УДК 681.511.42

МЕТОД КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

А.Р. Гайдук
Южный федеральный университет
Россия, 344006, Ростов-на-Дону, Б. Садовая ул., 105/42
E-mail: gaiduk_2003@mail.ru

Ключевые слова: нелинейный объект, система управления, квазилинейная модель, квазилинейная дискретизация, гибридная система, управление выходом.

Аннотация: Рассматривается новый метод квазилинейной дискретизации уравнений нелинейных объектов с целью синтеза гибридных нелинейных систем управления. Метод основан на использовании квазилинейных моделей объектов с дифференцируемыми нелинейностями. Он позволяет синтезировать гибридные системы с увеличенным интервалом дискретизации для управления нелинейными объектами различных отраслей.

1. Введение

В настоящее время для автоматизации процессов управления широко применяются цифровые системы, для синтеза которых необходимы дискретные математические модели. Однако моделями нелинейных объектов обычно являются непрерывные нелинейные дифференциальные уравнения в форме Коши. Классический метод получения дискретных моделей – посредством z-преобразования к ним неприменим. Поэтому нелинейные системы управления часто синтезируются как непрерывные, а управление реализуется как дискретное с достаточно малым периодом [1, 2]. Это приводит к необходимости применения быстродействующих микроконтроллеров.

Для создания дискретных моделей нелинейных объектов с большим периодом, осуществляется дискретизация непосредственно нелинейных уравнений. Для этих целей обычно используется метод Эйлера или схема Рунге-Кутты, с последующим разложением в ряды Тейлора, Пеано–Бэкера и др. [3-5]. Однако подходы, использующие ряды, приводят к очень сложным расчетным соотношениям.

В данной работе предлагается новый метод дискретизации уравнений нелинейных объектов, который состоит в дискретизации квазилинейных моделей этих объектов со значительно большим, чем обычно, периодом. При этом система оказывается дискретно-непрерывной или гибридной. Основным ограничением предлагаемого метода является требование дифференцируемости нелинейностей объектов управления [6].

2. Квазилинейная модель

Как известно, если нелинейности объектов аффинных по управлению и возмущению являются дифференцируемыми, то их дифференциальные уравнения в форме Коши, можно представить [6, 7] квазилинейной моделью (КЛМ):

(1) $$\dot{x} = A(x)x + b(x)u + h(x)f,\ y = c'(x)x + d(x)u,$$

где $x = [x_1, \dots, x_n]$ – вектор состояния (отклонений); u, f и y – управление, возмущение и выходная управляемая переменная; $A(x)$ и $b(x), h(x), c(x)$ – функциональные $n \times$-матрица и n-векторы, все элементы которых – известные нелинейные скалярные функции или числа; $d(x)$ – также функция или число; штрих – символ транспонирования. Будем предполагать, что x_i и y измеряются.

Заметим, что КЛМ является точным представлением нелинейных уравнений объекта с дифференцируемыми нелинейностями, причем аналитические методы её построения известны достаточно давно. В частности, уравнение $\dot{x} = A(x)x$ нелинейных систем использовалось Н.Н. Красовским и др. для построения функций Ляпунова еще в прошлом веке [7]. При этом, если вектор x ограничен по норме, то функциональные коэффициенты в (1) являются ограниченными функциями переменных x_i или числами.

3. Метод квазилинейной дискретизации

Этот метод заключается в дискретизации с некоторым периодом T решения $x(t, x_0, u, f)$ уравнений (1). Каждому моменту времени $t = kT$ соответствует дискретное значение $x_k = x(kT)$ этого решения. Точное значение решения $x_{k+1} = x((k+1)T)$ определяется по формуле

(2) $$x_{k+1} = x_k + \int_{kT}^{(k+1)T} \varphi[x(t), u(t), f(t)]dt,\ k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\varphi[x(t), u(t), f(t)]$ – правая часть уравнения (1). Найти x_{k+1} по (2) обычно невозможно, поэтому, применяя метод трапеций, подынтегральное выражение в (2) заменяется на

(3) $$\bar{x}(t) = 0{,}5[A_k\hat{x}_k + A_k\hat{x}_{k+1} + 2b_k u_k + 2h_k f_k] + \varepsilon_k,$$

где

$$\varepsilon_k(x_k) = 0{,}5[(A_{k+1} - A_k)\hat{x}_{k+1} + b_{k+1}u_{k+1} - b_k u_k + h_{k+1}f_{k+1} - h_k f_k].$$

