УДК 681.5

ФИНИТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ В ПРИСУТСТВИИ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ И АДДИТИВНЫХ ВОЗМУЩАЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Д.Е. Коновалов
Университет ИТМО
Россия, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, лит. А
E-mail: d.e.konovalov@mail.ru

В.А. Жданов
Университет ИТМО
Россия, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, лит. А
E-mail: viktor.zhdanov14@yandex.ru

К.А. Зименко
Университет ИТМО
Россия, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, лит. А
E-mail: konstantin.zimenko@itmo.ru

А.С. Кремлев
Университет ИТМО
Россия, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, лит. А
E-mail: kremlev_artem@itmo.ru

Ключевые слова: дескрипторные системы, финитные алгоритмы управления, компенсация возмущений, робастность.

Аннотация: Статья посвящена проблеме робастного финитного управления для дескрипторных систем в присутствии нелинейностей и аддитивных возмущающих воздействий. Настройка параметров регулятора основана на решении линейных матричных уравнений и неравенств. Предлагаемый регулятор не требует преобразования системы к каноническому виду и обеспечивает финитную сходимость для представленного класса секторных нелинейностей и возмущений.

1. Введение

Дескрипторные системы широко используются для описания большого класса технических, химических, биологических и других систем (см., например, [1–5]). В свете современных требований к системам автоматического управления, для ряда приложений проблема синтеза финитного и робастного управления представляет повышенный интерес [6, 7]. Для систем, представленных в стандартной форме на основе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), финитная устойчивость, как правило, обеспечивается с применением скользящих режимов [8–10] или однородных регуляторов [11–13]. Помимо финитной устойчивости такие методы управления обеспечивают ряд робастных свойств, необходимых на практике. В работах [14–16] концепция однородных систем была распространена на класс дескрипторных, и были предложены методы синтеза финитных регуляторов и наблюдателей на основе данной концепции. В [16] показано, что такие однородные регуляторы и наблюдатели обеспечивают устойчивость по входу к состоянию по отношению к аддитивным возмущениям и шумам измерений. Настоящая робота посвящена дальнейшему развитию теории однородности на класс дескрипторных систем, где представлен количественный анализ робастности регулятора из [15].

Используемые обозначения: $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, где $\mathbb{R}$ – поле вещественных чисел; $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел; $\lambda(E, A) = \{s | s \in \mathbb{C},\ s$ – конечно, $\det(sE - A) = 0\}$ для $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; $P > 0$ (< 0; $\geqslant 0$; $\leqslant 0$) для $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ означает, что матрица P симметрична и положительно (отрицательно) определена (полуопределена).

2. Предварительные данные

Рассмотрим дескрипторную систему

$$E\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывная функция, $f(0) = 0$ и $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ при $\operatorname{rank}(E) = r \leqslant n$. Предполагается, что начальные условия x_0 являются согласованными, а система (1) имеет единственное решение $\Phi_{x_0}(t)$.

Определение 1 ([15]). *Пусть $\mathbf{d}_E(s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ определяет семейство расширений в виде $\mathbf{d}_E(s) := e^{G_\mathbf{d} s}$, где $G_\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – антигурвицева матрица генератора расширений, тогда пара (E, f) называется $\mathbf{d}_E$-однородной степени $\nu \in \mathbb{R}$, если для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}$ выполняются условия $E\mathbf{d}_E(s) = \Xi(s)E$, $f(\mathbf{d}_E(s)x) = e^{\nu s}\Xi(s)f(x)$, где $\Xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ несингулярна для всех $s \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; система (1) является $\mathbf{d}_E$-однородной если пара (E, f) $\mathbf{d}_E$-однородна.*

