УДК 517.977

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ С ПОМЕХАМИ И НЕВЫПУКЛОЙ ОДНОМЕРНОЙ ЦЕЛЬЮ

И.В. Изместьев
Южно-Уральский государственный университет
Челябинский государственный университет
Россия, 454080, Челябинск, пр. Ленина, 76
Россия, 454001, Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129
E-mail: j748e8@gmail.com

В.И. Ухоботов
Южно-Уральский государственный университет
Россия, 454080, Челябинск, пр. Ленина, 76
E-mail: ukh@csu.ru

Ключевые слова: управление, помеха, параболическая система.

Аннотация: Рассматривается задача управления параболической системой, которая описывает нагрев заданного количества стержней. Управлением являются точечные источники тепла расположенные на концах стержней. Температуры на концах некоторых стержней определяются ограниченными по величине помехами. Функции плотности внутренних источников тепла неизвестны, но заданы границы их возможных значений. Цель выбора управления заключается в том, чтобы в заданный момент времени взвешенная сумма средних температур стержней принадлежала невыпуклому терминальному множеству при любых допустимых реализациях помех и любых допустимых функциях внутренних источников тепла. После замены переменных эта задача сводится к одномерной дифференциальной игре. Найдены необходимые и достаточные условия окончания.

1. Постановка задачи

Распределение температуры $T_i(x,t)$ в i–том ($i = \overline{1,n}$) однородном стержне единичной длины как функцию от времени t описывает уравнение теплопроводности

(1) $$\frac{\partial T_i(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_i(x,t)}{\partial x^2} + f_i(x,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant p, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad i = \overline{1,n}.$$

Известны оценки непрерывных функций $f_i(x,t)$, , которые являются плотностью внутренних источников тепла:

(2) $$f^{(1)}(x,t) \leqslant f_i(x,t) \leqslant f^{(2)}(x,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant p, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad i = \overline{1,n}.$$

Здесь функции $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ являются непрерывными.

В начальный момент времени $t = 0$ заданы распределения температур $T_i(x,0) = g_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, где функции $g_i(x)$ являются непрерывными. Считается, что управляемые температуры $T_i(0,t)$ и $T_i(1,t)$ на концах i-того стержня меняются согласно уравнениям

$$\frac{dT_i(0,t)}{dt} = a_i^{(1)}(t) + a_i^{(2)}(t)G_i^{(1)}\overline{\xi}(t); \tag{3}$$

$$\frac{dT_i(1,t)}{dt} = b_i^{(1)}(t) + b_i^{(2)}(t)\eta_i(t), \quad |\eta_i(t)| \leqslant 1, \quad i = \overline{1,k}, \tag{4}$$

$$\frac{dT_i(1,t)}{dt} = b_i^{(1)}(t) + b_i^{(2)}(t)G_{i-k}^{(2)}\overline{\xi}(t), \; i = \overline{k+1,n}. \tag{5}$$

Здесь функции $a_i^{(j)}(t)$ и $b_i^{(j)}(t)$, $i = \overline{1,n}$, $j = 1,2$ непрерывны при $0 \leqslant t \leqslant p$, причем $a_i^{(2)}(t) \geqslant 0$ и $b_i^{(2)}(t) \geqslant 0$. Вектор-функция $\overline{\xi}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_l(t))^* \in U$, где U – компакт из $\mathbb{R}^l$, является управлением. Символ $*$ обозначает операцию транспонирования. С помощью матрицы $G^{(1)}$ размерности n на l задается выбор соответствующих одномерных управлений $\xi_j(t)$ для левого конца каждого стержня. С помощью матрицы $G^{(2)}$ размерности $n-k$ на l задается выбор соответствующих одномерных управлений $\xi_j(t)$ для правых концов стержней с индексами $i = \overline{k+1,n}$. За $G_i^{(1)}$, $G_{i-k}^{(2)}$ обозначены i-тые строки соответствующих матриц. Функции $\eta_i(t)$, $i = \overline{1,k}$, являются помехами.

