УДК 519.854.2

О полиномиально разрешимых областях задачи минимизации максимального временного смещения для одного прибора

Лутовинова Н.А.
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: lutovinova.n.al@gmail.com

Правдивец Н.А.
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: pravdivets@ipu.ru

Лазарев А.А.
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: jobmath@mail.ru

Ключевые слова: теория расписаний, временное смещение, разрешимые области, NP-трудность.

Аннотация: В настоящей работе исследуются полиномиально разрешимые случаи задачи $1|r_j|L_{\max}$. Задача является NP-трудной, но существуют полиномиально разрешимые случаи. Все примеры задачи, с точки зрения сложности, могут быть рассмотрены как точки на поверхности единичной сферы в $3n$-мерном пространстве примеров. Полиномиально разрешимые случаи лежат в определенных областях на поверхности данной единичной сферы. Целью исследования является определение соотношения разрешимых областей к общей площади сферы.

1. Введение

Задача $1|r_j|L_{\max}$ является классической задачей теории расписаний для одного прибора. Ее можно кратко сформулировать следующим образом. Задано множество из n требований $N = \{j_1, ..., j_n\}$, которые нужно выполнить на одном приборе. Для каждого требования известны его момент поступления r_j, продолжительность выполнения p_j и директивный срок d_j. Прерывания в выполнении требований и одновременное обслуживание более одного требования не допускаются. Расписание π выполнения требований однозначно определяется порядком их выполнения (т.е. любое расписание является перестановкой требований). Данная задача является NP-трудной в сильном смысле, что было доказано в [1]. Однако, существуют частные случаи задачи, для решения которых могут быть использованы алгоритмы полиномиальной трудоемкости.

Поскольку любой пример задачи характеризуется набором трех характеристик для каждого из n требований, то он может быть рассмотрен как точка в $3n$-мерном пространстве примеров. Причем с точки зрения определения расписания (перестановки) выполнения требований имеет значение только направление вектора из начала координат в точку, соответствующую решаемому примеру. Масштабирование данного вектора при неизменном направлении меняет значение целевой функции, но не оказывает влияния на оптимальную перестановку и на процесс решения [2]. В связи с этим будут рассматриваться только точки, расположенные на поверхности единичной сферы в $3n$-мерном пространстве параметров задачи. С точки зрения физического смысла задачи, случаи когда $r_j < 0$ могут быть сведены к случаю $r_j \geqslant 0$. Если предполагается, что прибор готов к обслуживанию требований в момент времени 0, то поступление требований до готовности прибора никак не влияет на возможность их выполнения и отрицательные моменты поступления требований можно приравнять нулю без влияния на решение примера. Если предполагается, что до момента времени 0 прибор может выполнять требования, то пример с отрицательными моментами поступления требований сводится к примеру с $r_j \geqslant 0$ путем сдвига всей временной оси на значение, соответствующее минимальному из моментов поступления требований. Отрицательные продолжительности выполнения требований лишены всякого смысла: если прибор выполняет какое-то требование, время не может пойти вспять. Отрицательные директивные сроки могут иметь место (в том числе при $d_j < r_j$, когда выполнение требования заведомо будет просрочено), однако любой пример с отрицательными директивными сроками также может быть сведен к примеру с неотрицательными путем сдвига временной оси на значение $\min_{j \in N}\{d_j\}$. Учитывая изложенное, далее будут рассматриваться только примеры задачи $1|r_j|L_{\max}$ с неотрицательными параметрами: $r_i \geqslant 0,\ p_i \geqslant 0,\ d_i \geqslant 0,\ \forall j \in N$. Часть $3n$-мерной сферы, для которой выполняются данные условия, будем называть «положительной» частью сферы.

Задачей данной работы является исследование доли полиномиально разрешимых примеров среди общего числа примеров задачи. Для этого предлагается посчитать соотношение суммарной площади всех полиномиально разрешимых областей к общей площади пространства примеров (единичной сферы).

2. Разрешимые области

В этом разделе приведены известные полиномиально разрешимые области пространства примеров. Следует заметить, что любые два примера задачи, отличающиеся только перестановкой требований (но с идентичными характеристиками требований), можно считать одинаковыми, т.к. порядок поступления требований задается временем их поступления, а не порядком записи в условии задачи. В связи с этим в данной работе будем приводить сортировку требований в виде, удобном для подачи материала, подразумевая что любой пример с иной сортировкой требований во входных данных может быть легко преобразован к данному виду.

