УДК 519.8

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ДЕКОМПОЗИЦИЯ В ЗАДАЧАХ МАРШРУТИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

А.Г. Ченцов

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

Россия, 620108, Екатеринбург, С. Ковалевской ул., 16

E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Ключевые слова: маршрут, мегаполис, условия предшествования.

Аннотация: Рассматриваются задачи последовательного обхода мегаполисов (непустых конечных множеств) при ограничениях в виде условий предшествования и функциях стоимости, допускающих зависимость от списка заданий. Исследуется постановка с аддитивным агрегированием затрат и постановка, ориентированная на использование минимаксного критерия (задача на узкие места). Предполагается, что все множество заданий разбито в сумму двух подмножеств (кластеров). Задания из первого кластера должны быть выполнены раньше, чем начнется выполнение заданий из второго кластера. На этой основе возникает естественная декомпозиция совокупной задачи с выделением предваряющей и финальной задач. Возможные применения могут быть связаны с задачей последовательного демонтажа радиационно опасных объектов, задачей управления инструментом при фигурной листовой резке деталей на машинах с ЧПУ, транспортными задачами (в частности, имеются в виду вопросы логистики в малой авиации, связанные с ограничением на дальность беспосадочного перелета). Предложен и обоснован подход к решению проблемы построения оптимального композиционного решения, построен алгоритм, реализованный на ПЭВМ и позволяющий решать задачи ощутимой размерности за приемлемое время; проведен вычислительный эксперимент.

1. Введение

Исследуются задачи маршрутизации, имеющие своим прототипом известную труднорешаемую задачу коммивояжера (ЗК), но обладающие существенными особенностями; в частности, это касается ограничений и усложненных функций стоимости, что связано с тем, что рассматриваемые постановки ориентированы на инженерные приложения (атомная энергетика, машиностроение, транспортные задачи). Трудности вычислительной реализации, присущие ЗК, при этом сохраняются; поэтому в практических задачах часто применяются эвристики. Нередко используется решение совокупной задачи «по частям», т.е. решение с применением декомпозиций (например, в случае листовой резки на машинах с ЧПУ на практике широко используется резка зонами). В настоящей работе основное внимание уделяется решению с элементами декомпозиций, а точнее двухэтапной процедуре с раздельным решением возникающих частичных задач с применением динамического программирования (ДП). Оптимизируется композиционное решение для двух вариантов постановки: вариант «аддитивной» задачи и вариант, отвечающий задаче на узкие места (минимаксная постановка). Построен алгоритм, оптимальный в композиционном смысле и позволяющий решать задачи ощутимой размерности за вполне приемлемое время. Конкретный пример применения разработанных методов связан с постановкой задачи о термической листовой резке на машинах с ЧПУ, в которой по технологическим соображениям, касающимся вопросов эффективного отвода тепла, требуется осуществлять первоочередную резку длинномерных деталей (деталей, у которых контрастно отношение линейных размеров).

2. Содержательная постановка задачи

Задача о посещении мегаполисов (непустых конечных множеств) $M_1, \ldots, M_{\mathbf{n}}$: задано семейство

$$\mathcal{M} = \{M_1; \ldots; M_{\mathbf{n}}\},$$

где $\mathbf{n} \geqslant 4$; $M_1 \subset X, \ldots, M_{\mathbf{n}} \subset X$, где X – непустое множество.

Заданы непустые отношения $\mathbb{M}_1 \subset M_1 \times M_1, \ldots, \mathbb{M}_{\mathbf{n}} \subset M_{\mathbf{n}} \times M_{\mathbf{n}}$. Если $j \in \overline{1, \mathbf{n}}$, $x \in M_j$, $y \in M_j$ и $(x, y) \in \mathbb{M}_j$, то x – пункт прибытия в M_j, а y – пункт отправления из M_j. Пусть N – натуральное число, $2 \leqslant N \leqslant \mathbf{n} - 2$, определены семейства

$$\mathcal{M}_1 \triangleq \{M_1; \ldots; M_N\}, \mathcal{M}_2 \triangleq \{M_{N+1}; \ldots; M_{\mathbf{n}}\},$$