Согласно [4], существует несингулярная матрица $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, что $X^T E = E^T X \geqslant 0$ и $x^T X^T E x = 0$, только если $Ex = 0$. Обозначив $\|x\|_{X^T E} = \sqrt{x^T X^T E x}$, для множества $\mathcal{A} := \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} | Ex \neq 0\}$ представим неявно определенную функцию Ляпунова $V(\cdot) = \|\cdot\|_{\mathbf{d}_E} : \mathcal{A} \cup \{0\} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ в виде $V(x) = \|x\|_{\mathbf{d}_E} = e^{s_x}$, где $s_x \in \mathbb{R}$ такое, что $\|\mathbf{d}_E(-s_x)x\|_{X^T E} = 1$. Отметим, что $\|\mathbf{d}_E(s)x\|_{\mathbf{d}_E} = e^s\|x\|_{\mathbf{d}_E}$ и $\|\mathbf{d}_E(-\ln\|x\|_{\mathbf{d}_E})x\|_{X^T E} = 1$.

Далее рассмотрим линейную дескрипторную систему

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

где триплет (E, A, B) является полностью управляемым. Пусть пара (E, A) регулярна, т.е. существуют такие несингулярные матрицы $Q, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, что

$$QEP = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \quad QAP = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где $N \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ нильпотентна, $A_1 \in \mathbb{R}^{r\times r}$.

Теорема 1 ([15]). *Пусть управление выбрано в форме*

$$u(x) = K_E x + \|x\|_{\mathbf{d}_E} K \mathbf{d}_E(-\ln \|x\|_{\mathbf{d}_E}) x, \tag{4}$$

1. *$K_E \in \mathbb{R}^{m\times n}$ выбрано таким образом, что $\lambda(E,(A+BK_E)) = 0$;*
2. *для некоторого $\nu \in [-1,0)$ система матричных уравнений и неравенств*

$$EM = LE, \quad (A+BK_E)M = (L+\nu I_n)(A+BK_E), \tag{5a}$$

$$(L+(\nu-1)I_n)B = 0, \quad M + M^T + 2aI_n > 0 \tag{5b}$$

разрешима для некоторых $M, L \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $a \in \mathbb{R}$;

3. *матрица обратных связей $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $\beta \in \mathbb{R}_+$ выбраны таким образом, что*

$$R^T E^T = ER \geqslant 0, \begin{bmatrix} E(M+aI_n)R + R^T(M^T+aI_n)E^T & R^T E^T \\ ER & \Gamma \end{bmatrix} \geqslant 0, \Gamma > 0, \tag{6a}$$

$$(A+BK_E)R + R^T(A+BK_E)^T + BY + Y^T B^T \leqslant -\beta((L+aI_n)ER + R^T E^T(L^T+aI_n)) \tag{6b}$$

выполняются для $R, \Gamma \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $K = YX$, $X = R^{-1}$ и $G_{\mathbf{d}} = M + aI_n$.

Тогда замкнутая система (2), (4) импульсно управляема и финитно устойчива с оценкой времени установления: $T(x_0) \leqslant -\frac{1}{\beta\nu}\|x_0\|_{\mathbf{d}_E}^{-\nu}$.

Здесь выполнение условий 1 и 2 обеспечивает однородность замкнутой системы со степенью однородности ν и генератором расширения $G_{\mathbf{d}} = M + aI_n$, $\Xi(s) = Q^{-1}\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & e^{-\nu s} I_{n_2}\end{bmatrix} e^{Gs} Q$, где $G = P^{-1} G_{\mathbf{d}} P$; выполнение условия 3 гарантирует финитную устойчивость решений (более подробно см. [15, Теорема 2]). Причем согласно [5] неравенства (6a), (6b) гарантируют безымпульсное поведение системы.

3. Основной результат

Рассмотрим дескрипторную систему следующего вида:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + g(x(t),t), \quad x(0) = x_0, \quad t \geqslant 0, \tag{7}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^m$ – сигнал управления, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ – функция, описывающая нелинейности системы и аддитивные возмущающие воздуйствия, триплет матриц $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ полностью управляем.

В [14–16] были предложены алгоритмы финитного управления и наблюдения для (7) при $g \equiv 0$, а также предложен качественный анализ устойчивости по входу к состоянию. Основной задачей данного исследования является количественный анализ робастной финитной устойчивости замкнутой системы (7), (4) при наличии нелинейностей и возмущающих воздействий g.

