УДК 517.977

ОБ УПРАВЛЕНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМОЙ ДИСКРЕТНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ В УСЛОВИЯХ ПОМЕХИ

К.А. Щелчков

Удмуртский государственный университет

Россия, 426034, Ижевск, Университетская ул., 1

E-mail: incognitobox@mail.ru

Ключевые слова: дифференциальная игра, нелинейные динамические системы, преследователь, стабилизация, убегающий, помеха.

Аннотация: Рассматривается задача стабилизации в ноль в условиях воздействия помехи в терминах дифференциальной игры преследования. Динамика описывается нелинейной автономной системой дифференциальных уравнений. Множество значений управлений преследователя является конечным, убегающего (помехи) – компакт. Целью управления, то есть целью преследователя, является приведение, в рамках конечного времени, траектории в любую наперед заданную окрестность нуля вне зависимости от действий помехи. Для построения управления преследователю известны только фазовые координаты в некоторые дискретные моменты времени и неизвестен выбор управления помехи. В работе получены условия существования окрестности нуля, из каждой точки которой происходит поимка в указанном смысле. Выигрышное управление строится конструктивно и имеет дополнительное свойство, указанное в теореме. Кроме того, получена оценка времени поимки, которая является неуменьшаемой в некотором смысле.

1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$, $k \geqslant 2$, рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(x_0)$ двух лиц: преследователя P и убегающего E. Динамика игры описывается системой дифференциальных уравнений с разрывной правой частью

$$\dot{x} = f(x, u, v), \quad u \in U, \quad v \in V, \quad x(0) = x_0,$$

где $x \in \mathbb{R}^k$ – фазовый вектор, u и v – управляющие воздействия; $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$, $u_i \in \mathbb{R}^l$, $i = 1, \ldots, m$. Множество $V \subset \mathbb{R}^s$ – компакт. Функция $f : \mathbb{R}^k \times U \times V \to \mathbb{R}^k$ – для каждого $u \in U$ непрерывна по совокупности переменных x, v и удовлетворяет по x условию Липшица с постоянной, не зависящей от v. То есть существует положительное число L такое, что

$$\|f(x_1, u_i, v) - f(x_2, u_i, v)\| \leqslant L\|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^k, \quad v \in V, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Здесь и всюду далее норма считается евклидовой.

Под разбиением σ промежутка $[0, T]$ будем понимать конечное разбиение $\{\tau_q\}_{q=0}^{\eta}$, где $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_\eta = T$.

Определение 1. *Кусочно-постоянной стратегией W преследователя P на промежутке $[0, T]$ называется пара (σ, W_σ), где σ – разбиение промежутка $[0, T]$, а W_σ – семейство отображений $d_r, r = 0, 1, \ldots, \eta - 1$, ставящих в соответствие величинам $(\tau_r, x(\tau_r))$ постоянное управление $\overline{u}_r(t) \equiv \overline{u}_r \in U$, $t \in [\tau_r, \tau_{r+1})$.*

Под управлением убегающего будем понимать произвольную измеримую функцию $v : [0, \infty) \to V$. Для построения управления убегающему E в начальный момент времени известно начальное положение x_0 и выбранная стратегия W преследователя P. Кроме того, игрокам известны динамика системы, то есть функция f, и множества U, V.

Определение 2. *В игре $\Gamma(x_0)$ происходит ε-поимка, если существует $T > 0$ такое, что для любого $\hat{\varepsilon} > 0$ существует кусочно-постоянная стратегия W преследователя P на промежутке $[0, T]$ такая, что для любого допустимого управления убегающего $v(\cdot)$ выполнено неравенство $\|x(\tau)\| < \hat{\varepsilon}$ для некоторого $\tau \in [0, T]$.*

Целью преследователя является осуществление ε-поимки. Цель убегающего – воспрепятствовать этому.

Отметим, что для любых $u \in U$, измеримой функции $v : [0, \infty) \to V$, $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^k$ справедливо неравенство

$$\|f(x, u, v(t))\| = \|f(x, u, v(t)) - f(0, u, v(t)) + f(0, u, v(t))\| \leqslant$$

$$\leqslant L\|x\| + \|f(0, u, v(t))\| \leqslant L\|x\| + B,$$

для некторого положительного B. Такое B существует в силу непрерывности функции f по v, компактности V и конечности U.

