лежат в замкнутом единичном круге с центром в точке (0, 0).

Теорема 1. *Коэффициент передачи разомкнутой системы (1), (2) удовлетворяет неравенству*

(5) $$\left|1 + k_{\mathrm{p}}\right| \le \frac{2^n}{|d(1)|}.$$

Эта оценка является равенством, например, для цепочки интеграторов. Заметим, что k_{p} определяет начало годографа Найквиста разомкнутой системы $W(e^{j\omega T})\big|_{\omega=0} = W(1) = k_{\mathrm{p}}$.

Из (4) видно, что k_{p} максимизируется, если $\lambda_i \to -1$ (при фиксированныхz_i объекта), однако, это ведет к сильно колебательному и слабо затухающему переходному процессу $z(k) = \sum_{i=1}^{n} c_i(\lambda_i)^k + z_{\text{част}}(k)$, (где c_i – произвольные постоянные, $z_{\text{част}}(k)$ – частное решение) что говорит о малом запасе устойчивости системы. Рассмотрим теперь этот важнейший инженерный показатель более подробно. Перейдем в (4) к -преобразованию с помощью подстановки $\mathrm{z} = (w + 1)/(w - 1)$ и положим $w = j\nu$, где ν – псевдочастота, связанная с реальной частотой ω: $\nu = \mathrm{tg}(\omega T/2)$. Теперь, используя определение радиуса запасов устойчивости с помощью (4), получим:

$$r^2 = \min_{0 \le \omega \le \pi/T} \left|1 + W(e^{j\omega T})\right|^2 = \min_{0 \le \nu < \infty} \frac{\left|\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)^2\nu^2 + (1-\lambda_i)^2\right|}{\left|\prod_{i=1}^{n}(1+\mathrm{z}_i)^2\nu^2 + (1-\mathrm{z}_i)^2\right|}.$$

Отсюда, соответственно при нулевой псевдочастоте и стремящейся к бесконечности получим две оценки сверху для радиуса запасов устойчивости:

(6) $$r_1 \le \prod_{i=1}^{n} |1-\lambda_i|/|1-\mathrm{z}_i|, \qquad r_2 \le \prod_{i=1}^{n} |1+\lambda_i|/|1+\mathrm{z}_i|.$$

(Необходимо сказать, что значение 1 для радиуса r недостижимо (для этого надо чтобы $\lambda_i = \mathrm{z}_i \mathrm{i} = \overline{1,n}$), что в силу (4) приводит к нулевому K регулятора).

Первая из которых служит для оценки радиуса запасов устойчивости систем с неустойчивым объектом (это соответствует началу годографа Найквиста), а вторая является точным значением радиуса запасов устойчивости систем с дискретными регуляторами состояния (2) и соответствует окончанию годографа Найквиста.

Теорема 2. *Система (1), (2) имеет радиус запасов устойчивости*

(7) $$r = \prod_{i=1}^{n} \frac{|1+\lambda_i|}{|1+\mathrm{z}_i|}.$$

Отсюда, в частности, следует, что сильно неустойчивая разомкнутая система (один или несколько $|\mathrm{z}_i| >> 1$) может иметь весьма малый радиус запасов устойчивости, поскольку выбор $|\lambda_i|$ ограничен сверху единицей. Кроме того, из формулы (7) следует важный вывод, что даже для хорошего устойчивого объекта (1) с вещественными $0 < \mathrm{z}_i < 1$ при устойчивости $|\lambda_i| < 1$ замкнутой системы и наборе необходимого коэффициента передачи разомкнутой системы (соответствующие пары λ_i, z_i должны отстоять друг от друга максимально далеко), каждое отношение этих пар в произведении (7) будет меньше 1 и тем меньше, чем более высокую точность надо обеспечить. Если, например, принять, что каждая пара обеспечивает отношение $(1+\lambda_i)/(1+\mathrm{z}_i) \to 0{,}9$, что весьма много, то искомый радиус при относительно невысоком порядке объекта $n = 20$ будет 0,1, что абсолютно неприемлемо в инженерной практике.

Теорема 3. *Системы, оптимальные по быстродействию ($\lambda_i = 0, i = \overline{1,n}$) имеют радиус запасов устойчивости* $r = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{|1+\mathrm{z}_i|}$.

Отсюда для цепочки ($\mathrm{z}_i = 1, i = \overline{1,n}$) из n интеграторов мы получим $r = 1/2^n$, что уже при $n = 2$ дает недопустимо малую величину $r = 0{,}25$. Это ведет к большому перерегулированию по управлению при $w = \mathrm{const} = 1$ (см. рис.1), поскольку функция чувствительности $S = T_{z_1 w} = 1/[1 + W(\mathrm{z})]$: $\|S\|_\infty = 1/r = 4$, а дополнительная функция чувствительности $T = S - 1 = W(z)/[1 + W(\mathrm{z})]$ имеет максимум для всех частот $\|T\|_\infty = 4 \pm 1$, что определяет недопустимо большой показатель колебательности M. Но всплеск по $u(k)$ в силу линейной комбинации $u(k) = \sum_i^n k_i x_i(k)$, означает всплеск и по одной из координат состояния объекта (здесь k_i – коэффициенты регулятора K).

Теорема 4. *Минимально-фазовые l_1-оптимальные системы с регуляторами по выходу имеют радиус запасов устойчивости порядка* 0,3*, начиная с объекта размерности* $n = 2$.

Что касается неминимально-фазовых объектов, то порядок регулятора по выходу для них может быть непредсказуемо высоким и, таким образом, их радиус запасов устойчивости стремится к нулю. Высокий порядок регулятора объясняется просто тем, что предельный коэффициент передачи разомкнутой системы растет с ростом порядка системы как 2^n (для регуляторов по выходу существует аналог формулы Теоремы 1) и чтобы набрать его для подавления класса возмущений l_1-теории порядок регулятора растет, поскольку порядок объекта остается фиксированным.

4. Заключение

В работе обсуждались свойства дискретных регуляторов непрерывных объектов по обеспечению достижимых инженерных показателей качества: коэффициента передачи разомкнутой системы, определяющего ошибку регулирования, быстродействие и радиус запасов устойчивости на входе объекта. Поскольку ряд утверждений работы не зависят от метода синтеза регулятора (Теоремы 1 и 2), то эти утверждения относятся ко всему множеству стабилизирующих регуляторов состояния. В частности, показано, что системы оптимальные по быстродействию (переходный процесс завершается за n тактов регулятора: nh) при управлении двумя чистыми интеграторами приводят к недопустимому с точки зрения инженерной практики радиусу запасов устойчивости $r = 0{,}25$. Некоторые из высказанных здесь утверждений, ранее обсуждались в работах автора [1, 3]. Кроме того, показано, что «хорошие» минимально-фазовые объекты с l_1-оптимальными регуляторами по выходу уже при порядке $n = 2$ объекта обладают недопустимо малым радиусом запасов устойчивости, что говорит о весьма низкой вероятности практической реализации таких регуляторов.

Список литературы

1. Честнов В.Н. Предельно достижимая точность линейных систем с дискретными регуляторами // Автоматика и телемеханика. 2014. № 2. С. 193-214.
2. Честнов В.Н. Синтез многомерных систем по инженерным критериям качества на основе H_∞-оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2019. № 10. С. 132-152.
3. Честнов В.Н. Синтез дискретных H_∞-регуляторов по заданному радиусу запасов устойчивости и времени регулирования // Автоматика и телемеханика. 2014. № 9. С. 65-82.