Здесь для краткости введены обозначения: $A_k = A(\hat{x}_k), b_k = b(\hat{x}_k), h_k = h(\hat{x}_k)$. Как видно, при $\hat{x}_k \to 0$ величина $\varepsilon_k \to 0$, если $u_k = u(\hat{x}_k)$ и $f_k \equiv 0$. Поэтому, подставляя (3) в (2) при $\varepsilon_k = 0$, $\hat{x}_k = x_k$ и выполняя интегрирование, получим разностное уравнение

(4) $$[E - 0{,}5\, T\, A(x_k)]x_{k+1} = [E + 0{,}5\, T\, A(x_k)]x_k + Tb(x_k)u_k + Th(x_k)f.$$

Лемма. *Если матрица $A(x)$ является системной матрицей квазилинейной модели $\dot{x} = A(x)x$, то существует конечное $T > 0$ такое, что матрица $L(x) = [E - 0{,}5\, T\, A(x)]$ при всех $x \subset \Omega_d$ имеет обратную матрицу.*

Здесь Ω_d – некоторая окрестность точки $x = 0$, причём если $x \subset \Omega_d$, то $\|x\| \le M_{\Omega d} < \infty$. Эта лемма доказывается с использованием неравенств, следующих из теоремы С.А. Гершгорина [8, с. 193].

Пусть период T выбран таким, что выполняется условие

(5) $$\det L(x_k, T) = \det[E - 0{,}5\, T\, A(x_k)] \ne 0,\ \forall\, x_k \subset \Omega_d.$$

При условии (5) из выражения (4) и второго уравнения (1) следуют уравнения:

(6) $$x_{k+1} = A_d(x_k)x_k + b_d(x_k)u_k + h_d(x_k)f_k,\ y_k = c'(x_k)x + d(x_k)u_k,$$

где

(7) $$A_d(x_k) = [E - 0{,}5\, T\, A(x_k)]^{-1}[E + 0{,}5\, T\, A(x_k)],$$

(8) $$b_d(x_k) = [E - 0{,}5\, T\, A(x_k)]^{-1}Tb(x_k),\ h_d(x_k) = [E - 0{,}5\, T\, A(x_k)]^{-1}Th(x_k).$$

Выражения (1), (7), (8) являются расчетными соотношениями метода квазилинейной дискретизации уравнений непрерывных нелинейных объектов с дифференцируемыми нелинейностями. Уравнения (6) являются приближенной дискретной квазилинейной моделью (ДКЛМ) нелинейных объектов указанного типа. Решения этой модели отличаются от решений точной модели (1) на величину$T\varepsilon_k$, стремящуюся к нулю при $f_k \equiv 0$ и $x_k \to 0$. Основная особенность модели (6)-(8)

заключается в значительно большем, чем обычно, периоде дискретизации, который ограничивается условием (5).

4. Синтез гибридных нелинейных систем управления

Поставим задачу синтеза дискретного управления нелинейным объектом, представленным КЛМ (1), которое обеспечит устойчивость положения равновесия $x = 0$,требуемую длительность переходных процессов при нулевых начальных условиях и задающем воздействии $g(t) = g_0 1(t)$, а также нулевую ошибку по этому воздействию.

Решение поставленной задачи алгебраическим полиномиально-матричным (АПМ) методом синтеза [9] существует, если ДКЛМ (6)-(8), удовлетворяет условию, близкому к условию управляемости по состоянию в смысле Калмана:

(9) $$|\det U(x_k)| = \left|\det[b_d(x_k)\ A_d(x_k)b_d(x_k)\ \dots\ A_d^{n-1}(x_k)b_d(x_k)]\right| \geq \zeta_U > 0,$$

$x_k \subset \Omega_U$,

где ζ_U – некоторое число; Ω_U – окрестность точки $x_k = 0$, в которой выполняется неравенство (9). Кроме того, КЛМ (1) должна удовлетворять условию невырожденности по управлению выходом:

(10) $$\gamma_{\text{об}}(x) \neq 0, \forall\, x \subset \Omega_{Ud},$$

где $\Omega_{Ud} = \cap\, \Omega_d\, \Omega_U$,

(11) $$\gamma_{\text{об}}(x) = \begin{cases} -c^T(x)[\mathrm{adj}A(x)]b(x), \text{если } d(x) \equiv 0, \\ d(x)\det A(x) - c^T(x)[\mathrm{adj}A(x)]b(x), \text{если } d(x) \neq 0. \end{cases}$$

При выполнении условий (9) и (10) управление в (1) берется $u = u_{\text{г}k}$, где

(12) $$u_{\text{г}k} = l_{\text{г}g}(x_k)g_k - l'(x_k)x_k, k = 0, 1, 2, \dots, x_k \subset \Omega_{Ud}.$$

Здесь $l_{\text{г}g}(x_k)$ и $l(x_k)$– функциональные коэффициент и вектор, определяемые методом АПМ, который применительно к ДКЛМ (6) – (8) состоит в следующем [9]:

