УДК 519.853.6

L-АДАПТИВНЫЙ КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД НЬЮТОНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕДООПРЕДЕЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

А.А. Тремба
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: atremba@ipu.ru

Ключевые слова: комбинированный метод Ньютона, система недоопределенных уравнений, робастный алгоритм, выбор длины шага.

Аннотация: Для решения недоопределенных систем уравнений в [1] были предложены варианты комбинированного метод Ньютона с выбором длины шага в зависимости от параметров задачи. Также были предложены адаптивные варианты этих методов, один из них сформулирован и исследован на примерах в данной работе. В методе подбирается параметр, оценивающий константу Липшица производной. Приведено сравнение с альтернативным способом выбора шага типа Армихо. При незначительном ухудшении сходимости, предложенный метод сходится быстрее.

1. Введение

Рассмотрим недоопределенную систему уравнений, заданную векторной функцией $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ m \leqslant n$:

$$F(x) = 0.$$

Пусть функция F дифференцируемая с матрицей Якоби $F'(x) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Тогда для решения системы можно использовать метод Ньютона в форме

$$\begin{aligned} p_k &= \arg \min_{F'(x_k)p=F(x_k)} \|p\|, \\ x_{k+1} &= x_k - \alpha_k p_k, \end{aligned} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Сходимость метода зависит от выбора начальной точки x_0, параметров задачи и выбора длины шага α_k. При $\alpha_k = 1$ выполняется шаг классического метода Ньютона, при $\alpha_k < 1$ — шаг демпфированного метода Ньютона.

Пусть производная $F'(x)$ липшицева с константой L, т.е. выполняется

$$\|F'(x) - F'(y)\| \leqslant L\|x - y\|,$$

где слева использована операторная норма $\|F'(x)\| = \max_{u\in\mathbb{R}^n :\, \|u\|=1} \|F'(x)u\|$, подчиненная векторным нормам соответствующей размерности. Тогда можно использовать шаг

$$\alpha_k = \min\left\{1, \frac{\|F'(x_k)\|}{L\|p_k\|^2}\right\}.$$

Метод с таким шагом называется комбинированным методом Ньютона, поскольку в итерациях могут происходить шаги классического или демпфированного метода Ньютона [1].

Если дополнительно к липшицевости выполняется условие невырожденности:

$$\|F'(x)p\| \geqslant \mu\|p\|, \quad \mu > 0, \quad \forall p \neq 0, \tag{2}$$

то можно применять комбинированный метод Ньютона с шагом $\alpha_k = \min\left\{1, \frac{\mu^2}{L\|F(x_k)\|}\right\}$. Для этих комбинированных методов известны оценки радиусов сходимости, т.е. условий вида $\|F(x)\| \leqslant c$, при которых они сходится. Комбинированные методы можно применять и в задачах выпуклой оптимизации для поиска решений системы уравнений $F(x) = \nabla f(x) = 0$, [2]. В этом случае $n = m$, и $p_k = \left(F'(x_k)\right)^{-1} F(x_k)$.

Если параметры μ и/или L неизвестны, можно применять адаптивные (робастные) способы выбора длины шага. Приведем адаптивный метод Ньютона, использующий оценку константы Липшица L.

2. L-адаптивный (робастный) комбинированный метод Ньютона

1. Выбрать параметры $M_0 > 0$, $c > 1$, точность $\varepsilon > 0$. Положить $k = 0$ и вычислить $u_0 = \|f'(x_0)\|$.

2. Вычислить $p_k = \arg\min_{F'(x_k)p = F(x_k)} \|p\|$,

3. Вычислить $\alpha_k = \min\left\{1, \frac{\|f'(x_k)\|}{M_k\|p_k\|^2}\right\}$, и $u_{k+1} = \|f'(x_k - \alpha_k p_k)\|$.

4. Если выполняются неравенства

   $$\alpha_k < 1, \quad u_{k+1} \leqslant u_k - \frac{1}{2M_k}\frac{u_k^2}{\|p_k\|^2},$$

   или

   $$\alpha_k = 1, \quad u_{k+1} \leqslant \frac{M_k}{2}\|p_k\|^2,$$

   то перейти к шагу 5.

   В противном случае увеличить $M_k \leftarrow cM_k$ и перейти к шагу 3 без изменения значения счетчика итераций k.

5. Перейти в точку $x_{k+1} = x_k - \alpha_k p_k$.

6. Проверить условие остановки: если $\|f'(x_{k+1})\| \leqslant \varepsilon$, то завершить работу и вернуть x_{k+1} в качестве решения.