Теорема 2. *Пусть условия 1 и 2 Теоремы 1 выполнены и*

- *для $\sigma, \beta \in \mathbb{R}_+$ система линейных матричных неравенств (6a),*

$$\begin{aligned} &(A + BK_E + \sigma E + \beta E G_{\mathbf{d}})\, R + R^T (A + BK_E + \sigma E + \beta E G_{\mathbf{d}})^T \\ &\qquad + BY + Y^T B^T + \tfrac{1}{2}\Omega \leqslant 0, \qquad \Omega > 0 \end{aligned} \tag{8}$$

разрешима для $R, \Gamma, \Omega \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $G_{\mathbf{d}} = M + aI_n$;

- *выполняется неравенство*

$$\sigma\|x\|^{2\nu}_{\mathbf{d}_E} \geqslant g^T Q^{-1^T} \Xi^T(-\ln\|x\|_{\mathbf{d}_E})\Omega^{-1}\Xi(-\ln\|x\|_{\mathbf{d}_E})Q^{-1}g, \tag{9}$$

где $\Xi(s) = Q^{-1}\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & e^{-\nu s} I_{n_2}\end{bmatrix} e^{Gs}Q$, $G = P^{-1}G_{\mathbf{d}}P$, *и* Q, P *соответствуют (3).*

Тогда замкнутая система (7), (4) импульсно управляема и финитно устойчива со следующей оценкой времени установления: $T(x_0) \leqslant -\frac{1}{\beta\nu}\|x_0\|^{-\nu}_{\mathbf{d}_E}$.

Доказательство теоремы 2. Согласно [15, Теорема 2] условия 1 и 2 из Теоремы 1 и неравенства (6a), (8) обеспечивают однородность (при $g \equiv 0$) и безымпульсность (при согласованных начальных условиях) замкнутой системы со степенью однородности ν, генератором расширения $G_{\mathbf{d}}$ и $\Xi(s) = Q^{-1}\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & e^{-\nu s} I_{n_2}\end{bmatrix} e^{Gs}Q$, $G = P^{-1}G_{\mathbf{d}}P$, где матрицы Q, P соответствуют (3). Как и в случае Теоремы 1 рассмотрим кандидат функции Ляпунова в виде однородной канонической нормы $V(x) = \|x\|_{\mathbf{d}_E}$. Так как $\|x\|_{\mathbf{d}_E} = e^s : \|\mathbf{d}_E(-s)x\|_{X^TE} = 1$, то $\frac{\partial\|\mathbf{d}_E(-s)x\|_{X^TE}}{\partial s} = -\|\mathbf{d}_E(-s)x\|^{-1}_{X^TE} x^T \mathbf{d}^T_E(-s) X^T E G_{\mathbf{d}} \mathbf{d}_E(-s)x$ и $\frac{\partial\|\mathbf{d}_E(-s)x\|_{X^TE}}{\partial x} = \|\mathbf{d}_E(-s)x\|^{-1}_{X^TE} x^T \mathbf{d}^T_E(-s) X^T E \mathbf{d}_E(-s)$. Тогда согласно теореме о неявной функции [17] $\left(\frac{\partial s}{\partial x} = -\left[\frac{\partial\|\mathbf{d}_E(-s)x\|_E}{\partial s}\right]^{-1}\frac{\partial\|\mathbf{d}_E(-s)x\|_E}{\partial x}\right)$:

