УДК 519.714+681.5.013

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ШУМАМИ

А.В. Юрченков
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: yurchenkov@ipu.ru

А.Ю. Кустов
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: kustov@ipu.ru

Ключевые слова: анизотропийная теория, анизотропийная норма, средняя анизотропия, мультипликативные шумы, внешнее возмущение.

Аннотация: В работе рассмотрена линейная стационарная модель системы с мультипликативными шумами в пространстве состояний. Внешнее возмущение, действующее на систему, принадлежит множеству стационарных гауссовских последовательностей с фиксированной верхней границей уровня средней анизотропии. Для указанного класса систем предлагается построение управления, минимизирующего анизотропийную норму замкнутой системы на основе динамического регулятора. Задача поиска матриц этого регулятора в пространстве состояний с помощью специальной линеаризующей замены сведена к задаче выпуклой оптимизации.

1. Введение

Подавление внешних возмущений – одна из наиболее важных проблем в теории управления. Некоторые из методов направлены на подавление возмущений с известными стохастическими характеристиками ($\mathcal{H}_2$-теория). С другой стороны, $\mathcal{H}_\infty$ подход [1] предлагает парировать возможный «наихудший» случай воздействия. Однако $\mathcal{H}_\infty$-управление обладает чрезмерным консерватизмом, а $\mathcal{H}_2$ оптимальные регуляторы чувствительны к малым изменениям параметров. Хотя некоторые исследования, объединяющие эти два подхода, были опубликованы [2–5], но при этом $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-теории в некотором смысле принципиально различны.

Замечательная теория, разработанная И.Г. Владимировым [6, 7], объединяет как $\mathcal{H}_2$, так и $\mathcal{H}_\infty$ подходы в качестве предельных случаев. Анизотропийная теория предлагает стохастический подход к теории управления, основанный на терминах, заимствованных из теории информации. Центральным понятием этой теории является анизотропия случайного вектора, которая первоначально рассматривалась как относительная энтропия функции распределения случайного вектора, нормализованной на единичной сфере, относительно равномерного распределения. Позже эта концепция была изменена [8]. В большинстве работ анизотропия случайного вектора понимается как отклонение Кульбака-Лейблера между двумя плотностями распределения, одна из которых принадлежит фиксированному случайному вектору, а вторая принадлежит гауссову семейству случайных векторов с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей. Рассматриваемая при этом анизотропная норма системы является частным случаем индуцированной стохастической нормы.

Система с мультипликативными шумами является важным случаем стохастических систем. Они описывают механические, гибридные, биологические системы, финансовые модели и многие другие объекты и процессы. Анализ в рамках анизотропийной теории для нестационарных систем был представлен в [9], задача оценивания была решена в [10], при этом настройка матрицы смежности для сети оценивателей может быть настроена согласно алгоритму, предложенному в [11]. Стационарным системам посвящена работа [12]. В данной работе рассматривается динамический регулятор и формулируется задача выпуклой оптимизации для вычисления матриц регулятора. Линеаризация матричных неравенств выполняется аналогично той, которая описана в [13].

2. Предварительные сведения

Анизотропия случайного m-мерного вектора W с функцией плотности распределения вероятностей (п.р.в.) $f(x)$ определяется в виде

$$\mathbf{A}(W) = \min_{\lambda>0} \mathbf{D}(f||p_\lambda),$$

где $\mathbf{D}(f||p_\lambda) = \mathbf{E}\left[\ln f/p_\lambda\right]$ – уклонение Кульбака-Лейблера между f и гауссовской п.р.в. $p_\lambda(x) = (2\pi\lambda)^{-m/2}\exp\left(-\|x\|^2/(2\lambda)\right)$ (более детальное описание можно найти в работе [8]), $\mathbf{E}(\cdot)$ – оператор матожидания.

Рассмотрим расширенный вектор $W_{s:t} = (w_s^{\mathrm{T}}, w_{s+1}^{\mathrm{T}}, \ldots, w_t^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, $s \leqslant t$. Средняя анизотропия последовательности случайных гауссовских векторов $\{w_k\}$ определяется в работе [7] в следующем виде:

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N\to\infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N}. \quad (1)$$

Анизотропийная норма системы F определена через следующее выражение:

$$\sup_{\mathbf{A}(W)\leqslant a} Q(Z,W) = |\!|\!|F|\!|\!|_a,$$

где $Q(Z,W) = \sqrt{\mathbf{E}(|FW|^2)/\mathbf{E}(|W|^2)}$ – средне квадратичный коэффициент усиления при входе W [14].

