УДК 517.977

О ПОСТРОЕНИИ МНОЖЕСТВА РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

А.А. Мельникова
МГУ им. М.В. Ломоносова
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1, стр. 52
E-mail: nastya.a.melnikova@gmail.com

П.А. Точилин
МГУ им. М.В. Ломоносова
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1, стр. 52
E-mail: tochilin@cs.msu.ru

Ключевые слова: динамическое программирование, функция цены, множество разрешимости, уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана.

Аннотация: Доклад посвящен задаче гарантированного попадания на целевое множество на конечном отрезке времени для линейной управляемой системы дифференциальных уравнений, включащей неопределенность (помеху), на которую наложено геометрическое поточечное выпуклое ограничение. В случае с двумерным фазовым пространством предлагается способ построения множества разрешимости без овыпукления опорной функции геометрической разности множеств. Получено уравнение типа Гамильтона-Якоби-Беллмана, которому удовлетворяет функция расстояния до множества разрешимости.

1. Введение

Рассматривается задача попадания на целевое множество за заданный конечный промежуток времени для линейной системы дифференциальных уравнений, включающей управляющие параметры и неопределенность с жесткими выпуклыми ограничениями, из заданного начального положения. Подобная постановка задачи восходит к работам [1], [2]. Для решения задачи о переводе на целевое множество используется множество разрешимости, которое можно построить в форме альтернированного интеграла [3]. Наибольшую вычислительную сложность при его построении представляет вычисление геометрической разности целевого множества и множества, определяемого помехой. Другой подход в решении задачи подобного типа состоит в применении методов динамического программирования. Множество разрешимости может быть найдено как множество уровня для специально сконструированной функции цены [4]. Последняя может быть найдена из уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса [5].

В докладе рассматривается система, на которую действует только неопределенность (отсутствуют управляющие параметры). Множество ограничений не зависит от времени. Известно, что для линейной системы без помехи функция цены, построенная для множества разрешимости, совпадает с расстоянием от точки до множества разрешимости. Для нелинейной системы значение функции цены не обязано совпадать с расстоянием до множества разрешимости во всех точках. В работе [6] построен пример, для которого выведено выражение для функции цены и приведены точки, для которых значение функции цены не совпадает с расстоянием до множества разрешимости. Таким образом, представляется интересным вывод уравнения, решением которого является расстояние до множества разрешимости.

2. Постановка задачи

Рассматривается линейная управляемая система

$$\dot{x}(\tau) = A(\tau)x(\tau) + C(\tau)v, \quad \tau \in [t_0, t_1] \tag{1}$$

с непрерывными матричными коэффициентами $A(\tau)$, $C(\tau)$. $v(\tau) \in \mathbb{R}^k$ – помеха, $v(\tau) \in \mathrm{Q}(\tau)$, где $\mathrm{Q}(\tau)$ – непрерывное в смысле метрики Хаусдорфа многозначное отображение, принимающее значения во множестве выпуклых компактов. Система (1) может быть сведена с помощью преобразования $z(\tau) = X(t_1, \tau)x(\tau)$, где $X(t_1, \tau)$ – фундаментальная матрица Коши системы с матрицей $A(\tau)$, к линейно-выпуклой управляемой системе [7]

$$\dot{x}(\tau) = v, \quad \tau \in [t_0, t_1], \tag{2}$$

на помеху наложены новые поточечные ограничения

$$v(\tau) \in \mathcal{Q}(\tau), \tag{3}$$

$\mathcal{Q}(\tau) = X^{-1}(\tau, t_1)C(\tau)\mathrm{Q}(\tau)$.
Далее для упрощения выкладок будем считать, что $\mathcal{Q}$ не зависит от времени.
Необходимо перевести систему (2) на целевое множество M в конечный момент времени t_1, несмотря на действие помехи (3). Предполагается, что M – непустое выпуклое компактное множество в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 1. *Множество разрешимости в момент времени τ $\mathbf{W}[\tau, t_1, M]$ системы (2) с ограничением (3) состоит из всех точек (τ, x_τ), для которых решения системы, выпущенные из этих точек, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_1$, достигают в момент времени t_1 множества M для любой помехи (3).*

