УДК 517.977.8

О ЦЕНЕ АНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРЫ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

М.И. Гомоюнов

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

Россия, 620108, Екатеринбург, Софьи Ковалевской ул., 16

E-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

Ключевые слова: интегральные уравнения Вольтерра, антагонистические игры, цены игра, динамическое программирование, коинвариантные производные, уравнения Гамильтона-Якоби, вязкостные решения.

Аннотация: Для динамической системы, движение которой описывается слабо сингулярным нелинейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода, рассмотрена игра на минимакс–максимин заданного показателя качества. При достаточно общих предположениях доказано, что эта игра имеет цену (то есть нижняя и верхняя цены, определяемые в классах неупреждающих стратегий управления игроков, совпадают). Основу результата составило исследование вязкостных (обобщенных) решений соответствующих наследственных уравнений Гамильтона-Якоби с коинвариантными производными.

1. Введение

В теории антагонистических дифференциальных игр важную роль играет факт существования цены, то есть совпадения нижней и верхней цен, определяемых, например, в классах неупреждающих стратегий управления игроков. Один из возможных подходов к доказательству данного факта имеет своей основной принцип динамического программирования и опирается на результаты из теории уравнений Гамильтона-Якоби и их обобщенных решений. Настоящая работа направлена на дальнейшее развитие этого подхода с целью доказательства существования цены для более широкого круга антагонистических игр, в которых движение системы описывается интегральными уравнениями Вольтерра.

Отметим, что по сравнению с дифференциальными играми, динамическим играм для систем, описываемых интегральными уравнениями Вольтерра, в литературе уделяется гораздо меньше внимания (см., например, [1–4]). Отметим также, что в статьях [5, 6], посвященных изучению задач оптимального управления такими системами, были затронуты вопросы, связанные с применением принципа динамического программирования и техники уравнений Гамильтона-Якоби, и, в том числе, были указаны некоторые сложности, возникающие на этом пути.

2. Постановка задачи

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и $T > 0$. Пусть $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство n-мерных векторов со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нормой $\| \cdot \|$; $\mathbb{R}^{n \times n}$ – пространство матриц размера $n \times n$ с соответствующей операторной нормой, также обозначаемой символом $\| \cdot \|$; $B(R)$ – замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат радиуса $R > 0$; $C([0,T], \mathbb{R}^n)$ и $L_\infty([0,T], \mathbb{R}^n)$ – стандартные пространства, соответственно, непрерывных функций из $[0,T]$ в $\mathbb{R}^n$ и (классов эквивалентности) измеримых (по Лебегу) и существенно ограниченных функций из $[0,T]$ в $\mathbb{R}^n$. Положим

$$\Omega = \big\{ (\tau, \xi) \in [0,T] \times [0,T] \colon \tau \geqslant \xi \big\}, \quad \Omega^0 = \big\{ (\tau, \xi) \in \Omega \colon \tau > \xi \big\}.$$

Рассмотрим динамическую систему, описываемую интегральным уравнением

$$x(\tau) = x^0(\tau) + \int_0^\tau K(\tau, \xi) f(\xi, x(\xi), u(\xi), v(\xi)) d\xi, \tag{1}$$

где $\tau \in [0,T]$ – время; $x(\tau) \in \mathbb{R}^n$ – состояние системы в момент времени τ; функция $x^0(\cdot) \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$ задана; $u(\xi) \in P$ и $v(\xi) \in Q$ – управления первого и второго игроков в момент времени ξ, соответственно, $P \subset \mathbb{R}^{n_P}$ и $Q \subset \mathbb{R}^{n_Q}$ – компактные множества, n_P, $n_Q \in \mathbb{N}$. Ядро $K \colon \Omega^0 \to \mathbb{R}^{n \times n}$ и функция $f \colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяют следующим предположениям.

