УДК 517.977

КОНФЛИКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГРУПП УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ВО ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ

Е.С. Можегова
Удмуртский государственный университет
Россия, 426034, Ижевск, Университетская ул., 1
E-mail: mozhegovalena@yandex.ru

Н.Н. Петров
Удмуртский государственный университет
Россия, 426034, Ижевск, Университетская ул., 1
E-mail: kma3@list.ru

Ключевые слова: дифференциальная игра, убегающий, преследователь, фазовые ограничения, временные шкалы.

Аннотация: В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается задача простого преследования группой преследователей группы убегающих в заданной временной шкале с равными возможностями всех участников. Дополнительно предполагается, что каждый из убегающих не покидает пределы заданного выпуклого многогранного конуса с непустой внутренностью. Множество управлений каждого участника – шар радиуса единица с центром в начале координат. Целью группы преследователей является поимка всех убегающих, цель убегающих противоположна. Целевые множества – начало координат. Получены условия разрешимости локальной и глобальной задач уклонения, а также оценки сверху и снизу для наименьшего числа убегающих, уклоняющихся от заданного числа преследователей из любых начальных позиций.

1. Введение

В работах Р. Айзекса [1] были заложены основы теории дифференциальных игр преследования-уклонения двух лиц, представляющей собой к настоящему времени фундаментальную содержательную теорию, в которой предложены различные подходы для анализа конфликтных ситуаций. Естественным обобщением данных подходов является ситуация конфликтного взаимодействия группы преследователей и группы убегающих, в которой целью группы преследователей является поимка заданного числа убегающих, а цель группы убегающих противоположна [2, 3].

Одним из направлений исследований задач преследования-уклонения с участием многих лиц является поиск новых классов задач, для анализа которых применимы разработанные ранее методы. В ряде работ было отмечено, что некоторые результаты, полученные отдельно для теорий дифференциальных и разностных уравнений, можно рассматривать с единых позиций, если допустить возможность задания динамических систем на произвольных замкнутых подмножествах, называемых временными шкалами. В работе [5] рассмотрена задача о преследовании двух убегающих, использующих одно и то же управление и не покидающих пределы выпуклого многогранного множества.

В данной работе рассматривается задача конфликтного взаимодействия группы преследователей и группы убегающих во временных шкалах при условии, что убегающие не покидают пределы выпуклого многогранного конуса. Получены условия разрешимости локальной и глобальной задач уклонения, а также оценки сверху и снизу для наименьшего числа убегающих, уклоняющихся от заданного числа преследователей из любых начальных позиций.

2. Постановка задачи

Определение 1 ([4]). *Непустое замкнутое подмножество* $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^1$ *такое, что* $\sup\limits_{t \in \mathbb{T}} t = +\infty$, *называется временной шкалой.*

Определение 2 ([4]). *Функция* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^1$ *называется* Δ*-дифференцируемой в точке* $t \in \mathbb{T}$, *если существует число* $\gamma \in \mathbb{R}^1$, *что для любого* $\varepsilon > 0$ *существует окрестность* W *точки* t *такая, что неравенство*

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - \gamma(\sigma(t) - s)| < \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

справедливо для всех $s \in \mathbb{T} \cap W$, *где* $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} \mid s > t\}$.

Число γ *в этом случае называется* Δ*-производной функции* f *в точке* t. Δ*-производная функции* f *в точке* t *будет обозначаться* $f^{\Delta}(t) = \gamma$.

Пусть задана некоторая временная шкала $\mathbb{T}$, $t_0 \in \mathbb{T}$.

В пространстве $\mathbb{R}^k (k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n + m$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, \ldots, E_m$ с законами движения вида

$$x_i^{\Delta} = u_i, \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad y_j^{\Delta} = v_j, \quad y_j(t_0) = y_j^0, \quad u_i, v_j \in V.$$

Здесь $x_i, y_j, x_i^0, y_j^0, u_i, v_j \in \mathbb{R}^k$, $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, $j \in J = \{1, \ldots, m\}$, $V = \{v \in \mathbb{R}^k : \|v\| \leqslant 1\}$. Считаем, что $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех $i \in I, j \in J$.