Множество разрешимости в момент времени τ $\mathbf{W}[\tau, t_1, M]$ далее обозначается $\mathbf{W}[\tau]$.
Возьмем временной интервал $t \leqslant \tau \leqslant t_1$ и рассмотрим разбиение $\Sigma_k = \{\sigma_1, ..., \sigma_k\}$,

$$t = \vartheta_k, ..., \vartheta_1, \vartheta_0 = t_1, \sigma_i > 0,$$

$$\vartheta_j = t_1 - \sum_{i=1}^{j} \sigma_i.$$

Множество разрешимости для k-го шага есть

$$W[\vartheta_k] = W[\vartheta_{k-1}] \dot{-} \int_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}} \mathcal{Q}(\tau)d\tau = \tag{4}$$
$$= \left(\left(M \dot{-} \int_{\vartheta_1}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)d\tau \right) \dot{-} ... \right) \dot{-} \int_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}} \mathcal{Q}(\tau)d\tau = M \dot{-} \int_{t}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)d\tau,$$

где "$\dot{-}$" операция взятия геометрической разности, определенная ниже.

Замечание 1. *При наличии в системе (2) управления множество разрешимости выглядит более сложным, но схожим образом*

$$W[\vartheta_k] = W(\vartheta_k, \vartheta_{k-1}, W[\vartheta_{k-1}]) =$$
$$= \left(\left(\left(M + \int_{\vartheta_1}^{t_1} -\mathcal{P}(\tau)d\tau \right) \dot{-} \int_{\vartheta_1}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)d\tau \right) ... + \int_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}} - \right.$$
$$\left. - \mathcal{P}(\tau)d\tau \right) \dot{-} \int_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}} \mathcal{Q}(\tau)d\tau \Big)$$

Определение 2. *Геометрическая разность множеств A, B пространства $\mathbb{R}^n$*

$$A \dot{-} B = \{c \,|\, c + B \subseteq A\}.$$

Опорная функция геометрической разности множеств A, B может быть подсчитана следующим образом

$$\rho(l|A \dot{-} B) = \mathrm{conv}(\rho(l|A) - \rho(l|B)),$$

conv – операция овыпукления функции [8].

Предположение 1. *Параметр t выбран таким образом, что множества $W(\cdot)$ в выражении для множества разрешимости (4) не пусты на каждом шаге.*

При подсчете опорной функции множеств $W[\vartheta_k]$ из (4) требуется вычисление опорной функции геометрической разности выпуклых компактов, для чего необходимо овыпукление разности опорных функций. Данная операция является достаточно затратной с точки зрения вычислений.
Введем понятие функции цены

$$\mathcal{V}(t, x) = \max_{x(\cdot)} \{d(x(t_1), M) | x(\cdot) \in \mathcal{X}(\cdot)\},$$

$\mathcal{X}(\cdot)$ – множество решений задачи $\dot{x} \in \mathcal{Q}(\tau)$, $x(t_0) = x$, $\tau \in [t_0, t_1]$.
В точках дифференцируемости $\mathcal{V}(t, x)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \max_{v \in \mathcal{Q}} \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, v \right) = 0$$

с краевым условием $\mathcal{V}(t_1, x) = d(x, M)$.
Выберем функцию $V(t, x) = d(x, W[t])$. В работе [6] показано, что уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана для $V(t, x)$ не выполнено даже в точках дифференцируемости функции.

3. Модификация задачи

Приведем необходимые определения.

Определение 3. *[9] Пусть M – выпуклое замкнутое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$. Множество M называется порождающим, если для любого непустого множества A, представимого в виде*

$$A = \bigcap_{x \in X} (M + x), \tag{5}$$

для некоторого множества сдвигов X подмножества $\mathbb{R}^n$ существует выпуклое замкнутое множество B, т.ч. $\overline{A + B} = M$. Всякое непустое множество A из этого определения называется M-сильно выпуклым множеством.

Определение 4. *Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^n$ – выпуклое замкнутое множество, Q – такое множество, что $M \dot{-} Q \neq \varnothing$. Множество $str\, co_M Q = M \dot{-} (M \dot{-} Q)$ называется M-сильно выпуклой оболочкой множества Q.*

Определение 5. *Пусть M – выпуклый компакт в пространстве $\mathbb{R}^n$, Q – произвольное множество. Выпуклый компакт $\hat{Q}$ называется предельной M-сильно выпуклой оболочкой Q, если*

$$\lim_{\sigma \to 0+} h(\hat{Q}, \sigma^{-1} \mathrm{str}\, \mathrm{co}_M \sigma Q) = 0. \tag{6}$$

В этом определении предполагается, что существует $\sigma_0 > 0$, $M \dot{-} \sigma_0 Q \neq \varnothing$. Предельную M-сильно выпуклую оболочку Q обозначим $\lim \mathrm{str}\, \mathrm{co}_M Q$.