Предположение 1. *Функция f непрерывна; для любого $R > 0$ существует $\lambda > 0$ такое, что для всех $\tau \in [0,T]$, x, $x' \in B(R)$, $u \in P$ и $v \in Q$*

$$\| f(\tau, x, u, v) - f(\tau, x', u, v) \| \leqslant \lambda \| x - x' \|;$$

существует $c > 0$ такое, что для всех $\tau \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in P$ и $v \in Q$

$$\| f(\tau, x, u, v) \| \leqslant c(1 + \|x\|).$$

Предположение 2. *Ядро K может быть представлено в виде*

$$K(\tau, \xi) = \frac{K_*(\tau, \xi)}{(\tau - \xi)^{1-\alpha}}, \quad (\tau, \xi) \in \Omega^0,$$

где функция $K_* \colon \Omega \to \mathbb{R}^{n \times n}$ непрерывна и $\alpha \in (0,1)$; существуют $\gamma \in (0,1]$ и $\lambda > 0$ такие, что для всех (τ, ξ), $(\tau, \xi') \in \Omega$

$$\| K_*(\tau, \xi) - K_*(\tau, \xi') \| \leqslant \lambda |\xi - \xi'|^\gamma.$$

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ – множества измеримых функций $u \colon [0,T] \to P$ и $v \colon [0,T] \to Q$, соответственно. Функции $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ трактуются как допустимые управления первого и второго игроков. Движение системы (1), порожденное управлениями $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, определяется как функция $x(\cdot) \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$, которая вместе с $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ удовлетворяет интегральному уравнению (1) для всех $\tau \in [0,T]$. При предположениях 1 и 2 такое движение $x(\cdot) = x(\cdot; u(\cdot), v(\cdot))$ существует и единственно.

Для системы (1) рассмотрим игру, в которой первый игрок стремится минимизировать, а второй – максимизировать показатель качества

$$J(u(\cdot), v(\cdot)) = \sigma(x(T)) + \int_0^T \chi(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)) d\tau, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \ v(\cdot) \in \mathcal{V}, \tag{2}$$

где $x(\cdot) = x(\cdot; u(\cdot), v(\cdot))$. Функции $\sigma \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $\chi \colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \to \mathbb{R}$ заданы и удовлетворяют следующему предположению.

Предположение 3. *Функция χ непрерывна; для любого $R > 0$ существует $\lambda > 0$ такое, что для всех $\tau \in [0,T]$, x, $x' \in B(R)$, $u \in P$ и $v \in Q$*

$$|\sigma(x) - \sigma(x')| + |\chi(\tau, x, u, v) - \chi(\tau, x', u, v)| \leqslant \lambda \|x - x'\|.$$

Неупреждающей стратегией управления первого игрока называется отображение $a\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, обладающее следующим свойством: каковы бы ни были момент времени $t \in [0,T]$ и управления второго игрока $v(\cdot)$, $v'(\cdot) \in \mathcal{V}$, если $v(\tau) = v'(\tau)$ при почти всех $\tau \in [0,t]$, то для соответствующих управлений первого игрока $u(\cdot) = a[v(\cdot)](\cdot)$ и $u'(\cdot) = a[v'(\cdot)](\cdot)$ при почти всех $\tau \in [0,t]$ выполнено равенство $u(\tau) = u'(\tau)$. Для второго игрока неупреждающие стратегии управления $b\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ определяются симметричным образом.

Рассмотрим нижнюю ρ_- и верхнюю ρ_+ цены игры (1), (2):

$$\rho_- = \inf_a \sup_{v(\cdot)\in\mathcal{V}} J\big(a[v(\cdot)](\cdot), v(\cdot)\big), \quad \rho_+ = \sup_b \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} J\big(u(\cdot), b[u(\cdot)](\cdot)\big).$$

Говорят, что игра (1), (2) имеет цену, если величины ρ_- и ρ_+ совпадают, при этом величину $\rho = \rho_- = \rho_+$ называют ценой этой игры.