1. Область Лазарева $d_1 \leqslant d_2 \leqslant ... \leqslant d_n$, $d_1 - r_1 - p_1 \geqslant d_2 - r_2 - p_2 \geqslant ... \geqslant d_n - r_n - p_n$ [3];
2. Область Джексона $r_j = \text{const}$, $j \in N$ [4];
3. Область Хогевена $d_j - p_j \leqslant r_j + \beta \leqslant d_j,\ j \in N$ [5];
4. Область Симонс $p_j = p,\ j \in N$ [6];
5. Область Вакхании $p_j = p$ or $p_j = 2p,\ j \in N$ [7];
6. $d_j = d,\ j \in N$ [8];
7. $r_1 \leqslant r_2 \leqslant ... \leqslant r_n;\ d_1 \leqslant d_2 \leqslant ... \leqslant d_n$ [8];
8. $d_j = r_j + p_j + Const,\ \ j \in N$ [8];
9. $r_1 \geqslant r_2 \geqslant ... \geqslant r_n$, $d_1 \leqslant d_2 \leqslant ... \leqslant d_n$; $d_k - p_k \leqslant d_m$, $k = 2, \ldots, n$, $m = 1, \ldots, k-1$ [8];
10. $d_1 \leqslant d_2 \leqslant ... \leqslant d_n;\ \ d_1 - \alpha \cdot p_1 - \beta \cdot r_1 \geqslant ... \geqslant d_n - \alpha \cdot p_n - \beta \cdot r_n;$
$\alpha \in [0,1];\ \beta \in [0;+\infty)$ [9].

Заметим, что область Лазарева является подмножеством области 10 (при $\alpha = \beta = 1$), а область 8 – подмножеством области Хогевена при $Const \leqslant \beta$ и области Лазарева.

3. Площадь разрешимых областей

Под площадью в $\mathbb{R}^m$ будем понимать $(m-1)$-мерный объем.

Определение 1. *k-мерным объемом заданной в параметрическом виде $D \ni t \mapsto \boldsymbol{r}(t) \in P$ гладкой k-мерной поверхности P, лежащей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, называется величина*

$$V_k(P) = \int\limits_D \sqrt{det(\langle \dot{\boldsymbol{r}}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_j \rangle)(t)}dt^1...dt^k.$$

Обозначим за $S_{3n-1} = \dfrac{3n\pi^{\frac{3n}{2}}}{\Gamma(\frac{3n}{2}+1)}$ площадь гиперсферы с радиусом 1 в $3n$-мерном пространстве. И рассмотрим “положительную” часть этой сферы при $r_i, d_i, p_i \geqslant 0,\ \forall i = 1, \ldots, n$, ее площадь S_+ будет равна $S_+ = \frac{S_{3n-1}}{2^{3n}}$.

Утверждение 1. *Площадь следующих областей равна 0:*

- *случай Джексона: $r_1 = r_2 = ... = r_n$ при $n \geqslant 2$;*
- *случай Симонс: $p_1 = p_2 = ... = p_n$ при $n \geqslant 2$;*
- *случай $d_1 = d_2 = ... = d_n$ при $n \geqslant 2$;*
- *случай Вакхании: $\forall i = 1, ..., n$ $p_i = p$ или $p_i = 2p$ при $n \geqslant 3$;*

Это утверждение следует из того, что размерность этих областей будет строго меньше $(n-1)$, а, значит, и $(n-1)$-мерный объем будет равен 0. Несложно проверить, что в таком случае $det(\langle \dot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_j \rangle)(t) = 0$.

Утверждение 2. *Рассмотрим «положительную» часть гиперсферы.*

- *площадь области* $\{d_1 \leqslant d_2 \leqslant ... \leqslant d_n\}$ *равна* $S_{ord} = \frac{1}{n!} S_+$
- *площадь области* $\{d_1 \leqslant d_2 \leqslant ... \leqslant d_n;\ r_1 \leqslant r_2 \leqslant ... \leqslant r_n\}$ *равна*

$$S = \frac{1}{(n!)^2} S_+ = \frac{S_{ord}}{n!}$$

Доказательство. Заметим, что «положительная» часть гиперсферы разбивается на $n!$ областей вида $d_{i_1} \leqslant ... \leqslant d_{i_n}$. Любая точка принадлежит какой-то из таких областей, области пересекаются по множествам площади 0. В силу симметрии площади этих областей должны быть равны.

Докажем это. Для «положительной» части гиперсферы $x_1^2 + \ldots + x_{3n}^2 = 1$ рассмотрим следующую параметризацию

$$\mathbf{r}(x_1, \ldots, x_{3n-1}) = (x_1, \ldots, x_{3n-1}, \sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_{3n-1}^2}).$$

Тогда $\dot{\mathbf{r}}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0, \dfrac{-x_i}{\sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_{3n-1}^2}})$ (где 1 стоит на i месте).

Получаем: $\langle \dot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_j \rangle = \delta_{ij} + \dfrac{x_i x_j}{1 - x_1^2 - \ldots - x_{3n-1}^2}$, где δ_{ij} - символ Кронекера.