В данной работе показано что исходная задача нахождения множества разрешимости для системы (2) с ограничением (3) в случае фазового пространства $\mathbb{R}^2$ может быть сведена к задаче с модифицированным множеством-помехой

$$\hat{\mathcal{Q}}(t) = \lim \mathrm{str}\, \mathrm{co}_{M \dot{-} (\tau - t)} \mathcal{Q}, \quad \tau \in [t, t_1], \tag{7}$$

причем множество разрешимости $\hat{W}[t]$ совпадает с $W[t]$. Основные результаты сформулированы ниже в виде теорем.

Теорема 1. *Пусть M – компактное порождающее множество в $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{Q}$ – такое множество, что на временном отрезке $[t, t_1]$ определена предельная сильно выпуклая оболочка $\mathcal{Q}$. Множество разрешимости в момент времени t может быть найдено следующим образом*

$$W[t] = \hat{W}[t] = M \dot{-} \int_t^{t_1} \lim \mathrm{str}\, \mathrm{co}_{M \dot{-} (\tau - t)\mathcal{Q}} \mathcal{Q} d\tau.$$

При этом верно следующее выражение для опорной функции

$$\rho(l | M \dot{-} \int_t^{t_1} \lim \mathrm{str}\, \mathrm{co}_{M \dot{-} (\tau - t)\mathcal{Q}} \mathcal{Q} d\tau) = \rho(l | M) - \rho(l \big| \int_t^{t_1} \lim \mathrm{str}\, \mathrm{co}_{M \dot{-} (\tau - t)\mathcal{Q}} \mathcal{Q} d\tau).$$

Таким образом, для линейной системы (2) с ограничениями (3) выведен эквивалентный класс задач с той же трубкой разрешимости, но при построении которой не требуется прибегать к операции овыпукления геометрической разности множеств. Описаны свойства, определяющие этот класс.
Следующая теорема дает уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана с помехой из (7), которому удовлетворяет функция расстояния до множества разрешимости.

Теорема 2. *Для линейно-выпуклой задачи с неопределенностью (2), $\tau \in [t, t_1]$ с ограничением $v(\tau) \in \hat{\mathcal{Q}}(\tau)$ ($\hat{\mathcal{Q}}(\tau)$ – непустое компактное множество) в случае $\mathbb{R}^2$*

$$V(t, x) = d(x, W[t])$$

в точках дифференцируемости является решением уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \max_{v \in \hat{\mathcal{Q}}(\tau)} \left(\frac{\partial V}{\partial x}, v \right) = 0$$

с краевым условием $V(t_1, x) = d(x, M)$.

4. Заключение

Целью данной работы было нахождение эквивалентных классов задач для линейно-выпуклой системы с неопределенностью, для которых не требуется вычислительно сложная операция взятия овыпукления геометрической разности. Изучен случай фазового пространства $\mathbb{R}^2$, выведены условия, при которых переход к задачам подобного класса возможен. Выведено уравнение типа Гамильтона-Якоби-Беллмана, которому удовлетворяет расстояние до множества разрешимости. Дальнейшее исследование предполагает рассмотрение задачи с ненулевым управлением, а также обобщение полученных результатов на случай фазового пространства $\mathbb{R}^n$.

Список литературы

1. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх II // Доклады АН СССР. 1967. Т. 175, № 4. С. 910–912.
2. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Математический сборник. 1980. Т.112 (154), № 3 (7). С. 307–330.
3. Куржанский А.Б. Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений // Труды МИАН. 1999. Т. 224. С. 234–248.
4. Kurzhanski A.B., Varaiya P. Dynamics and Control of Trajectory Tubes. Theory and Computation. Birkhäuser. 2014. 445 p.
5. Fleming W.H., Soner H.M. Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. NY: Springer, 1993.
6. Мельникова А.А., Точилин П.А. Об одной задаче вычисления множества разрешимости для линейной системы с неопределенностью // Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59, № 11, С. 1533–1540.
7. Kurzhanski A.B., Vályi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. SCFA. Boston: Birkhäuser, 1997.
8. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
9. Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.