- находятся полиномы

(13) $$A_d(z, x_k) = \det[zE - A_d(x_k)] = z^n + \alpha_{n-1}(x_k)z^{n-1} + \dots + \alpha_1(x_k)z + \alpha_0(x_k),$$

(14) $$V_i(z, x_k) = e'_i\mathrm{adj}[zE - A_d(x_k)]b_d(x_k) = v_{i,n-1}(x_k)z^{n-1} + \dots + v_{i,1}(x_k)z + v_{i,0}(x_k),$$

где e_i – i-й столбец единичной $n\,\times$-матрицы E, $i = \overline{1,n}$;

- формируется полином

(15) $$D^*(z) = (z - \sigma_1^*)(z - \sigma_2^*)\dots(z - \sigma_n^*) = z^n + \delta_{n-1}^*z^{n-1} + \dots + \delta_1^*z + \delta_0^*,$$

где

(16) $$0 \leq \sigma_i^* < 1 - \eta_d^*, \left|\sigma_i^* - \sigma_\varsigma^*\right| > \upsilon_1, i \neq \varsigma, i, \varsigma = [1, n],$$

а υ_1, η_d^* – положительные числа, $\eta_d^* < 1$;

- вычисляется полином

$$R(z, x_k) = D^*(z) - A_d(z, x_k) = \rho_{n-1}(x_k)z^{n-1} + \dots + \rho_1(x_k)z + \rho_0(x_k),$$

где $\rho_i(x_k) = \delta_i^* - \alpha_i(x_k)$, и формируется система линейных алгебраических уравнений:

(17) $$G(x_k)l(x_k) = r(x_k),$$

где

(18) $$G = \begin{bmatrix} v_{10} & v_{20} & \cdots & v_{n,0} \\ v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1,n-1} & v_{2,n-1} & \cdots & v_{n,n-1} \end{bmatrix}, l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}, r = \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_{n-1} \end{bmatrix}.$$

В (18) аргумент x_k матрицы и функциональных коэффициентов опущен для краткости.

Решение СЛАУ (17), (18) определяет вектор $l(x_k)$ из управления (12), при котором собственные числа матрицы $D_{\text{г}}(x_k) = A_d(x_k) - b_d(x_k)l'(x_k)$ при всех $x_k \subset \Omega_U$ и $k =$

$0, 1, 2, \ldots$ удовлетворяют условиям (16). Варьируя эти числа, можно обеспечить требуемую длительность переходных процессов при определенных условиях.

Коэффициент $l_{\text{г},g}(x_k)$ из того же управления (12) определяется выражением

(19) $$l_{\text{г},g}(x_k) = (-1)^n \delta_0^* / \gamma_{\text{об}}(x_k),\ \forall\, x \subset \Omega_{Ud}$$

с учетом равенств $\det[zE - D_{\text{г}}(x_k)] = D^*(z)$ и (11).

Подставляя управление (12) в (1) при $u = u_{\text{г}k}$, получим

(20) $$\dot{x} = A(x)x - b(x)l'(x_k)x_k + b(x)l_{\text{г},g}(x_k)g_k + h(x)f,\ kT \le t < (k+1)T,$$
$$y = c'(x)x + d(x)[l_{\text{г}g}(x_k)g_k - l'(x_k)x_k],\ k\ =\ 0, 1, 2, \ldots .$$

Уравнения (20), очевидно, описывают гибридную систему, причем период T здесь может быть значительно большим, чем те значения, которые принимаются при реализации нелинейных систем, синтезированных как непрерывные [1, 2].

Пусть $x(t) = x(t, x_0)$ решение первого уравнения свободной системы (20), т.е. при $g(t) \equiv f(t) \equiv 0$. Применяя к этой свободной системе метод квазилинейной дискретизации, т.е. соотношения (2)-(8), получим

(21) $$x_{k+1} = D_{\text{г}}(x_k)x_k,\ x_k(x_0) \in \Omega_{Ud},\ k\ =\ 0, 1, 2, \ldots,$$

По определению вектора $l(x_k)$матрица $D_{\text{г}}(x_k)$ в (21) имеет собственные числа меньшие единицы. Это позволяет методом функций Ляпунова показать, что решение дискретной системы (21) асимптотически устойчиво, т.е. $x_k(x_0) \to 0$ при $x_k(x_0) \subset \Omega_{\Theta\,\text{г}} \in \Omega_{Ud}$ и $k \to \infty$,а также доказать теорему об устойчивости гибридной системы (20). Здесь $\Omega_{\Theta\text{г}}$ – область R^n, на границе которой разность указанной функции Ляпунова обращается в нуль.