Дополнительно предполагается, что каждый убегающий в процессе игры не покидает пределы выпуклого многогранного конуса Ω вида

$$\Omega = \{z \in \mathbb{R}^k \ : \ (p_s, z) \leqslant 0, s = 1, \ldots r\},$$

где $p_1, \ldots, p_r$ – единичные векторы $\mathbb{R}^k$. Считаем, что $\Omega = R^k$ при $r = 0$.

Цель группы преследователей состоит в том, чтобы «переловить» всех убегающих. Цель группы убегающих – помешать этому, то есть предоставить возможность хотя бы одному из убегающих уклониться от встречи.

Пусть $z^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$. Обозначим данную игру через $\Gamma(n, m, z^0, \Omega)$.

Считаем, что убегающие используют кусочно-программные стратегии, преследователи – кусочно-программные контрстратегии.

Определение 3. *В игре $\Gamma(n, m, z^0, \Omega)$ происходит уклонение от встречи, если существуют кусочно-программные стратегии $V_1, \ldots, V_m$ убегающих $E_1, \ldots, E_m$ такие, что для любых траекторий $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ существует номер $l \in J$ такой, что $y_l(t) \neq x_i(t)$ для всех $i \in I, t \in \mathbb{T}$, где $y_l(t)-$ реализовавшаяся в данной ситуации траектория убегающего E_l, причем $y_j(t) \in \Omega$ для всех $j \in J$, $t \in \mathbb{T}$, $t > t_0$.*

Определение 4. *В игре $\Gamma(n, m, z^0, \Omega)$ происходит поимка, если существует момент времени $T > t_0$, $T \in \mathbb{T}$ и для любых стратегий $V_1, \ldots, V_m$ убегающих $E_1, \ldots, E_m$ существуют кусочно-программные контрстратегии $U_1, \ldots, U_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ такие, что найдутся моменты $\tau_1, \ldots, \tau_m \in [t_0, T] \cap \mathbb{T}$ и номера $s_1, \ldots, s_m \in I$, для которых выполнены равенства $y_j(\tau_j) = x_{s_j}(\tau_j)$, $j \in J$, где $x_i(t), i \in I$, $y_j(t), j \in J$ – соответственно реализовавшиеся в данной ситуации траектории игроков $P_i, i \in I$, $E_j, j \in J$.*

3. Основной результат

Введем следующие обозначения $S_r = \{z \in \mathbb{R}^k : \|z\| = r\}$, $D_r^- = \{z \in \mathbb{R}^k : \|z\| \leqslant r\}$, $D_r^+ = \{z \in \mathbb{R}^k : \|z\| > r\}$, $q_j = y_j^0/\|y_j^0\|$.

Лемма 1. *Пусть $x_i^0 \in D^-_{\|y_1^0\|}$ для всех $i \in I$. Тогда в игре $\Gamma(n, m, z^0, \Omega)$ происходит уклонение от встречи.*

Доказательство леммы 1. Из условия леммы следует, что $(x_i^0 - y_1^0, y_1^0) \leqslant 0$ для всех $i \in I$. Задаем управление убегающего E_1, полагая $v_1(t) = y_1^0/\|y_1^0\|$ для всех $t \in \mathbb{T}$. Из [6] следует, что E_1 уклоняется от всех преследователей. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\|y_1^0\| < \|y_2^0\|$ и существует номер $l \in I$ такой, что*

- *$x_i^0 \in D^-_{\|y_1^0\|}$ для всех $i \in I \setminus \{l\}$, $x_l^0 \in D^+_{\|y_2^0\|}$;*
- *проекции y_1^0, y_2^0 на S_1 различны.*

Тогда в игре $\Gamma(n, m, z^0, \Omega)$ происходит уклонение от встречи.

Доказательство леммы 2. Пусть $\omega_1(t) = \|y_1^0\| + t - t_0$, $\omega_2(t) = \|y_2^0\| - (t - t_0)$. Возможны два случая.