   В противном случае положить $M_{k+1} = M_k$, увеличить счетчик итераций $k \leftarrow k + 1$, и перейти к шагу 2.

3. Численные эксперименты

Рассмотрим систему уравнений Флетчера-Пауэлла [3]:

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\sin x_j + B_{ij}\cos x_j = E_i, \quad i = 1,2,\dots,n. \tag{3}$$

Матрицы $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ случайные, и для произвольно выбранной точки x_* вычислены E_i. Эта система имеет решение, возможно, не единственное.

Для ряда размерностей ($n = 20, 25, 30, 35, 45, 50$) проведены численные эксперименты по решению систем (3). Сравнивались предложенный L-адаптивный комбинированный метод Ньютона и демпфированный метод Ньютона с выбором шага типа Армихо с $\alpha_k = q^{j_k},\ c_{\text{Армихо}} \in (0,1),\ q \in (0,1)$ [4]:

$$j_k = \min_{j\geqslant 0} j, \text{ при условии } \|F(x_k + q^j p_k)\| \leqslant (1 - c_{\text{Армихо}} q^j)\,\|F(x_k)\|.$$

Для каждой размерности случайным образом формировались 100 систем (3), и для каждой из них случайно выбирались 1000 начальных точек. Из них запускались L-адаптивный комбинированный метод Ньютона и метод Ньютона с шагом Армихо. При достижении заданной точности ($\|F(x_k)\| \leqslant 10^{-8}$, успешный запуск) или при выполнении максимального числа итераций ($N = 10000$) алгоритмы останавливались. Для каждой системы и каждого алгоритма вычислялась оценка «вероятности успеха» как отношение числа успешных запусков N_+ к общему числу запусков: $r = N_+/1000$ [1].

На рис. 1 изображены отношения «вероятностей успеха» для L-адаптивного комбинированного метода Ньютона и метода Ньютона с шагом Армихо. Для равно-эффективных методов это соотношение было бы около единицы. Результаты представлены в виде «ящика с усами», где горизонтальная линия соответствует среднему отношению, границы «ящика» соответствуют второму и третьему квартилям, содержащих половину случаев, а «усы» — 5% и 95% квартилям. Поскольку были случайно сгенерированы по 100 систем каждой размерности, проценты квартилей равны числу систем уравнений (3), и вне «усов» попадают 5 наименьших и 5 наибольших соотношений, изображенных выколотыми точками.

Среднее отношений «вероятностей успеха» меньше 1, что говорит о том, что L-адаптивный комбинированный метод Ньютона сходится реже, чем метод Ньютона с шагом Армихо. При этом отличие незначительное, а для некоторых систем уравнений L-адаптивный комбинированный метод Ньютона сходится из значительно большего числа точек.

Аналогичным образом исследовалось число вычислений функций: для каждой системы уравнений (3) выбирались те начальные точки, из которых решение было найдено и L-адаптивным комбинированным методом Ньютона, и методом Ньютона с шагом Армихо. Отношение средних (по начальным точкам) чисел вычислений функции $N_{\text{Армихо}}/N_{L-\text{адапт.}}$ изображено на рис. 2.

Видно, что хотя оба алгоритма используют пробные шаги, для шага Армихо их число кратно больше. Таким образом, предложенный адаптивный выбор шага может оказаться более эффективным при ограниченном вычислительном ресурсе. Впрочем, соотношение числа вычислений может зависеть от начальных параметров алгоритма, в частности, M_0, c, q и $c_{\text{Армихо}}$, и поэтому сравнение эффективности алгоритмов требует дальнейшего изучения и сравнительного анализа.