Заданы непрерывные функции $\sigma_i : [0,1] \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, которые удовлетворяют условиям $\sigma_i(0) = \sigma_i(1) = 0$. Функции $\sigma_i(x)$ используются для определения среднего значения температуры i–того стержня

$$\int_0^1 T_i(x,t)\sigma_i(x)dx, \quad 0 \leqslant t \leqslant p, \quad i = \overline{1,n}.$$

Пусть заданы числа c_r, $r = \overline{1,s}$, и $\varepsilon \geqslant 0$ такие, что $c_{r+1} - c_r = \Delta > 0$, $r = \overline{1,s-1}$ и $\Delta > 2\varepsilon$, и вектор $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^* \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,n}$. Цель выбора управления $\overline{\xi}(t)$ в (3), (5) заключается в осуществлении включения

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_0^1 T_i(x,p)\sigma_i(x)dx \in Z(\varepsilon) = \bigcup_{r=\overline{1,s}} [c_r - \varepsilon, c_r + \varepsilon] \tag{6}$$

при любых непрерывных функций $f_i(x,t)$ (2), $i = \overline{1,n}$, и любых реализациях помех $\eta_i(t)$ (4), $i = \overline{1,k}$.

2. Одномерная дифференциальная игра

Следуя подходам изложенным в [1, 2], сделаем замену переменных и, принимая помехи и неизвестные функции за управление второго игрока, получим одномерную дифференциальную игру, в которой движение $z \in \mathbb{R}$ происходит по правилу

$$\dot{z} = -a(t)u + b(t)v, \quad |u| \leqslant 1, \quad |v| \leqslant 1, \quad t \leqslant p.$$

Здесь u – управление первого игрока, v – управление второго игрока; функции $a(t) \geqslant 0$ и $b(t) \geqslant 0$ являются непрерывными $t \leqslant p$. Цель выбора управления первого игрока $z(p) \in Z(\varepsilon)$. Цель управления второго игрока противоположна.

Определим функцию

$$g(t) = \int_t^p (a(r) - b(r))dr$$

при $t \leqslant p$ и обозначим

$$q_1(\varepsilon) = \inf\{t < p : \varepsilon + g(\tau) < \Delta - \varepsilon - g(\tau) \text{ для всех } t < \tau \leqslant p\},$$

$$q_2(\varepsilon) = \inf\{t < p : 0 \leqslant \varepsilon + g(\tau) \text{ для всех } t < \tau \leqslant p\},$$

$$q_3(\varepsilon) = \inf\{t < p : \alpha_1 - \varepsilon - g(\tau) \leqslant \alpha_s + \varepsilon + g(\tau) \text{ для всех } t < \tau \leqslant p\}.$$

Определим множество $W(t, \varepsilon)$ при $t \leqslant p$ следующим образом:

$$W(t, \varepsilon) = \bigcup_{r=\overline{1,s}} [\alpha_r - \varepsilon - g(t), \alpha_r + \varepsilon + g(t)] \text{ при } \max(q_1(\varepsilon), q_2(\varepsilon)) \leqslant t \leqslant p,$$

$$W(t, \varepsilon) = [\alpha_1 - \varepsilon - g(t), \alpha_s + \varepsilon + g(t)] \text{ при } q_3(\varepsilon) \leqslant t < q_1(\varepsilon),\ q_2 < q_1,$$

$$W(t, \varepsilon) = \varnothing \text{ при } \max(t, q_1(\varepsilon)) < q_2(\varepsilon) \text{ или } t < q_3(\varepsilon).$$

Здесь $\varnothing$ обозначает пустое множество.

Теорема 1. *Пусть начальные распределения температур* $T_i(x, 0) = g_i(x)$ *таковы, что выполнено включение* $z(0) \in W(0, \varepsilon)$. *Тогда существует управление* $\overline{\xi}$, *гарантирующее выполнение поставленной цели* (6), *при любых неизвестных функциях* (2) *и любых реализациях помех* (4).

3. Заключение

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00539, https://rscf.ru/project/23-21-00539/.

Список литературы

1. Ухоботов В.И., Изместьев И.В. Задача управления процессом нагрева стержня с неизвестными температурой на правом конце и плотностью источника тепла // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 9. С. 297–305.
2. Изместьев И.В., Ухоботов В.И. Об одной задаче управления нагревом системы стержней при наличии неопределенности // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32, Вып. 4. С. 546–556.