УДК 519.854.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ДРЕВОВИДНЫХ ДЕКОМПОЗИЦИЙ ДЛЯ ЛОКАЛЬНОГО ЭЛИМИНАЦИОННОГО АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧ

Н.И. Шушко
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: shushko.ni@phystech.edu

Ключевые слова: древовидная декомпозиция, локальный элиминационный алгоритм, дискретная оптимизация.

Аннотация: В данной работе производится сравнение трех алгоритмов выделения древовидной структуры на предмет эффективности использования результата декомпозиции в локальном элиминационном алгоритме решения дискретных задач оптимизации. Между собой сравниваются алгоритм на основе триангуляции графа, эвристический алгоритм выделения дерева клик и модифицированный алгоритм Финкильштейна. Сравнение производится на задачах назначения частот и задаче о временном рюкзаке.

1. Введение

Многие задачи дискретной оптимизации на практике содержат огромное количество переменных и ограничений что создает сложности при попытке решения этих задач с помощью современных решателей. При этом эти задачи имеют разряженные матрицы ограничений. Использование структуры разряженной матрицы позволяет повысить эффективность решения задач дискретной оптимизации, однако зачастую структура явно не выделена.

Одним из перспективных подходов, использующий структуру задач дискретной оптимизации является локальный элиминационный алгоритм (ЛЭА) [1]. Данный алгоритм предназначен для задач с блочно-лестничной или блочно-древовидной структурами. ЛЭА можно разделить на две части: в первой части производится выделение блочной структуры задачи и формируются подзадачи, во второй части происходит локальное решение подзадач с передачей информации между подзадачами, имеющие общие переменные, и формировании решения всей задачи из локальных решений подзадачи. О.А. Щербина показал, что оптимальный порядок решения подзадач существует тогда и только тогда, когда процедуре решения соответствует дерево, каждая вершина которого соответствует подзадаче. В таком случае оптимально начинать решение с листьев и подниматься к корню дерева.

Для выделения древовидной декомпозиции существует ряд алгоритмов, сформулированных для различных задач дискретной оптимизации [2, 3]. В [4] исследуется метод Финкельштейна, а также предлагается её модификация для выделения блочно-лестничной структуры в разреженных задачах. В [5] используется триангуляция графа для выделения дерева клик графа. Работа [6] предлагает эвристический алгоритм для выделения дерева клик в задаче назначения частот.

В данной работе исследуется влияние подходов выделения блочно-древовидной структуры из первой части ЛЭА на скорость получения решения во второй части.

2. Локальный элиминационный алгоритм

Рассмотрим задачу ДО с ограничениями

(1) $$F(x_1,...,x_n)=\sum_{k\in K} f_k(Y^k)\to \max$$

при ограничениях

(2) $$g_i(X^i)\sim 0, i\in M=\{1,2,...,m\},$$

где $Y^k\subseteq\{x_1,x_2,...,x_n\}, K=\{1,...,t\}, X^i\subseteq\{x_1,x_2,...,x_n\}, i\in M$; $\sim$ – одно из отношений $\le,\ge,=$, D_j – множество возможных значений переменной x_j. Функции $f_k(k\in K)$ называются компонентами целевой функции.

Введение необходимые для дальнейшего изложения определения.

Определение 1. Графом взаимосвязей задачи ДО называется неориентированный граф $G=(X,E)$, для которого:

- множество вершин X соответствует множеству переменных X задачи ДО;
- две вершины графа соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие им переменные появляются вместе в одной компоненте целевой функции или в одном и том же ограничении.

Основным понятием в теории локальных алгоритмов является понятие близости элементов, определяемое понятием окрестности.

Определение 2. Окрестностью $Nb(x)$ вершины x графа $G(X,E)$ первого порядка называется множество вершин, соединённых ребром с x.

Пусть $\Omega_1=(S_1,U_1),\Omega_2=(S_2,U_2),\ldots,\Omega_k=(S_k,U_k)$ – системы окрестностей вершин графа взаимосвязей $x_{j_1},\ldots,x_{j_k}$, S_r и U_r --- множества индексов столбцов и строк для r-й окрестности, $r=1,\ldots,k$.

Определение 3. Графом окрестностей G_Ω называется граф с вершинами v_{r_i} для r-й окрестности, v_{r_1} и v_{r_2} соединяются ребром, если $S_{r_1}\bigcap S_{r_2}\neq\varnothing$.

(3) $$\bigcup_{r=1}^{k} U_r = M=\{1,\ldots,m\};$$

(4) $$\bigcup_{r=1}^{k} S_r = N=\{1,\ldots,n\};$$

(5) $$U_{r_1}\bigcap U_{r_2}=\varnothing, r_1\neq r_2;$$

(6) $$S_{r_1}\bigcap S_{r_2}\bigcap S_{r_3}=\varnothing,$$

для любой тройки индексов r_1,r_2,r_3.

