УДК 62.50

СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА, ПОСТРОЕННОЙ НА БАЗЕ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

А.М. Зенкин
Университет ИТМО
Россия, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., д.49, лит. А5
E-mail: am_zenkin@itmo.ru

А.А. Перегудин
Университет ИТМО
Россия, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., д.49, лит. А5
E-mail: peregudin@itmo.ru

А.А. Бобцов
Университет ИТМО
Россия, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., д.49, лит. А5
E-mail: bobtsov@itmo.ru

Ключевые слова: стабилизация нелинейных систем, функция Ляпунова, второй метод Ляпунова, машинное обучение, генетический алгоритм.

Аннотация: В работе предложен новый метод синтеза регулятора для нелинейных систем с использованием функции Ляпунова, построенной на базе генетического алгоритма и представляющей собой возведенные в положительные степени элементы вектора состояния объекта, умноженные на неизвестные коэффициенты. Поиск коэффициентов осуществляется классическим генетическим алгоритмом с использованием целевой функции. В отличие от большинства предлагаемых методов, подход на основе генетического алгоритма не требует использования обучающей выборки, которая ограничивает структуру объектов управления.

1. Введение

В статье представлен метод синтеза регулятора для широкого класса гладких непрерывных динамических систем с измеряемым вектором состояния. В основе метода используется функция Ляпунова, поиск которой в общем виде является трудной и нетривиальной задачей [1–3], активно исследуемой долгие годы научным сообществом. Поскольку машинное обучение позволяет аппроксимировать практически любую нелинейную функцию, в работе [4] было показано, что данный подход может использоваться для поиска функции Ляпунова, которая раскладывается в бесконечную сумму степенных функций с коэффициентами ряда, подбираемых генетическим алгоритмом. В качестве оценки работы алгоритма используется специально сформированная целевая функция. В работе [4] были проведены исследования влияния начальных условий генетического алгоритма на поиск функции Ляпунова, а также была сформулирована оценка сходимости генетического алгоритма. Результаты исследования показали, что предложенный метод превосходит подход [5] в том, что он покрывает более широкие области выполнения условий теоремы Ляпунова. Кроме того, данный метод предоставляет самые сильные гарантии в рамках альтернатив (асимптотическая устойчивость) и не требует использования заранее подготовленных вручную шаблонов функций Ляпунова. В данной работе рассматривается задача синтеза регулятора для нелинейных систем с использованием функции Ляпунова, построенной на базе генетического алгоритма.

2. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную систему (1):

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояние системы в момент времени t; u - сигнал управления, обеспечивающий замкнутой системе (1) глобальную асимптотическую устойчивость; $f : D \to \mathbb{R}^n, g : D \to \mathbb{R}^m$ – векторные поля, заданные на D.

Предположим, что в области D имеется точка/положение равновесия, т.е. такая точка $\overline{x} \in D$, для которой выполнено $f(\overline{x}) = 0$. Сигнал управления выбирается таким образом, чтобы для (1) существовала функция Ляпунова $V(x)$ с заданными свойствами (т.е. $V(x) > 0$ и $V(\dot{x}) < 0$ во всех точках, кроме точки равновесия).

Ставится задача синтеза регулятора, обеспечивающего нелинейной системе вида (1) глобальную асимптотическую устойчивость.

Поставленная задача будет решена при выполнении следующих предположений.

Предположение 1. *[6] Пусть система* (1) *устойчива по Ляпунову при нулевом входе с функцией Ляпунова $V \in C^r$, $r \geqslant 1$, и $\Omega \cap S = 0$.*

Предположение 2. *Функция $V(x)$ допускает разложение в ряд Тейлора в окрестности положения равновесия $\overline{x}$, сходящейся к ней во всех точках $x \in D$.*

Согласно Предположениям 1 – 2 для системы (1) существует функция Ляпунова, представляемая в виде ряда Тейлора

$$V(x_1, \dots, x_n) = \sum_{m=0}^{N} \sum_{k_1+\ldots+k_n=m} \prod_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})^{k_i}}{k_i!} \frac{\partial^m V}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_2) + R_N(x_1 \ldots x_n), \tag{2}$$

где R_N – остаточный член ряда Тейлора.

Назовем потенциальной функцией Ляпунова выражение вида

$$L(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{m=0}^{N} \sum_{k_1+\ldots+k_n=m} \prod_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^{k_i} p_{k_1,\ldots,k_n}, \tag{3}$$

где $p_{k_1,\ldots,k_n} \in R$ – числовые параметры, подлежащие определению.

Если эти параметры найдены точно, т.е. если выполнено

$$p_{k_1,...,k_n} = \frac{1}{k_i!}\frac{\partial^m V}{\partial x_1 ... \partial x_n}(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_2), \tag{4}$$

то потенциальная функция (3) совпадает с функцией Ляпунова (2) с точностью до остаточного члена. Из предположения 2 следует, что $\lim_{N\to\infty} R_N(x_1, ...x_n) = 0$ при всех $(x_1, \ldots, x_n) = x \in D$, следовательно в области D функция V может быть сколько угодно хорошо приближена функцией L за счет правильного выбора параметров $p_{k_1,...,k_n}$.