где $\triangleq$ – равенство по определению. Предполагается, что посещение мегаполисов из семейства $\mathcal{M}_2$ должно осуществляться только после посещения всех мегаполисов из $\mathcal{M}_1$; все этапы перемещений, включая работы, выполняемые при посещении мегаполисов и именуемые внутренними, оцениваются; также оценивается терминальное состояние. Рассматриваются два варианта агрегирования возникающих при этом стоимостей (затрат): аддитивная задача и задача на узкие места (минимаксная задача).

С $\mathcal{M}_1$ связывается **предваряющая задача** ($\mathcal{M}_1$-задача), ее мегаполисы $M_1, \ldots, M_N$, а с $\mathcal{M}_2$ связывается **финальная задача** ($\mathcal{M}_2$-задача), ее мегаполисы $M^{(1)}, \ldots, M^{(\mathbf{n}-N)}$, где $M^{(k)} \triangleq M_{N+k}$ при $k \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$.

Условия предшествования задаются посредством адресных пар из $\overline{1, N} \times \overline{1, N}$ и $\overline{1, \mathbf{n} - N} \times \overline{1, \mathbf{n} - N}$ для $\mathcal{M}_1$- и $\mathcal{M}_2$-задачи соответственно: заданы множества **адресных пар**

$$\mathbf{K}_1 \subset \overline{1, N} \times \overline{1, N}, \quad \mathbf{K}_2 \subset \overline{1, \mathbf{n} - N} \times \overline{1, \mathbf{n} - N}.$$

Первый элемент адресной пары – “отправитель”, а второй – “получатель”. Вообще для любой упорядоченной пары (УП) h через $\mathrm{pr}_1(h)$ и $\mathrm{pr}_2(h)$ обозначаем первый и второй элементы h соответственно.

Полагаем выполненными неограничительные условия, исключающие зацикливание перестановок (маршрутов),

$$(\forall\,\mathbf{K}^0, \mathbf{K}^0 \subset \mathbf{K}_1, \mathbf{K}^0 \neq \varnothing, \exists z^0 \in \mathbf{K}^0 : \mathrm{pr}_1(z^0) \neq \mathrm{pr}_2(z) \;\; \forall z \in \mathbf{K}^0)$$
$$\&(\forall\,\tilde{\mathbf{K}}^0, \tilde{\mathbf{K}}^0 \subset \mathbf{K}_2, \tilde{\mathbf{K}}^0 \neq \varnothing, \exists z^0 \in \tilde{\mathbf{K}}^0 : \mathrm{pr}_1(z^0) \neq \mathrm{pr}_2(z) \;\; \forall z \in \tilde{\mathbf{K}}^0).$$

Если $z \in \mathbf{K}_1$ или $z \in \mathbf{K}_2$, то $\mathrm{pr}_1(z)$ называем отправителем, а $\mathrm{pr}_2(z)$ – получателем. Допустимость по предшествованию: перестановка индексов из $\overline{1, N}$ (из $\overline{1, \mathbf{n} - N}$) **допустима** по предшествованию, если для каждой адресной пары из $\mathbf{K}_1$ (из $\mathbf{K}_2$) ее отправитель посещается **раньше** получателя. Для перестановок используем далее термин **"маршруты"**. Задачу о посещении мегаполисов из $\mathcal{M}_1$ называем $\mathcal{M}_1$-задачей, в аналогичном смысле понимается $\mathcal{M}_2$-задача.

Точная постановка и формализация основной $\mathcal{M}$-задачи, а также частичных $\mathcal{M}_1$- и $\mathcal{M}_2$-задач приведены в [1, 2](аддитивный критерий) и в [3] (минимаксная задача). Сейчас ограничимся изложением алгоритма поиска оптимального композиционного процесса, включающего маршрут, траекторию и точку старта из непустого конечного множества X^0, $X^0 \subset X$ (полагаем мегаполисы из $\mathcal{M}$ попарно дизъюнктными и непересекающимися с X^0); X^0 – множество возможных точек старта в $\mathcal{M}$-задаче.