Определение 4. Граф G_Ω, не имеющий циклов, для которого выполняются свойства (3)-(6), называется блочно-древовидной структурой (БД структурой), S – множеством сепараторов. БД структура, которая является цепью, называется блочно-лестничной структурой.

Определение 5. Дерево декомпозиции для заданного графа $G(X,E)$ – $T=(I,F))$, где $\{X_i \mid i \in I\}$ — семейство подмножеств $v \in X$ и T – дерево с множеством вершин i и множеством ребер $F \subseteq I \times I$ такими, что:

1) $\bigcup_{i \in I} X_i = X$;

2) для всех $(v,w) \in E$ существует $i \in I$ такое, что $v \in X_i$, и $w \in X_i$;

3) для всех $i, j, k \in I$ таких, что j лежит на пути T из i в k, справедливо включение $X_i \cap X_k \subseteq X_j$.

Опишем ЛЭА для задач с БД-структурой. Каждый блок дерева декомпозиции является подзадачей, причем два соседних блока имеют множество пересекающихся вершин. Если зафиксировать значение переменных, являющихся общими для этих блоков, то каждую подзадачу можно решить независимо(локально). В этом и состоит идея метода. Решая локально подзадачи для всех возможных комбинаций значений общих переменных, мы можем в дальнейшем собрать решение из имеющихся общее оптимальное решение задачи. Причем порядок решения от листьев к корню. Эффективность данного алгоритма заключается в сокращении итераций полного перебора в результате использования структуры задачи [7].

3. Алгоритмы выделения древовидной структуры

В работе рассматривается три алгоритма выделения блочно-древовидной структуры: алгоритм на основе триангуляции графа, эвристический алгоритм выделения дерева клик и модифицированный алгоритм Финкильштейна.

Модифицированный алгоритм Финкильштейна [4] выделения блочно-древовидной структуры является усовершенствованной версией алгоритма Финкильштейна для квазиблочной структуры. Данный алгоритм заключается в выделении окрестности некой переменной последовательно возрастающих порядков пока окрестность не станет равной окрестности предыдущего порядка. Найденные окрестности разбиваются на блоки, которые представляют собой лестничную структуру. Модификация заключается в выделении компонент связности в каждом блоке и выделении подблоков на которые компоненты связности разделяют блок.

Алгоритм на основе триангуляции графа описан в [5]. Результатом работы алгоритма является дерево клик. Построение дерева клик происходит в четыре шага: триангуляция графа, нахождение максимальных клик, построение дерева из клик, нахождение максимального остовного дерева.

Эвристический алгоритм выделения дерева клик был предложен в [6] для задачи назначения частот. В отличии от предыдущего алгоритма результатом в этом случае является не оптимальное дерево клик. Алгоритм заключается в последовательном выделении минимального разделяющего множества для каждого блока, пока все блоки дерева декомпозиции не станут кликами.

4. Заключение

В работе приводится сравнение алгоритмов выделения блочно-древовидных структуры в графе ограничений задач дискретной оптимизации. Результаты сравнения представлены для задачи назначения частот [6] и временной задачи о рюкзаке (temporal knapsack problem) [8].

В результате численных экспериментов было выявлено, что лучшую структуру выделяет алгоритм Финкильштейна, однако иногда это занимает много времени. Алгоритм на основе триангуляции более стабилен и всегда быстро находит дерево декомпозиции, однако разбиение происходит на мелкие блоки, что не всегда эффективно.

Список литературы

1. Лемтюжникова Д.В., Щербина О.А. Локальный элиминационный алгоритм и параллельные вычисления // Интеллектуальные системы. 2013. Т. 17, № 1-4. С. 490-494.
2. Щербина О.А. Древовидная декомпозиция и задачи дискретной оптимизации (обзор) // Кибернетика и системный анализ. 2007. № 4. С. 102-118.
3. Musliu N. An iterative heuristic algorithm for tree decomposition. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. P. 133-150.
4. Лемтюжникова Д.В., Свириденко А.В., Щербина О.А. Алгоритм выделения блочно-древовидной структуры в разреженных задачах дискретной оптимизации // Таврический вестник информатики и математики. 2012. Т. 1. С. 44-55.
5. Jensen F. V., Jensen F. Optimal junction trees // Uncertainty Proceedings 1994. P. 360-366.
6. Koster A.M.C.A., van Hoesel S.P.M., Kolen A.W.J. Optimal solutions for frequency assignment problems via tree decomposition // Graph-Theoretic Concepts in Computer Science: 25th International Workshop, WG’99. Ascona, Switzerland, June 17–19. 1999 Proceedings 25. Berlin, Heidelberg: Springer, 1999. P. 338-350.
7. Щербина О.А. Локальные элиминационные алгоритмы для разреженных задач дискретной оптимизации: дис.... доктора физ.-мат. наук: 05.13. 17 // Таврический нац. ун-т. им. Вернадского-2010. 361с. 2011.
8. http://comopt.ifi.uni-heidelberg.de (дата обращения 15.01.2024).