3. Дополнительное предположение

Доказательство существования цены игры (1), (2) проводится при следующем дополнительном предположении, которое используется при формализации в этой игре принципа динамического программирования.

Предположение 4. *Для каждого $t \in (0,T]$ линейный интегральный оператор Вольтерра $\mathcal{K}_t\colon L_\infty([0,t], \mathbb{R}^n) \to C([0,t], \mathbb{R}^n)$, определяемый по правилу*

$$\mathcal{K}_t[\ell(\cdot)](\tau) = \int_0^\tau K(\tau,\xi)\ell(\xi)d\xi, \quad \tau \in [0,t],\ \ell(\cdot) \in L_\infty([0,t], \mathbb{R}^n),$$

имеет тривиальное ядро.

Например, ядро K будет удовлетворять предположению 4, если выполнено одно из следующих условий.

- Для всех $(\tau,\xi) \in \Omega^0$ и i, $j \in \overline{1,n}$, $i < j$, имеет место равенство $k_{i,j}(\tau,\xi) = 0$; для каждого $i \in \overline{1,n}$ справедливо представление $k_{i,i}(\tau,\xi) = m_i(\tau - \xi)$, $(\tau,\xi) \in \Omega^0$, где функция $m_i\colon (0,T] \to \mathbb{R}$ такова, что $m_i(\tau) \neq 0$ при почти всех $\tau \in (0,T]$. Здесь $k_{i,j}(\tau,\xi)$ – соответствующий элемент матрицы $K(\tau,\xi)$.

- Для любого $\tau \in [0,T]$ матрица $K_*(\tau,\tau)$ невырождена; во всех точках $(\tau,\xi) \in \Omega$ частная производная $\partial K_*(\tau,\xi)/\partial\tau$ существует и непрерывна.

В частности, предположения 2 и 4 выполняются для интегральных уравнений, отвечающих системам из обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с дробными производными Капуто разных порядков.

4. Основной результат

Основным результатом работы является:

Теорема. *Пусть выполнены предположения 1–4 и справедливо равенство*

$$\min_{u\in P}\max_{v\in Q}\big(\langle s, f(\tau,x,u,v)\rangle + \chi(\tau,x,u,v)\big) = \max_{v\in Q}\min_{u\in P}\big(\langle s, f(\tau,x,u,v)\rangle + \chi(\tau,x,u,v)\big), \quad \tau\in[0,T],\ x,s\in\mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Тогда игра (1), (2) *имеет цену.*

Несмотря на то, что в целом доказательство данной теоремы следует достаточно стандартной схеме рассуждений (см. [7], а также, например, [8, разд. 3.3]), каждый из этапов этой схемы требуется должным образом модифицировать.

На первом этапе для системы (1) вводится понятие позиции – пары $(t, w(\cdot))$, состоящей из момента времени $t \in [0,T]$ и функции $w\colon [0,t] \to \mathbb{R}^n$ (из некоторого подходящего функционального пространства), трактуемой как история движения системы на промежутке $[0,t]$. Отметим, что необходимость учитывать всю историю движения вызвана наследственным характером динамических систем, описываемых интегральными уравнениями Вольтерра.

Затем осуществляется распространение постановки игры (1), (2) на случай произвольной позиции $(t, w(\cdot))$, выбираемой в качестве начальной, и для получаемой игры рассматриваются нижняя и верхняя цены. Таким образом, на пространстве $\mathcal{G}$ позиций системы (1) определяются нижний и верхний функционалы цены. Доказывается, что эти функционалы удовлетворяют соответствующим уравнениям динамического программирования.

Далее, для произвольного функционала на $\mathcal{G}$ вводится понятие коинвариантной (ci-) дифференцируемости, зависящие от ядра K и обобщающее как обычное понятие ci-дифференцируемости [9, 10], так и понятие дробной ci-дифференцируемости [11]. Кроме того, вводится класс ci-гладких функционалов и доказывается формула для вычисления полной производной таких функционалов в силу системы (1).