Теорема. *Если выполняются условия* (5), (9) *и* (16)*, а вектор* $l(x_k)$ *в выражениях* (12), (20) *определяется соотношениями* (6)-(8), (13)-(18)*, то положение равновесия* $x = 0$ *гибридной системы* (20) *является асимптотически устойчивым при всех* $x(t, x_0) \subset \Omega_{\Theta\text{г}} \in \Omega_{Ud}$*, т.е.* $\lim x(t, x_0) = 0$ *при* $t \to \infty$.

Справедливость этой теоремы следует из непрерывности системы (20), поскольку $x_k(x_0) \to 0$ из (21) – это решение $x(t, x_0)$ системы (20) при $g(t) \equiv f(t) \equiv 0$, соответствующее дискретным моментам времени $t_k = kT$ при всех $k \in [0, \infty)$.

Приведенные выше соотношения (1), (5)-(19) составляют теоретическую базу метода квазилинейной дискретизации и метода синтеза дискретных законов управления как дискретными, так и непрерывными нелинейными объектами, которые могут быть представлены квазилинейными моделями, т.е. синтеза гибридных систем управления.

5. Методический пример

Синтезировать гибридную систему управления нелинейным объектом, который описывается уравнениями

(22) $$\dot{x}_1 = x_2 - x_1 \operatorname{arctg} 2x_1,\ \dot{x}_2 = x_2 \sin x_2 + 2u,\ \text{y} = 0{,}5\, x_1.$$

Замкнутая система должна иметь длительность переходного процесса при нулевых начальных условиях и задающем воздействии $g(t) = g_0 1(t)$ не более 5 с, а также нулевую ошибку по этому воздействию.

ДКЛМ (6)-(8) при $T = 0{,}4$ с, соответствующая объекту (22), удовлетворяет условиям (5), (9) и (10) при всех $\|x\| \le M_{\Omega\, d} < \infty$, т.е. поставленная задача синтеза имеет решение. Так как $n = 2$, то закон управления объектом (22) имеет вид:

(23) $$u_{\text{г},k} = l_{\text{г},g}(x_k)g_k - l_1(x_k)x_{1k} - l_2(x_k)x_{2k},\ k\ =\ 0, 1, 2, \ldots .$$

Коэффициенты $l_1(x_k), l_2(x_k)$ и $l_{\text{г},g}(x_k)$ определяются выражениями (6)-(8), (13)-(19) при всех k. Результаты моделирования замкнутой системы (22), (23) в MATLAB с применением функции ode45 при различных корнях z_1^*, z_2^* и начальных условиях показали, что система удовлетворяет заданным требованиям.

6. Заключение

Предложенный метод квазилинейной дискретизации позволяет создавать гибридные нелинейные системы управления непрерывными как аффинными, так и неаффинными по управлению и воздействиям объектами с дифференцируемыми нелинейностями. Причем период цифрового управления может быть значительно больше, чем при реализации нелинейных систем, синтезированных как непрерывные. При нулевых начальных условиях и ступенчатом задающем воздействии обеспечивается требуемое время регулирования и равенство нулю статической ошибки по этому воздействию. Предложенный метод может быть применен для синтеза систем управления нелинейными объектами как различных производств, так и других сфер.

Список литературы

1. Кван Н.В., Семичевская Н.П. Гибридные системы робастного управления нелинейными объектами // Вестник АмГУ. 2018. № 51(22). С. 33-47.
2. Шорников Ю.В., Бессонов А.В. Унифицированный подход к компьютерному моделированию гибридных систем // Информационные технологии моделирования и управления. 2015. № 3(93). С. 286-298.
3. Kazantzis N., Kravaris C. Time-discretization of nonlinear control systems via Taylor method // Computers and Chemical Engineering. 1999. Vol. 23, No. 9. P. 764-784.
4. Nguyen-Van T., Hori N., Nahon M. A discrete-time model of nonlinear non-autonomous systems // 2014 American Control Conference (ACC). June 4-6, 2014. Portland. Oregon. USA. 2014. P. 5150-5155.
5. Zong Y. A discretization method for the nonlinear state delay system // Information Technology Journal. 2014. Vol. 13, No. 6. P. 1222-1227.
6. Гайдук А.Р. Численный метод синтеза квазилинейных моделей нелинейных объектов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2021. Т. 22, № 6. С. 283-290.
7. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 290 с.
8. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972. 232 с.
9. Гайдук А.Р., Плаксиенко В.С., Кабалан А.Е.А. Алгебраический полиномиально-матричный метод синтеза нелинейных астатических систем // Математические методы в технологиях и технике. 2022. № 1. С. 41-45.