1. Существует $\tau \in \mathbb{T}$, для которого $\omega_1(\tau) = \omega_2(\tau)$. Задаем управления убегающих E_1, E_2 следующим образом. Полагаем $v_1(t) = q_1$ для всех $t \in \mathbb{T}$,

$$v_2(t) = \begin{cases} -q_2, \ t \in [t_0, \tau) \cap \mathbb{T}, \\ \ \ q_2, \ t \in [\tau, +\infty) \cap \mathbb{T}. \end{cases}$$

Управления остальных убегающих задаем произвольным образом. Из леммы 1 следует, что $x_i(t) \neq y_1(t)$ для всех $t \in \mathbb{T}$, $i \in I \setminus \{l\}$ и $x_i(t) \neq y_2(t)$ для всех $i \in I$, $t \in [t_0, \tau] \cap \mathbb{T}$. Если преследователь P_l в некоторый момент $T > \tau$ осуществляет поимку $E_1(E_2)$, то $y_1(T), y_2(T), x_l(T) \in S_{\omega_1(T)}$ и поэтому, в силу леммы 1, второй убегающий избежит поимки.

2. Для всех $t \in \mathbb{T}$ имеет место $\omega_1(t) \neq \omega_2(t)$. Тогда существуют $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{T}$, $\tau_1 < \tau_2$, для которых $(\tau_1, \tau_2) \cap \mathbb{T} = \varnothing$ и $\omega_1(\tau_1) < \omega_2(\tau_1)$, $\omega_1(\tau_2) > \omega_2(\tau_2)$. Задаем управления убегающих E_1, E_2 следующим образом.

Если $\omega_1(\tau_2) > \omega_2(\tau_1)$, то полагаем

$$v_2(t) = \begin{cases} -q_2, \ t \in [t_0, \tau_1) \cap \mathbb{T}, \\ q_2 \dfrac{\omega_1(\tau_2) - \omega_2(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1}, \ t = \tau_1, \\ q_2, \ t \in [\tau_2, +\infty) \cap \mathbb{T}. \end{cases}$$

Если же $\omega_1(\tau_2) < \omega_2(\tau_1)$, то полагаем

$$v_2(t) = \begin{cases} -q_2, \ t \in [t_0, \tau_1) \cap \mathbb{T}, \\ -q_2 \dfrac{\omega_2(\tau_1) - \omega_1(\tau_2)}{\tau_2 - \tau_1}, \ t = \tau_1, \\ q_2, \ t \in [\tau_2, +\infty) \cap \mathbb{T}. \end{cases}$$

Управления остальных убегающих задаем произвольным образом. Отметим, что управления убегащих таковы, что $v_1(t), v_2(t) \in V$, $y_1(t), y_2(t) \in \Omega$ для всех $t \in \mathbb{T}$.

Из леммы 1 следует, что преследователи P_i, $i \in I \setminus \{l\}$, не ловят ни одного из убегающих E_1, E_2. На промежутке $[t_0, \tau_1) \cap \mathbb{T}$ преследователь P_l также не ловит ни одного из убегающих E_1, E_2. Если в момент $T \geqslant \tau_1$ преследователь P_l осуществит поимку одного из убегающих E_1, E_2, то в данный момент T преследователь P_l будет находиться на сфере $S_{\|y_1(T)\|}$ и поэтому, в силу леммы 1, не сможет осуществить поимку второго убегающего. Тем самым доказано, что в игре $\Gamma(n, m, z^0, \Omega)$ происходит уклонение от встречи.

Лемма 3. *Пусть существуют множества $I_0 \in I$, $J_0 \in J$, числа $0 < r < R$ такие, что*

- $|I_0| \leqslant |J_0| + 1$;
- $x_i^0 \in D_R^+$ *для всех* $i \in I_0$, $x_i^0 \in D_r^-$ *для всех* $i \notin I_0$;
- $y_j^0 \in D_r^+ \cap D_R^-$;
- *проекции точек* y_j^0, $j \in J_0$, *на* S_1 *попарно различны.*