Теорема 1. *[6] Пусть система* (1) *устойчива по Ляпунову при нулевом входе с функцией Ляпунова* $V \in C^r$, $r \geqslant 1$, *и* $\Omega \cap S = 0$. *Тогда закон управления*

$$u = -\gamma L_g V(x) \tag{5}$$

при любом $\gamma > 0$ *обеспечивает глобальную асимптотическую устойчивость начала координат системы* (1), *где* $L_g V(x)$ *– производная Ли от функции V(x) по направлению векторного поля g.*

Таким образом, с учетом Предположений 1 – 2, уравнения (3) и Теоремы 1 сформулируем цель настоящей работы – разработка алгоритма стабилизации нелинейной системы с использованием закона управления

$$u = -\gamma \frac{\partial V}{\partial x} g(x). \tag{6}$$

Таким образом ставится задачи синтеза поиска $V(x)$, которая совместно с выбором закона управления вида (6) обеспечивает глобальную асимптотическую устойчивость для замкнутой системы (1).

3. Вычисление целевой функции

Поиск параметров $p_{k_1,...,k_n}$ осуществляется через метод, предложенный в работе [5], в основе которого лежит генетический алгоритм. Это эвристический метод поиска, который применяется для решения задач оптимизации и моделирования. Он основан на случайном подборе, комбинировании и изменении параметров с использованием механизмов, аналогичных естественному отбору в природе. Алгоритм поиска потенциальной функции Ляпунова заключается в создании начальной популяции потенциальных функций Ляпунова, их оценке на основе заданных критериев, сохранении лучших функций, к которым применяются генетические операторы (скрещивание и мутация) для создания новых потомков, которые также оцениваются. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будет найдена наилучшая функция Ляпунова. Алгоритм использует целевую функцию $J(p)$, основанную на проверке выполнения условий теоремы Ляпунова, в качестве обратной связи. Размер начальной популяции выбирается на стадии применения алгоритма в зависимости от имеющихся вычислительных ресурсов.

Целевая функция $J(p)$ зависит от коэффициентов p, используемых для оптимизации, и принимает значения от 0 до 1, где 0 соответствует лучшему решению, а 1 – худшему. Пусть имеется нелинейная автономная система (1) и потенциальная функция Ляпунова (3), рассмотрим ограниченную область Ω, в каждой точки которой проверим условия теоремы Ляпунова. Обозначим точки, которые удовлетворяют условиям теоремы, как X, не удовлетворяют – Y.

$$J(p) = \frac{|Y|}{|X| + |Y|},$$

где $0 \leqslant J \leqslant 1$.

Таким образом, при $J = 0$ будут выполнены все условия теоремы Ляпунова. Более подробно суть предлагаемых вычислений рассмотрим на примере нелинейной системы из работы [6].

4. Пример реализации алгоритма

Для иллюстрации работоспособности предложенного метода рассмотрим пример поиска функции Ляпунова для нелинейных систем с применением генетического алгоритма. В качестве объекта исследования была взята система вида

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_1 \cdot x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Воспользуемся формулой (3) для разложения потенциальной функции Ляпунова до третьей степени.

$$L(x_1, x_2) = p_{1,0}x_1 + p_{0,1}x_2 + p_{2,0}x_1^2 + p_{1,1}x_1x_2 + p_{0,2}x_2^2 + \\ p_{3,0}x_1^3 + p_{2,1}x_1^2x_2 + p_{1,2}x_1x_2^2 + p_{0,3}x_2^3.$$

Результат поиска функции Ляпунова для системы (7) с параметрами, представленными в Таблице 1.

$$L(x_1, x_2) = x_2^2.$$

Таблица 1. Исходные параметры генетического алгоритма, используемые для поиска функции Ляпунова системы (7)

Параметр	Значение
Диапазон коэффициентов	[-5;5]
Область Ω	[-2;2]
Размер популяции	100
Вероятность мутации	15%
Вероятность скрещивания	40%

Далее формируется закон управления с использованием формулы (6)

$$u = -\gamma L_g V(x_1, x_2).$$

Сходимость генетического алгоритма исследуется по вероятности, гарантируя, что будет найдено хотя бы одно оптимальное решение с вероятностью не менее заданной за фиксированное число итераций алгоритма [5].

5. Заключение

В статье был описан метод синтеза регулятора для широкого класса гладких непрерывных динамических систем с измеряемым вектором состояния через поиск функции Ляпунова. Для синтеза функции использовалось разложение потенциальной функции (3) в ряд Тейлора с неизвестными коэффициентами, которые находились с помощью генетического алгоритма. Этот метод отличается от других подходов, так как не требует использования шаблонных функций Ляпунова.

Список литературы

1. Hafstein S., Giesl P. Computational methods for Lyapunov functions // Discrete Continuous Dynamic System. 2015. Vol. 20, No 8.
2. Hernandez-Solano Y. Atencia M. Numerical Methods That Preserve a Lyapunov Function for Ordinary Differential Equations // Mathematics. 2022. Vol. 11, No. 1. P. 71.
3. Hafstein S., Giesl P. Review on computational methods for Lyapunov functions // Discrete Continuous Dynamic System. 2015. Vol. 20, No. 8. P. 2291-2331.
4. Зенкин А.М., Перегудин А.А., Бобцов А.А. Метод поиска функции Ляпунова для анализа устойчивости нелинейных систем с использованием генетического алгоритма // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2023. Т. 23, №. 5. С. 2291-2331.
5. Abate, A., Ahmed, D., Giacobbe, M., Peruffo, A. Formal Synthesis of Lyapunov Neural Network // IEEE Control Syst Lett. 2021. Vol. 5, No. 3. P. 773-778.
6. Полушин И.Г., Фрадков А.Л., Хилл Д.Д. Пассивность и пассификация нелинейных систем // Автоматика и телемеханика. 2000. №. 3. С. 3–37.