УДК 684.511

ОБ УПРАВЛЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫМИ НЕАФФИННЫМИ ОБЪЕКТАМИ

А.Р. Гайдук
Южный федеральный университет
Россия, 344006, Ростов-на-Дону, Б. Садовая ул., 105/42
E-mail: gaiduk_2003@mail.ru

В.Х. Пшихопов
Южный федеральный университет
Россия, 344006, Ростов-на-Дону, Б. Садовая ул., 105/42
E-mail: pshichop@rambler.ru

М.Ю. Медведев
Южный федеральный университет
Россия, 344006, Ростов-на-Дону, Б. Садовая ул., 105/42
E-mail: medvmihal@sfedu.ru

Ключевые слова: нелинейный неаффинный объект, квазилинейная модель, алгебраический полиномиально-матричный метод синтеза, невырожденность по управлению выходом, гибридная система.

Аннотация: Предлагается метод проектирования систем управления нелинейными неаффинными объектами с дифференцируемыми нелинейностями. Метод использует квазилинейные модели, которые создаются на основе уравнений в форме Коши нелинейных объектов. Задача синтеза неаффинной системы управления имеет решение, если квазилинейная модель заданного объекта является управляемой по состоянию и невырожденной по управлению выходом. Решение задачи состоит в определении нескольких полиномов и решении системы линейных алгебраических уравнений. Полученное управление является дискретным. Устойчивость положения равновесия замкнутой непрерывно-дискретной системы управления доказывается методом функций Ляпунова.

1. Введение

Среди нелинейных объектов часто встречаются неаффинные объекты, в уравнения которых управление и возмущения входят нелинейным, неаддитивным образом. К нелинейным неаффинным объектам относятся некоторые типы подводных и летательных аппаратов, надводных судов и мобильных роботов, химических реакторов и многих других объектов [1-3]. Задача синтеза систем управления нелинейными объектами является достаточно сложной, а неаффинными объектами, в особенности, поэтому известно довольно много подходов к её решению [2-5]. При этом используются методы SDRE, робастного управления, скользящих режимов, нечеткого управления, критерий гиперустойчивости В.М. Попова, нейросетевые и многие другие походы.

В данной статье предлагается новый метод синтеза систем управления нелинейными неаффинными объектами. Этот метод базируется на использовании квазилинейной модели, алгебраического полиномиально-матричного метода синтеза нелинейных систем управления [6, 7] и дискретного управления.

2. Постановка задачи

В достаточно общем случае нелинейный объект, неаффинный по управлению и по возмущению, может быть описан уравнениями в отклонениях:

(1) $$\dot{x} = \zeta(x,u,f), y = \psi(x,u),$$

где $x = [x_1\ x_2\ \dots\ x_n]^T$ – n-вектор переменных состояния; $\psi(x,u)$, $\zeta(x,u,f)$ – нелинейные скалярная и n-вектор-функция, дифференцируемые по всем своим аргументам; причем $\psi(\mathbf{0},0) = 0$, $\zeta(\mathbf{0},0,0) = 0$; u, f и y – скалярные управление, возмущение и выходная управляемая переменная. Предполагается, что вектор x, а также задающее воздействие $g(t)$ измеряются. Здесь $\mathbf{0}$ – нулевой n-вектор.

Ставится задача синтеза замкнутой нелинейной системы с управлением $u_k = u(g_k, x_k)$ и устойчивым положением равновесия $x = \mathbf{0}$; при $g = g_0 1(t)$, $f(t) \equiv 0$, $\varepsilon(t) = g(t) - y(t) \to 0$ при $t \to \infty$, а длительность переходного процесса $t_{\text{пп}} \le t^*_{\text{пп}}$, где $t^*_{\text{пп}}$ – заданное значение.

Функции $\zeta(x,u,f)$ и $\psi(x,u)$ являются дифференцируемыми, а так как $\zeta(\mathbf{0},0,0) = 0$ и $\psi(\mathbf{0},0) = 0$, то уравнения (1) представляются квазилинейной моделью (КЛМ):

(2) $$\dot{x} = A(x)x + b(x,u)u + h(x,u,f)f, y = c^T(x)x + d(x,u)u,$$

где в общем случае

(3) $$A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}, b(x,u) = \begin{bmatrix} b_1(x,u) \\ \vdots \\ b_n(x,u) \end{bmatrix},$$

$$h(x,u,f) = \begin{bmatrix} h_1(x,u,f) \\ \vdots \\ h_1(x,u,f) \end{bmatrix},$$

$$c^T(x) = [c_1(x)\ c_2(x)\ \dots\ c_n(x)], d(x,u) = [\psi(x,u) - \psi(x,0)]/u.$$