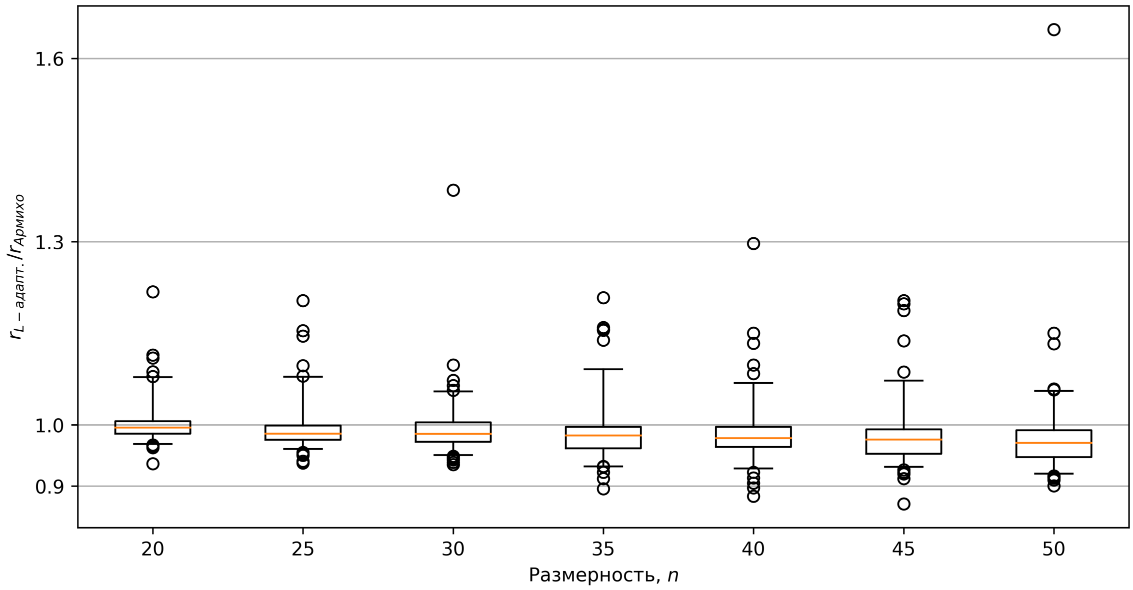

Рис. 1. Отношения «вероятностей успеха» $r_{L-\text{адапт.}}$ для L-адаптивного комбинированного метода Ньютона и $r_{\text{Армихо}}$ — для метода Ньютона с шагом Армихо, для различных систем (3) и размерностей.

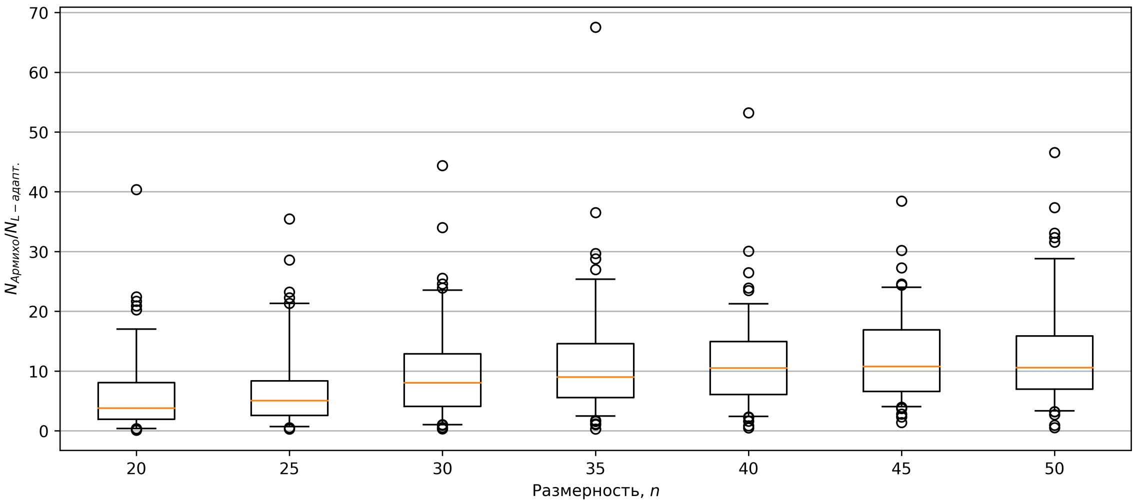

Рис. 2. Отношения среднего значения числа итераций $N_{\text{Армихо}}$ для метода Ньютона с шагом Армихо и $N_{L-\text{адапт.}}$ — для L-адаптивного комбинированного метода Ньютона, для различных систем (3) и размерностей.

Список литературы

1. Polyak B., Tremba A. New versions of Newton method: step-size choice, convergence domain and under-determined equations // Optimization Methods and Software. 2020. Vol. 35, No. 6. P. 1272–1303.
2. Хлебников М.В., Балашов М.В., Тремба А.А. Оптимизация и управление. М.: УРСС, 2024.
3. Fletcher R., Powell M.J.D. A rapidly convergent descent method for minimization // The Computer Journal. 1963. Vol. 6. P. 163–168.
4. Бурдаков О.П. Некоторые глобально сходящиеся модификации метода Ньютона для решения систем нелинейных уравнений // Доклады АН СССР. 1980, Т. 254, №. 3. С. 521–523.