Шаг 1). Построить множество X^{00} возможных точек старта в $\mathcal{M}_2$-задаче.

Шаг 2). Сформировать $\mathcal{M}_2$-задачу в виде системы $(\mathcal{M}_2, x)$-задач (задач с фиксированным стартом в x), $x \in X^{00}$.

Шаг 3). Определить функцию экстремума $\mathcal{M}_2$-задачи, определенную на X^{00}.

Шаг 4). С использованием функции экстремума $\mathcal{M}_2$-задачи сформировать терминальную компоненту критерия $\mathcal{M}_1$-задачи.

Шаг 5). Сформировать $\mathcal{M}_1$-задачу в виде системы $(\mathcal{M}_1, x)$-задач, $x \in X^0$.

Шаг 6). Найти функцию экстремума $\mathcal{M}_1$-задачи, полный экстремум и экстремальное множество $\mathcal{M}_1$-задачи. Выбрать точку x^0 из экстремального множества.

Шаг 7). Построить оптимальное $\mathcal{M}_1$-решение со стартом в x^0 в виде УП маршрут-траектория, зафиксировать финишную точку x^{00} на его траектории.

Шаг 8). Принять x^{00} за точку старта в $\mathcal{M}_2$-задаче и найти оптимальное решение $(\mathcal{M}_2, x^{00})$-задачи в виде УП маршрут-траектория.

Шаг 9). Склеить найденные $(\mathcal{M}_1, x^0)-$ и $(\mathcal{M}_2, x^{00})$-решения (раздельно склеить маршруты и траектории). Добавляя к получившейся УП точку $x^0 \in X^0$, получить оптимальный композиционный маршрутный процесс.

Примечание.

Для нахождения экстремума основной $\mathcal{M}$-задачи и экстремального множества ее точек старта достаточно выполнить 1) – 6), применяя схему с перезаписью слоев функции Беллмана (см. [3, замечание 2.1]). Для нахождения оптимального композиционного процесса требуется сохранять в памяти вычислителя слои (см. [1–3]) функции Беллмана.

3. Вычислительный эксперимент

Алгоритм 1) – 9) реализован на ПЭВМ. Для постановки с аддитивным агрегированием затрат рассматривалась задача об управлении инструментом при листовой резке деталей на машинах с ЧПУ (использовалась программа

П.А.Ченцова). По постановке предполагались условия предшествования (типичный вариант: для детали, имеющей внутренние контура, резка последних должна предшествовать резке объемлющего внешнего контура) и ограничения, связанные с эффективным отводом тепла, что особенно важно в случае термической резки. Сами контура были дискретизированы в интересах компьютерной реализации (континуумы заменены достаточно густыми сетками). Значения функций стоимости определялись всякий раз как время исполнения операций (внешние перемещения – быстрые, в режиме холостого хода, внутренние работы, связанные, с резкой – в режиме рабочего хода, более медленные). Характерное время счета в случае резки 40 контуров (два кластера по 20 контуров) – 47 секунд. При этом все ограничения (условия предшествования, тепловые допуски) были выполнены. Для упомянутой задачи алгоритм получил развитие для случая резки зонами, где число кластеров может быть больше двух (данные о времени счета в случае 20-элементных кластеров: 1 кластер – 19,5 сек., 2 кластера – 47 секунд, 3 кластера – 67,7 сек., 4 кластера – 90,5 сек., 5 кластеров – 103 сек.).

Для модельной минимаксной задачи (использовалась программа А.А. Ченцова) исследовался пример с 68 мегаполисами при использовании декомпозиции с двумя кластерами по 34 мегаполиса (каждый мегаполис был 12-элементным); были найдены экстремум и оптимальный (точнее, минимаксный) МП; время счета 24 час. 16 мин. 0 сек., что вполне соответствует временным затратам при раздельном решении $\mathcal{M}_1$- и $\mathcal{M}_2$-задачи (мы имеем здесь ощутимые размерности предваряющей и финальной минимаксных задач).