Функциональные коэффициенты или числа: $a_{ij}(x)$, $b_i(x,u)$, $h_i(x,u,f)$, $c_j(x)$ в (2) и (3) могут быть получены аналитически с использованием выражений:

$$a_{ij}(x) = \int_0^1 \zeta'_{ij}(x_1, \dots, x_{j-1}, \theta x_j, \mathbf{0}_{n-j}; 0,0)d\theta, b_i(x,u) = \int_0^1 \zeta'_{i,u}(x; \theta u, 0)d\theta,$$

(4) $$h_i(x,u,f) = \int_0^1 \zeta'_{i,f}(x; u, \theta f)d\theta; c_j(x) = \int_0^1 \psi'_j(x_1, \dots, x_{j-1}, \theta x_j, \mathbf{0}_{n-j}, 0)d\theta,$$

где $\zeta'_{ij}(x;u,f) = \partial\zeta_i(x;u,f)/\partial x_j$; $\zeta'_{i,u}(x;u,f) = \partial\zeta_i(x;u,f)/\partial u$; $\zeta'_{i,f}(x;u,f) = \partial\zeta_i(x;u,f)/\partial f$; $\psi'_j(x,u) = \partial\psi(x,u)/\partial x_j$; $\mathbf{0}_{n-j}$– последовательность, содержащая $n-j$ нулей [6, 8].

Подчеркнём, что КЛМ (2)-(4) описывает объект (1) совершенно точно, т.е. с сохранением всех его нелинейных особенностей. Неаффинность по управлению и по возмущению рассматриваемого объекта (1) проявляется в том, что вектор $b(x,u)$ и коэффициент $d(x,u)$ зависят от управления u, а вектор $h(x,u,f)$ зависит от u и от f.

Уравнения (2), (3) называются квазилинейной моделью, так как их форма аналогична линейным уравнениям, но элементы матрицы и векторов являются нелинейными функциями. В тех случаях, когда $A(x)$ и $b(x)$ в (2) зависят только от вектора состояния, а $f = 0$, эти уравнения называются «state-dependent coefficients (SDC) form» [2]. Очевидно SDC форма является частным случаем квазилинейной модели, так как в общем случае матрица и векторы КЛМ зависят не только от переменных состояния.

3. Решение задачи

Поставленная задача синтеза имеет решение, если только выполняется условие управляемости по состоянию:

(5) $|\det U(x,u)| \geq \varsigma_1 >> 0, x \in \Omega_U, u \in J_u$,

где $U(x,u) = [b(x,u)\ A(x)b(x,u)\ \dots\ A^{n-1}(x)b(x,u)]$; ς_1– некоторое число; Ω_U– окрестность точки $x = \mathbf{0}$; J_u – интервал допустимых значений управления u.

При выполнении условия (5) используется дискретный закон управления:

(6) $u_{-1} = 0, u_k = l_{g,k}g_k - [l_{1,k}\ l_{2,k}\ \dots\ l_{n,k})]x_k, x_k \in \Omega_U, u_k \in J_u$,

где $u_k = u(kT)$, $g_k = g(kT)$, $x_k = x(kT)$, $l_{g,k} = l_g(x_k, u_{k-1}), l_{i,k} = l_i(x_k, u_{k-1})$ – коэффициенты, которые необходимо найти, $k = 0, 1, 2, \dots$; T – период дискретизации управления.

Уравнения замкнутой гибридной системы, найденные из (2) при $u = u_k$ (6), имеют вид:

(7) $\dot{x} = A(x)x - b(x,u_k)l_k^T x_k + b(x,u_k)l_{g,k}g + h(x,u_k,f)f$,

$y = c^T(x)x + d(x,u_k)u_k, kT \leq t < (k+1)T, k = 0, 1, 2, \dots$

Первое уравнение (7) при $t = kT$ можно записать в виде:

(8) $\dot{x}_k = D(x_k)x_k + \widetilde{b}(x_k)l_{g,k}g_k + \widetilde{h}(x_k,f_k)f_k, k = 0, 1, 2, \dots$

где $D(x_k) = A(x_k) - b(x_k)l_k^T$– матрица замкнутой системы (8). Полином $D(p, x_k) = \det[pE - D(x_k)]$ может быть представлен [7] в виде

(9) $D(p,x_k) = A(p,x_k) + \sum_{i=1}^{n} l_{i,k} V_i(p, x_k, u_k)$.

(10) $A(p,x_k) = \det[pE - A(x_k)] = p^n + \alpha_{n-1}(x_k)p^{n-1} + \dots + \alpha_1(x_k)p + \alpha_0(x_k)$,

(11) $V_i(p,x_k,u_k) = e_i^T[\mathrm{adj}\ (pE - A(x_k))]b(x_k,u_{k-1}) = \sum_{j=0}^{n-1} v_{ij}(x_k,u_k)p^j$,

e_i– i –й столбец единичной матрицы E, $i = 1, 2, 3, \dots n$.