Следовательно, для любого $T > 0$ и любого разбиения σ промежутка $[0, T]$ на каждом интервале разбиения выполняются условия Каратеодори существования, единственности и продолжимости вправо решения задачи Коши. Таким образом, постановка задачи корректна.

2. Основной результат

Введем следующие обозначения: $D_\varepsilon(x)$ – замкнутый шар радиуса ε с центром в точке x; $\langle a, b \rangle$ – скалярное произведение векторов a, b.

Теорема 1. *Пусть*

$$\min_{p \in \mathbb{R}^k, \|p\|=1} \max_{u \in U} \min_{v \in V} \langle f(0, u, v), p \rangle > 0.$$

Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любой точки $x_0 \in D_{\varepsilon_0}(0)$ в игре $\Gamma(x_0)$ происходит ε-поимка. Кроме того, преследователю для построении стратегии достаточно использовать разбиение временного интервала с фиксированным шагом.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия Теоремы 1 и $x_0 \in D_{\varepsilon_0}(0)$. Тогда ε-поимка происходит за время $T(x_0) = \|x_0\|/\alpha(\|x_0\|)$, где*

$$\alpha(r) = \min_{x \in D_r(0)} \min_{p \in \mathbb{R}^k, \|p\|=1} \max_{u \in U} \min_{v \in V} \langle f(x, u, v), p \rangle.$$

Пример 1. *Покажем, что существуют системы и начальные положения, для которых ε-поимка не происходит за любое время $T < \|x_0\|/\alpha(\|x_0\|)$.*

Рассмотрим случай $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 + v_1, \\ \dot{x}_2 = u_2 + v_2, \end{cases} \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.5 \\ -1.5 \end{pmatrix} \right\}, \quad V = [-1,1] \times [-1,1], \quad v(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \, t \geqslant 0.$$

Отметим, что здесь, в силу доказательства Теоремы 1, ε-поимка будет происходить из любого начального положения $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Для данного примера

$$\alpha(\|x_0\|) = 0.5, \quad T(x_0) = 2.$$

Оценим $x_2(t)$:

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t (u_2(s) + 1)\, ds \geqslant 1 + \int_0^t (-1.5 + 1)\, ds = 1 - 0.5t.$$

Отсюда, если $T \in [0, 2)$, то $x(T) \notin O_{1-0.5T}(0)$. Следовательно, ε-поимка не происходит за любое время $T < 2 = T(x_0)$.

3. Заключение

Рассмотрена задача приведения системы в любую наперед заданную окрестность нуля в условиях воздействия помехи в терминах дифференциальной игры преследования, в которой динамика описывается нелинейной автономной системой дифференциальных уравнений. Управление происходит на конечном интервале, в рамках которого преследователю требуется обеспечить возможность приведения системы в любую наперед заданную окрестность нуля вне зависимости от действий помехи. Для построения управления преследователю известны только фазовые координаты в некоторые дискретные моменты времени и неизвестен выбор управления помехи. Получены условия существования окрестности нуля, из каждой точки которой происходит поимка в указанном смысле. Выигрышное управление строится конструктивно и может быть построено с фиксированным шагом разбиения временного интервала. Кроме того, получена оценка времени поимки, которая является неуменьшаемой в следующем смысле: существуют системы, удовлетворяющие постановке задачи, и ненулевые начальные положения, для которых поимка в указанном смысле не происходит за любое время, меньшее оценки.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-01032, https://rscf.ru/project/23-71-01032/.

Список литературы

1. Петров Н.Н. Об управляемости автономных систем // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4, № 4. С. 606–617.

2. Петров Н.Н. Локальная управляемость автономных систем // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4, № 7. С. 1218–1232.
3. Щелчков К.А. Об одной нелинейной задаче преследования с дискретным управлением и неполной информацией // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28, № 1. С. 111–118.
4. Shchelchkov K.A. Estimate of the Capture Time and Construction of the Pursuer's Strategy in a Nonlinear Two-Person Differential Game // Differential Equations. 2022. Vol. 58, No. 2. P. 264–274.
5. Shchelchkov K. ε-Capture in Nonlinear Differential Games Described by System of Order Two // Dynamic Games and Applications. 2022. Vol. 12, No. 2. P. 662–676.