На следующем этапе рассматривается (абстрактное) наследственное уравнение Гамильтона-Якоби с ci-производными. Следуя [12] (см. также [13–15]), дается определение вязкостного (обобщенного) решения этого уравнения в терминах ci-гладких подстилающих функционалов и вспомогательной последовательности компактных подмножеств $\mathcal{G}$. Из принципа динамического программирования, если учесть полученную формулу для полной производной, выводится, что нижний (соответственно, верхний) функционал цены будет вязкостным решением уравнения Гамильтона-Якоби с нижним (соответственно, верхним) гамильтонианом.

Наконец, для рассматриваемых уравнений Гамильтона-Якоби устанавливается факт единственности вязкостного решения, удовлетворяющего краевому условию на правом конце. Для этого проверяется, что предложенный в [14] функционал Ляпунова-Красовского обладает всеми свойствами, позволяющими использовать его для построения требуемых ci-гладких подстилающих функционалов, после чего рассуждения практически дословно повторяют доказательство [14, теорема 5.1].

В итоге, поскольку нижний и верхний гамильтонианы равны в силу (3), приходим к выводу о том, что нижний и верхний функционалы цены обязаны совпадать, что влечет существование цены и завершает доказательство теоремы.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10070, https://rscf.ru/project/21-71-10070/.

Список литературы

1. Пасиков В.Л. Экстремальное прицеливание в игре линейных систем Вольтерра // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22, № 5. С. 907–909.
2. Чернов А.В. О существовании ε-равновесия в вольтерровых функционально-операторных играх без дискриминации // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4, Вып. 1. С. 74–92.
3. Carlson D.A. Open-Loop Nash Equilibria for Dynamic Games Involving Volterra Integral Equations // Advances in Dynamic and Mean Field Games: Theory, Applications, and Numerical Methods. Cham: Springer, 2017. P. 169–197.
4. You Y. Quadratic Integral Games and Causal Synthesis // Transactions of the American Mathematical Society. 2000. Vol. 352, No. 6. P. 2737–2764.
5. Belbas S.A. A New Method for Optimal Control of Volterra Integral Equations // Applied Mathematics and Computation. 2007. Vol. 189, No. 2. P. 1902–1915.
6. Belbas S.A. A Reduction Method for Optimal Control of Volterra Integral Equations // Applied Mathematics and Computation. 2008. Vol. 197, No. 2. P. 880–890.
7. Evans L.C., Souganidis P.E. Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton–Jacobi–Isaacs equations // Indiana University Mathematics Journal. 1984. Vol. 33, No. 5. P. 773–797.
8. Yong J. Differential Games: A Concise Introduction. Hackensack, New Jersey: World Scientific, 2015. 322 p.
9. Kim A.V. Functional Differential Equations. Application of i-Smooth Calculus. Dordrecht: Springer, 1999. 168 p.
10. Лукоянов Н.Ю. Функциональные уравнения Гамильтона–Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: Изд-во Урал. федерал. ун-та, 2011. 243 с.
11. Gomoyunov M.I. Dynamic Programming Principle and Hamilton–Jacobi–Bellman equations for fractional-order systems // SIAM Journal on Control and Optimization. 2020. Vol. 58, No. 6. P. 3185–3211.
12. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi Equations // Transactions of the American Mathematical Society. 1983. Vol. 277, No. 1. P. 1–42.
13. Лукоянов Н.Ю. О вязкостном решении функциональных уравнений типа Гамильтона–Якоби для наследственных систем // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 2. С. 135–144.
14. Gomoyunov M.I. On Viscosity Solutions of Path-Dependent Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs Equations for Fractional-Order Systems // ArXiv:2109.02451. 2021. 24 p.
15. Soner H.M. On the Hamilton–Jacobi–Bellman Equations in Banach Spaces // Journal of Optimization Theory and Applications. 1988. Vol. 57, No. 3. P. 429–437.