В (9) и (11) заменяется $D(p,x)$ на $D^*(p)$, а u_k на u_{k-1}. В результате образуется полиномиальное уравнение относительно коэффициентов $l_{i,k}$:

(12) $\sum_{i=1}^{n} l_{i,k}\ V_i(p, x_k, u_{k-1}) = R(p,x)$,

где

(13) $R(p,x_k) = D^*(p) - A(p,x_k) = \sum_{j=0}^{n-1} \rho_j(x_k)p^j$,

(14) $D^*(p) = \prod_{j=1}^{n}(p + \lambda_j^*) = p^n + \delta_{n-1}^* p^{n-1} + \dots + \delta_1^* p + \delta_0^*$,

(15) $\lambda_j^* \leq -\varsigma_2$; $|\lambda_j^* - \lambda_\chi^*| > \varsigma_3, j \neq \chi, j, \chi = \overline{1,n}, \varsigma_2 > 0, \varsigma_3 > 0$.

Полиномиальному уравнению (12) соответствует эквивалентная СЛАУ [8, 9],

(16) $G(x_k)l_k = r(x_k), \forall\ x \in \Omega_U$.

Здесь

(17) $$G = \begin{bmatrix} v_{1,0} & v_{2,0} & \cdots & v_{n,0} \\ v_{1,1} & v_{2,1} & \cdots & v_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1,n-1} & v_{2,n-1} & \cdots & v_{n,n-1} \end{bmatrix}, l_k = \begin{bmatrix} l_{1k} \\ l_{2k} \\ \vdots \\ l_{n,k} \end{bmatrix}, r = \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_{n-1} \end{bmatrix}.$$

В выражениях (17) аргументы функциональных коэффициентов опущены для краткости.

СЛАУ (16), (17) имеет решение при выполнении условия управляемости по состоянию (5) [7]. Это решение определяет вектор $l_k = l(x_k, u_{k-1})$, при котором собственные числа матрицы $D(x_k)$ из уравнения (8) равны корням полинома $D^*(p)$ (14).

Если положение равновесия $x_k = \mathbf{0}$ системы (8) является асимптотически устойчивым, и $f(t) \equiv 0$, $g(t) = g_0 1(t)$, где g_0 достаточно мало, то при $k \to \infty$ имеет место равенство

(18) $\mathbf{0} = D(x^\circ)x^\circ + b(x^\circ)l_g^\circ g_0$,

где $x^\circ, u^\circ, l_g^\circ$ – установившиеся значения x_k, u_k, $l_{g,k}$. Из (18) и (6) следуют выражения:

$$x^\circ = -D^{-1}(x^\circ)b(x^\circ)l_g^\circ g_0, u^\circ = [1 + (l^\circ)^T D^{-1}(x^\circ)b(x^\circ)]l_g^\circ g_0.$$

Подставляя эти выражения во второе уравнение (7) при $t = kT$ и $k \to \infty$, получим

(19) $$y^\circ = \{-c^T(x^\circ)D^{-1}(x^\circ,u^\circ)b(x^\circ) + d(x^\circ)[1 + (l^\circ)^T D^{-1}(x^\circ)b(x^\circ)]\} l_g^\circ g_0.$$

Утверждение. *Ошибка* $\varepsilon^\circ = g_0 - y^\circ$ *системы* (7) *может быть равной нулю, если*

(20) $$\gamma_{\text{об}}(x,u) \neq 0, \forall x \subset \Omega_\gamma \in \Omega_U, u \in J_u,$$

(21) $$\gamma_{\text{об}}(x,u) = \begin{cases} -c^T(x)\mathrm{adj}A(x)b(x,u), if\ d(x,u) \equiv 0, \\ d(x,u)\det A(x) - c^T(x)\mathrm{adj}A(x)b(x,u), if\ d(x,u) \neq 0. \end{cases}$$

Здесь $\Omega_\gamma \in \Omega_U$ – область R^n, в которой выполняется условие (20).

Неравенство (20) является критерием невырожденности по управлению выходом нелинейного неаффинного объекта (1), так как в противном случае выходной переменной за счет управления нельзя придать ненулевое значение [9].

При выполнении условия (20), (21) из (19) следует: $l_g(x_k) = (-1)^n \delta_0^* / \gamma_{\text{об}}(x_k, u_{k-1})$.Подставляя коэффициент $l_g(x_k, u_{k-1})$ и вектор $l_k = l(x_k)$ в (6), получим:

(22) $$u_{-1} = 0, u_k = \frac{(-1)^n \delta_0^*}{\gamma_{\text{об}}(x_k,u_{k-1})} g_k - l^T(x_k)x_k, x_k \subset \Omega_\gamma;\ u_k \in J_u.$$

Дискретное управление по входу и состоянию (22) легко реализуется цифровым устройством управления. При этом замкнутая система является неаффинной и гибридной.