4. Заключение

Исследуемые в работе задачи маршрутизации имеют своим прототипом известную труднорешаемую задачу коммивояжера ([4–12] и др.), однако обладают рядом существенных особенностей; в частности, это касается ограничений, которые типичны в инженерных приложениях. Более общие задачи, связанные с последовательным обходом мегаполисов (GTSP), возникают в связи с проблемой листовой резки на машинах с ЧПУ при естественной дискретизации контуров вырезаемых деталей (см. [13–17] и др.). Характерным ограничением являются условия предшествования (типичный вариант: у деталей с внутренними контурами резка последних должна осуществляться раньше резки объемлющего внешнего контура), которые, однако, удалось [18, §4.9] использовать «в положительном направлении» в вопросах снижения вычислительной сложности. В настоящей работе упомянутое действие условий предшествования дополняется декомпозицией основной задачи с выделением предваряющей и финальной подзадач; см. в этой связи [1–3]. Построен оптимальный алгоритм в задаче о нахождении композиционного решения, определяемого в виде маршрутного процесса, включающего собственно маршрут (перестановку индексов заданий), траекторию перемещения по мегаполисам и точку старта из непустого конечного множества. Вычислительный эксперимент показал, что алгоритм обладает хорошим быстродействием в диапазоне размерностей, представляющем практический интерес.

Список литературы

1. Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Экстремальная двухэтапная задача маршрутизации и процедуры на основе динамического программирования // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 2. С. 215–248.
2. Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Двухэтапное динамическое программирование в задаче маршрутизации с элементами декомпозиции // Автоматика и телемеханика. 2023. № 5. С. 133–164.
3. Ченцов А.Г. Задача маршрутизации «на узкие места» с системой первоочередных заданий // Известия ИМИ УдГУ. 2023. Т. 61. С. 156–186.
4. Gutin G., Punnen A. The traveling salesman problem and its variations. Berlin: Springer, 2002.
5. Cook W.J. In pursuit of the traveling salesman. Mathematics at the limits of computation. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2012.
6. Гимади Э.Х., Хачай М.Ю. Экстремальные задачи на множествах перестановок. Екатеринбург: УМЦ УПИ, 2016.
7. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. Вып. 9. С. 3–33.
8. Литл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере // Экономика и математические методы. 1965. Т. 1, Вып. 1. С. 94–107.
9. Сергеев С.И. Гибридные системы управления и динамическая задача коммивояжера // Автоматика и телемеханика. 2008. № 1. С. 45–54.
10. Сергеев С.И. Алгоритмы решения минимаксной задачи коммивояжера. I. Подход на основе динамического программирования // Автоматика и телемеханика. 1995. № 7. С.144–150.
11. Беллман Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9, С. 219–228.
12. Хелд М., Карп Р.М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 202–218.
13. Петунин А.А. О некоторых стратегиях формирования маршрута инструмента при разработке управляющих программ для машин термической резки материала // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2009. Т. 13, № 2. С. 280–286.
14. Верхотуров М. А., Тарасенко П. Ю. Математическое обеспечение задачи оптимизации пути режущего инструмента при плоском фигурном раскрое на основе цепной резки // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2008. Т. 10, № 2. С. 123—130.
15. Петунин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Оптимальная маршрутизация инструмента машин фигурной листовой резки с числовым программным управлением. Математические модели и алгоритмы. Екатеринбург: УрФУ, 2020.
16. Petunin A. A. Modeling of tool path for the CNC sheet cutting machines // AIP Conference Proceedings. 2015. Т. 1690, № 1. С. 060002.
17. Lee M.-K., Kwon K.-B. Cutting path optimization in CNC cutting processes using a two-step genetic algorithm // International Journal of Production Research. 2006. Т. 44, № 24. С. 5307—5326.
18. Ченцов А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, 2008.