3. Постановка задачи

Рассмотрим стационарную систему в пространстве состсояний:

$$
\begin{aligned}
&x(k+1) = (A_0 + \sum_{i=1}^{n} \mu_i(k)A_i)x(k) + B_1 w(k) + B_2 u(k),\\
&z(k) = C_1 x(k) + D_{12} u(k),\\
&y(k) = C_2 x(k) + D_{21} w(k),
\end{aligned} \tag{2}
$$

с нулевыми начальными условиями $x(0) = 0$. Здесь $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ – вектор состояния, $w(k) \in \mathbb{R}^{m_w}$ – внешнее возмущение из класса окрашенных последовательностей случайных векторов с известным ограничением на среднюю анизотропию $a \geqslant 0$, $z(k) \in \mathbb{R}^{p_z}$ – управляемый выход, $y(k) \in \mathbb{R}^{p_y}$ – измеряемый выход. Система (2) удовлетворяет условию управляемости. Матрицы A_i известны. Случайные величины $\mu_i(k)$, $0 = 1, \ldots, n$ взаимно независимы между собой и внешним возмущением.

Задача состоит в поиске матриц для формирования динамического управления:

$$
\begin{aligned}
&\xi(k+1) = A_c \xi(k) + B_c y(k),\\
&u(k) = C_c \xi(k) + D_c y(k),
\end{aligned} \tag{3}
$$

где $\xi(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ обозначает внутреннее состояние, при котором будет гарантирована оценка сверху для анизотропийной нормы замкнутой системы числом $\gamma > 0$.

4. Основной результат

Сформулируем утверждение, являющееся решением поставленной задачи.

Теорема 1. *Для линейного дискретного стационарного объекта управления (2) при внешнем возмущении $\{w(k)\}$ с ограниченным уровнем средней анизотропии $a \geqslant 0$ замкнутая динамическим регулятором (3) система будет иметь ограниченную числом γ анизотропийную норму, если следующая система неравенств*

$$
\left[\begin{array}{ccccc}
-\Pi_{11} & * & * & * & \\
-I_{n_x} & -\Phi_{11} & * & * & \\
0 & 0 & -\eta I_{m_w} & * & \\
A_0\Pi_{11} + B_2\mathbf{C} & A_0 + B_2\mathbf{D}C_2 & B_1 + B_2\mathbf{D}D_{21} & -\Pi_{11} & \\
\mathbf{A} & \Phi_{11}A_0 + \mathbf{B}C_2 & \Phi_{11}B_1 + \mathbf{B}D_{21} & -I_{n_x} & \\
A_1\Pi_{11} & A_1 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
A_n\Pi_{11} & A_n & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \\
C_1\Pi_{11} + D_{12}\mathbf{C} & C_1 + D_{12}\mathbf{D}C_2 & D_{12}\mathbf{D}D_{21} & 0 &
\end{array}\right.
$$

$$
(4) \qquad \left.\begin{matrix}
 & * & * & * & \cdots & * & * & * \\
 & * & * & * & \cdots & * & * & * \\
 & * & * & * & \cdots & * & * & * \\
 & * & * & * & \cdots & * & * & * \\
 & -\Phi_{11} & * & * & \cdots & * & * & * \\
\cdots & 0 & -\Pi_{11} & * & \cdots & * & * & * \\
 & 0 & -\Pi_{12}^{\mathrm{T}} & -\Pi_{22} & \cdots & * & * & * \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\Pi_{11} & * & * \\
 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\Pi_{12}^{\mathrm{T}} & -\Pi_{22} & * \\
 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -I_{p_z}
\end{matrix}\right] \prec 0,
$$

$$
(5) \qquad \begin{bmatrix}
\Psi - \eta I_{m_w} & * & * & * \\
B_1 + B_2 \mathbf{D} D_{21} & -\Pi_{11} & * & * \\
\Phi_{11} B_1 + \mathbf{B} D_{21} & -I_{n_x} & -\Phi_{11} & * \\
D_{12} \mathbf{D} D_{21} & 0 & 0 & -I_{p_z}
\end{bmatrix} \prec 0,
$$

$$
(6) \qquad \eta > \gamma^2, \quad \Pi_{11} \succ 0, \quad \Phi_{11} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} \Pi_{11} & I_{n_x} \\ I_{n_x} & \Phi_{11} \end{bmatrix} \succ 0,
$$

$$
(7) \qquad \ln\det\Psi \geqslant 2a + m_w \ln(\eta - \gamma^2),
$$

разрешима относительно $\eta > 0$, $\Psi = \Psi^{\mathrm{T}} \succ 0$, $\Phi_{11} = \Phi_{11}^{\mathrm{T}} \succ 0$, $\Pi_{11} = \Pi_{11}^{\mathrm{T}} \succ 0$, $\Pi_{22} = \Pi_{22}^{\mathrm{T}} \succ 0$, Π_{12}, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$. *При этом матрицы регулятора* (3) *связаны с решением системы* (4)-(7) *следующим образом:*