Обозначим за $f(x_1, \ldots, x_{3n-1}) = det(\langle \dot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_j \rangle) =$

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{x_1^2}{1-x_1^2-\ldots-x_{3n-1}^2} & \frac{x_1x_2}{1-x_1^2-\ldots-x_{3n-1}^2} & \cdots & \frac{x_1x_{3n-1}}{1-x_1^2-\ldots-x_{3n-1}^2} \\ \frac{x_2x_1}{1-x_1^2-\ldots-x_{3n-1}^2} & 1 + \frac{x_2^2}{1-x_1^2-\ldots-x_{3n-1}^2} & \cdots & \frac{x_2x_{3n-1}}{1-x_1^2-\ldots-x_{3n-1}^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{x_{3n-1}x_1}{1-x_1^2-\ldots-x_{3n-1}^2} & \frac{x_{3n-1}x_2}{1-x_1^2-\ldots-x_{3n-1}^2} & \cdots & \frac{x_{3n-1}^2}{1-x_1^2-\ldots-x_{3n-1}^2} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{(1-x_1^2-\ldots-x_{3n-1}^2)^{3n-1}} \begin{vmatrix} 1 - x_2^2 - \ldots - x_{3n-1}^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_{3n-1} \\ x_2x_1 & 1 - x_1^2 - x_3^2 - \ldots & \cdots & x_2x_{3n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{3n-1}x_1 & x_{3n-1}x_2 & \cdots & 1 - x_1^2 - \ldots - x_{3n-2}^2 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что f симметрична относительно любой транспозиции переменных, то есть $f(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) = f(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots)$, поскольку достаточно поменять местами i и j строчки и i и j столбцы местами в соответствующем определителе.

Соответственно, в силу симметрии областей вида $\{d_{i_1} \leqslant \ldots \leqslant d_{i_n}\}$ и симметрии подынтегральной функции f, получаем, что $V_{3n-1}(\{d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_n\}) = V_{3n-1}(\{d_{\pi(1)} \leqslant \ldots \leqslant d_{\pi(n)}\})$ для любой перестановки π.

Отсюда следует, что $S_{ord} = \frac{1}{n!} S_+$.

Аналогично можно получить, что площадь области $\{d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n;\ r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_n\}$ равна $\frac{S_{ord}}{n!}$, так как условия на r_j и на d_i независимы.

Замечание 1. *Область* $r_1 \leqslant r_2 \leqslant ... \leqslant r_n$, $d_1 \geqslant d_2 \geqslant ... \geqslant d_n$, $d_k - p_k \leqslant d_m$, *при* $k = 1, \dots, n-1$, $m = k+1, \dots, n$ *имеет площадь не превышающую* $\frac{1}{(n!)^2} S_+ = \frac{S_{ord}}{n!}$.

4. Заключение

Для части известных полиномиально разрешимых областей была посчитана их площадь. Сумма площадей этих областей не превосходит $\frac{2}{n!}$ площади всех уникальных примеров. Остаются две нетривиальные области $\{d_j - p_j \leqslant r_j + \beta \leqslant d_j,\ j \in N\}$ и $\{d_1 \leqslant d_2 \leqslant ... \leqslant d_n;\ \ d_1 - \alpha \cdot p_1 - \beta \cdot r_1 \geqslant ... \geqslant d_n - \alpha \cdot p_n - \beta \cdot r_n$ при $\alpha \in [0, 1]$; $\beta \in [0; +\infty)\}$, площадь которых предстоит оценить в рамках дальнейших исследований.

Список литературы

1. Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G., Brucker P. Complexity of Machine Scheduling Problems // Annals of Discrete Mathematics. 1977. Vol. 1. P. 343–362.
2. Lazarev A., Pravdivets N., Grishin E., Galakhov S. Instances generation for a single machine scheduling problem // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1864, No. 1. P. 012057.
3. Лазарев А.А. Эффективный алгоритм для задачи минимизации максимальной задержки // Теория управления и методы оптимизации. Деп. в ВИНИТИ. 1983. № 6633-83. С. 14-21.
4. Jackson J.R. Scheduling a production line to minimize maximum tardiness. Los Angeles: Office of Technical Services, 1955. 72 p.
5. Hoogeveen J. A. Minimizing maximum promptness and maximum lateness on a single machine // Mathematics of Operations Research. 1996. Vol. 21. P. 100-114.
6. Simons B.B. A fast algorithm for single processor scheduling // Proceedings of of the 19th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). New York: Ann Arbor Michigan, 1978. P. 246-252.
7. Vakhania N., Hernandez J.A., Werner F. Scheduling unrelated machines with two types of jobs // International Journal of Production Research. 2014. Vol. 52, No. 13. P. 3793–3801.
8. Лазарев А.А. Теория расписаний. Методы и алгоритмы. М.: ИПУ РАН, 2019. 408 с.
9. Lazarev A.A., Arkhipov D.I. Minimization of the Maximal Lateness for a Single Machine // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77, No. 4. P. 656–671.