4. Устойчивость положения равновесия

Производную $\dot{x}_k$ в уравнении (8) при $g(t) \equiv 0$ и $f(t) \equiv 0$ заменим по формуле Эйлера [10], т.е. примем $\dot{x}_k = (x_{k+1} - x_k)/T$. В результате получим:

(23) $$x_{k+1} = D_{\text{нф}}(x_k)x_k,$$

где $D_{\text{нф}}(x_k) = [E + TD(x_k)]$ – $n \times n$-матрица. Пусть $\bar{\lambda} = \max\limits_{j = [1,\dots,n]} \lambda_j^*$.

Теорема. *Если период дискретизации T в* (6), (7) *и* (22) *удовлетворяет условию* $0 < T << 0{,}9/\bar{\lambda}$ *и выполнены условия* (5), (15) *и* (20), *то положение равновесия неаффинной гибридной системы* (7), *является асимптотически устойчивым в большом, т.е. её решение* $x(t, x_0)$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{t \to \infty} x(t, x_0) = \mathbf{0}, \forall\ x \subset \Omega_{\text{нфд}} \in \Omega_U.$$

В условиях теоремы Ω_U и $\Omega_{\text{нфд}}$ – области пространства R^n, в которых выполняются условия (5) и отрицательной определенности производной по времени функции Ляпунова в силу системы (23), соответственно. Область $\Omega_{\text{нфд}}$ включает точку $x = \mathbf{0}$.

Доказательство этой теоремы проводится методом функций Ляпунова с использованием непрерывности решений дифференциального уравнения (7).

5. Заключение

Предложенный подход к синтезу нелинейных неаффинных систем управления базируется на использовании квазилинейных моделей и алгебраического полиномиально-матричного метода синтеза нелинейных систем управления объектами с дифференцируемыми нелинейностями. Задача синтеза имеет решение, если квазилинейная модель нелинейного объекта удовлетворяет условиям управляемости по состоянию и невырожденности по управлению выходом. Показано, что SDC форма уравнений нелинейных объектов является частным случаем квазилинейной модели. Предложенный метод заключается в определении нескольких полиномов и решении системы линейных алгебраических уравнений с функциональными коэффициентами.

Он позволяет обеспечивать требуемую длительность переходных процессов и нулевую ошибку при ступенчатом задающем воздействии и нулевых начальных условиях. Предложенный метод, по сравнению с известными, приводит к более простым расчетным соотношениям при вычислении значений дискретного управления, что позволяет применять более простые цифровые средства автоматизации. Метод может применяться при создании цифровых систем управления нелинейными объектами и процессами в различных отраслях энергетики, промышленности и сельского хозяйства.

Исследование выполнено при поддержке Южного федерального университета грант № SP02/S4_0708Prioritet_06.

Список литературы

1. Пшихопов В.Х., Медведев М.Ю. Синтез систем управления подводными аппаратами с нелинейными характеристиками исполнительных органов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 3. С 147-154.
2. Geranmehr B., Nekoo S.R. Nonlinear suboptimal control of fully coupled non-affine six-DOF autonomous underwater vehicle the state-dependent Riccati equation // Journal of Ocean Engineering. 2015. Vol. 96. P. 248-257.
3. Еремин Е.Л. Робастное управление для одного класса неаффинных нелинейных SISO-систем // Информатика и системы управления. 2015. № 3(45). С. 89-100.
4. Zhang J., Zhu Q., Wu X., Li Y. A generalized indirect adaptive neural networks backstepping control procedure for a class of non-affine nonlinear systems with pure-feedback prototype // Neurocomputing, 2013. Vol. 121, No. 9. P. 131-139.
5. Longsheng C., Qi W. Adaptive Robust Control for a Class of Uncertain MIMO Non-Affine Nonlinear Systems // IEEE/CAA Journal of Automatica SINICA. 2016. Vol. 3, No. 1. P. 105-116.
6. Гайдук А.Р. Численный метод синтеза квазилинейных моделей нелинейных объектов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2021. Т. 22, № 6. С. 283-290.
7. Гайдук А.Р., Плаксиенко В.С., Кабалан А.Е.А. Алгебраический полиномиально-матричный метод синтеза нелинейных астатических систем // Математические методы в технологиях и технике, 2022. № 1. С. 41-45.
8. Гайдук А.Р. Алгебраический синтез нелинейных стабилизирующих управлений // Синтез алгоритмов сложных систем. 1989. Вып. 7. Таганрог: Изд-во ТРТИ. С. 15-19.
9. Гайдук А.Р. Синтез дискретных и гибридных нелинейных систем управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2023. Т. 24, № 10. С. 507-518.
10. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные метода анализа. М.: Наука, 1967. 368 с.