$$
(8) \qquad \begin{aligned}
A_c &= \Phi_{12}^{-1}(\mathbf{A} + \Phi_{11} B_2 \mathbf{D} C_2 \Pi_{11} \\
&\qquad - \mathbf{B} C_2 \Pi_{11} - \Phi_{11} B_2 \mathbf{C} - \Phi_{11} A_0 \Pi_{11}) \Pi_{12}^{-\mathrm{T}}, \\
B_c &= \Phi_{12}^{-1}(\mathbf{B} - \Phi_{11} B_2 D_c), \\
C_c &= (\mathbf{C} - D_c C_2 \Phi_{11}) \Pi_{12}^{-T}, \\
D_c &= \mathbf{D}.
\end{aligned}
$$

Также следует принимать во внимание следующие условия:

$$
(9) \qquad \Phi_{12} = (I_{n_x} - \Phi_{11}\Pi_{11})\Pi_{12}^{-\mathrm{T}},
$$

и матрицы Φ_{12}, Π_{12} *являются обратимыми.*

На основе теоремы 1 можно поставить следующую задачу выпуклой оптимизации: $\gamma^2 \underset{(4)-(7)}{\longrightarrow} \min$, решив которую можно найти минимальное пороговое значение γ для верхней границы анизотропийной нормы системы (2), замкнутой регулятором (3).

5. Заключение

В работе получено решение задачи поиска динамического регулятора для стационарной системы с мультипликативными шумами. При выводе достаточных условий ограниченности анизотропийной нормы замкнутой системы была использована взаимно однозначная замена линеаризующая замена переменных, позволяющая свести поиск матриц регулятора в пространстве состояний к решению задачи выпуклой оптимизации.

Список литературы

1. Zames G. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses // IEEE Transactions on Automatic Control. 1981. Vol. AC-26. P. 301-320.
2. Haddad W.M., Bernstein D.S.,Mustafa D. Mixed-norm $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ regulation and estimation: the discrete-time case // System Control Letters. 1991. Vol. 16, No. 4. P. 235-247.
3. Zhou K., Glover K., Bodenheimer B., Doyle J. Mixed $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ performance objectives I: Robust performance analysis // IEEE Transactions on Automatic Control. 1994. Vol. AC-38. P. 1564-1574.
4. Khargonekar P.P., Rotea M.A., Baeyens E. Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ filtering // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 1006. Vol. 6. P. 313-330.
5. Scherer C.W. Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control // Springer. 1995. P. 173-216.
6. Semyonov A.V., Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P. Stochastic Approach to $\mathcal{H}_\infty$–optimization // Proceedings of the 33th Conference on Decision and Control. 1994. P. 2249-2250.
7. Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semyonov A.V. Anisotropy of Signals and Entropy of Linear Stationary Systems // Doklady Mathematics. 1995. Vol. 51, No. 3. P. 388-390.
8. Vladimirov I.G., Diamond P.,Kloeden P., Anisotropy–based Robust Performance Analysis of Finite Horizon Linear Discrete Time Varying Systems // Autom. Remote Control. 2006. Vol. 67, No. 7. P. 1265-1282.
9. Belov I.R., Yurchenkov A.V., Kustov A.Yu. Anisotropy-Based Bounded Real Lemma for Multiplicative Noise Systems: the Finite Horizon Case // Proceedings of the 27th Med. Conf. on Contr. and Aut., 2019. P. 148-152.
10. Yurchenkov A.V., Kustov A.Yu., Timin V.N. The sensor network estimation with dropouts: Anisotropy-based approach // Automatica. 2023. Vol. 151. P. 110924.
11. Yurchenkov A.V. Default Sensor Network Setup based on the Anisotropic Criterion // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences. 2023. Vol. 106, No. 1. P. 45-63.
12. Kustov A.Yu., Timin V.N., Yurchenkov A.V. Boundedness Condition for Anisotropic Norm of Linear Discrete Time-invariant Systems with Multiplicative Noise // Journal of Physics: Conference Series. Bristol, United Kingdom: Institute of Physics and IOP Publishing Limited. 2021. Vol. 1864. P. 012068.
13. Gahinet P. Explicit controller formulas for LMI-based $\mathcal{H}_\infty$ synthesis // Automatica. 1996. Vol. 32. P. 1007-1014.
14. I.G. Vladimirov, A.P. Kurdjukov, A.V. Semyonov, On Computing the Anisotropic Norm of Linear Discrete-time-invariant Systems // IFAC Proceedings Volumes. 1996. Vol. 29, No. 1. P. 3057-3062.