Тогда в игре $\Gamma(n, m, z^0, \Omega)$ *происходит уклонение от встречи.*

Доказательство леммы 3. Пусть $J_0 = \{1, \ldots, l\}$. Считаем, что $\|y_1^0\| \leqslant \|y_j^0\|$ для всех $j \in J_0$. Управление убегающего E_1 задаем аналогично тому, как в доказательстве леммы 2. Управления каждого из остальных убегающих $E_j, j \in J_0$, задаем аналогично тому, как задавалось управление для убегающего E_2 в доказательстве леммы 2. Построенные управления гарантируют уклонение от встречи в игре $\Gamma(n, m, z^0, \Omega)$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Для любого натурального числа l, любого натурального числа $m \geqslant l \cdot 2^l + 2$, любого вектора z^0 такого, что проекции точек y_j^0, $j \in J$, на S_1 попарно различны, в игре $\Gamma(2^l + 1, m, z^0, \Omega)$ происходит уклонение от встречи.*

Доказательство данной теоремы основано на применении леммы 3 и идеи работы [7].

Определим функцию $f : N \to N$

$$\begin{gathered} f(n) = \min\{m \mid \text{в игре } \Gamma(n, m, z^0, \mathbb{R}^k) \text{ происходит уклонение} \\ \text{от встречи из любых начальных позиций } z^0 \text{ таких, что проекции} \\ \text{точек } y_j^0, j \in J, \text{ на } S_1 \text{ попарно различны}\}. \end{gathered}$$

Обозначим через $\mathrm{Int}A$, $\mathrm{co}A$ соответственно внутренность и выпуклую оболочку множества A.

Теорема 2. [5]. *Пусть в игре* $\Gamma(n, 1, z^0, \mathbb{R}^k)$

$$y_1^0 \in \mathrm{Intco}\{x_1^0, \ldots, x_n^0\}.$$

Тогда в игре $\Gamma(n, 1, z^0, \mathbb{R}^k)$ *происходит поимка.*

Теорема 3. *Существуют константы* $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ *такие, что для всех натуральных* $n, n \neq 1$, *справедливо неравенство.*

$$C_1 n \ln n \leqslant f(n) \leqslant C_2 n \ln n. \tag{1}$$

Правая часть неравенства (1) следует из теоремы 1. Левая часть неравенства (1) доказывается с использованием теоремы 2 и результатов работы [7].

Следствие 1. *Для любого натурального числа* l *существуют натуральные числа* n, m, *существует вектор начальных позиций* z^0 *такие, что* $m - n > l$ *и в игре* $\Gamma(n, m, z^0, \Omega)$ *происходит поимка.*

Доказательство данного следствия повторяет доказательство соответствующего следствия в работе [7].

Следствие 2. *Для любого натурального числа* l *существуют натуральные числа* n, m *такие, что в игре* $\Gamma(n, m, z^0, \Omega)$ *происходит уклонение от встречи для любого* z^0, *в игре* $\Gamma(n + 1, m + l, z^1, \Omega)$ *происходит поимка при некотором* z^1.

Доказательство данного следствия повторяет доказательство соответствующего следствия в работе [7].

4. Заключение

Представлены новые результаты о разрешимости задач уклонения и преследования группой преследователей одного или нескольких убегающих в предположении, что движения участников описываются уравнениями в заданной временной шкале.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-01483-23-00, проект FEWS-2020-0010.

Список литературы

1. Isaacs R. Differential Games. New York: John Wiley and Sons, 1965. 384 p.
2. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992. 383 с.
3. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
4. Guseinov G.S. Integration on time scales // Journal of Math. Anal. Appl. 2003. Vol. 285, No. 1. P. 107–127.
5. Петров Н.Н., Можегова Е.С. Задача простого преследования с фазовыми ограничениями двух скоординированных убегающих во временных шкалах // Математическая теория игр и ее приложения. 2022. Т. 14, № 4. С. 81–95.
6. Петров Н.Н. Задача простого группового преследования с фазовыми ограничениями во временных шкалах // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2020. № 2. С. 249–258.
7. Петров Н.Н., Петров Н.Никандр. О дифференциальной игре «казаки-разбойники» // Дифференц. уравнения. 1983. № 8. С. 1366–1374.