$$\begin{aligned}
\dot V &= \tfrac{\partial}{\partial t}\|x\|_{\mathbf{d}_E} = \tfrac{\partial}{\partial x}\|x\|_{\mathbf{d}_E}\dot x = e^s \tfrac{\partial s}{\partial x}\Big|_{s=\ln\|x\|_{\mathbf{d}_E}} \dot x = \|x\|_{\mathbf{d}_E}\Upsilon z^T X^T E \mathbf{d}_E(-\ln\|x\|_{\mathbf{d}_E})\dot x \\
&= \|x\|_{\mathbf{d}_E}\Upsilon z^T X^T Q^{-1}\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \|x\|^{\nu}_{\mathbf{d}_E} I_{n_2}\end{bmatrix}\chi\left(Ax + BK_E x + \|x\|_{\mathbf{d}_E} BK\mathbf{d}_E(-\ln\|x\|_{\mathbf{d}_E})x + g\right) \\
&= \|x\|^{1+\nu}_{\mathbf{d}_E}\Upsilon z^T X^T\left(A + BK_E + BK\right)z + \|x\|_{\mathbf{d}_E}\Upsilon z^T X^T Q^{-1}\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \|x\|^{\nu}_{\mathbf{d}_E} I_{n_2}\end{bmatrix}\chi g \\
&= \|x\|_{\mathbf{d}_E}\Upsilon\Theta^T\begin{bmatrix} \begin{matrix}\|x\|^{\nu}_{\mathbf{d}_E}\frac{1}{2}\left(X^T\left(A + BK_E + BK + \sigma E + \beta E G_{\mathbf{d}}\right)\right. \\ \left. + \left(A + BK_E + BK + \sigma E + \beta E G_{\mathbf{d}}\right)^T X\ \right)\end{matrix} & \frac{1}{2}X^T \\ \frac{1}{2}X & -\|x\|^{-\nu}_{\mathbf{d}_E}\Omega^{-1}\end{bmatrix}\Theta \\
&\quad -\sigma\|x\|^{1+\nu}_{\mathbf{d}_E}\Upsilon z^T X^T E z + \|x\|^{1-\nu}_{\mathbf{d}_E}\Upsilon g^T \chi^T \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \|x\|^{\nu}_{\mathbf{d}_E} I_{n_2}\end{bmatrix} Q^{-1^T}\Omega^{-1}Q^{-1}\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \|x\|^{\nu}_{\mathbf{d}_E} I_{n_2}\end{bmatrix}\chi g \\
&\quad -\tfrac{1}{2}\beta\|x\|^{\nu+1}_{\mathbf{d}_E}\Upsilon z\left(X^T E G_{\mathbf{d}} + G^T_{\mathbf{d}} E^T X\right)z,
\end{aligned} \tag{10}$$

где $\Theta = \begin{bmatrix} z \\ Q^{-1}\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \|x\|^{\nu}_{\mathbf{d}_E} I_{n_2}\end{bmatrix}\chi g\end{bmatrix}$, $\Upsilon = \left(z^T X^T E G_{\mathbf{d}} z\right)^{-1}$, $\chi = e^{-G\ln\|x\|_{\mathbf{d}_E}}$, $z = \mathbf{d}_E(-\ln\|x\|_{\mathbf{d}_E})x$.

Применяя дополнение Шура, получим, что матричное неравенство $\begin{bmatrix} \begin{matrix}\|x\|^{\nu}_{\mathbf{d}_E}\frac{1}{2}\left(X^T\left(A + BK_E + BK + \sigma E + \beta E G_{\mathbf{d}}\right)\right. \\ \left. + \left(A + BK_E + BK + \sigma E + \beta E G_{\mathbf{d}}\right)^T X\right)\end{matrix} & \frac{1}{2}X^T \\ \frac{1}{2}X & -\|x\|^{-\nu}_{\mathbf{d}_E}\Omega^{-1}\end{bmatrix} \leqslant 0$ эквивалентно следующей системе матричных неравенств

$$\begin{aligned}
&\Omega > 0, \quad 2\left(X^T\left(A + BK_E + BK + \sigma E + \beta E G_{\mathbf{d}}\right) + \right. \\
&\qquad \left.\left(A + BK_E + BK + \sigma E + \beta E G_{\mathbf{d}}\right)^T X\right) + X^T\Omega X \leqslant 0
\end{aligned} \tag{11}$$

или с учетом $Y = KX^{-1}$, $R = X^{-1}$ из (11) получим линейные матричные неравенства (8). Тогда, возвращаясь к (10) и учитывая $z^T X^T E z = 1$,

$\Xi(s) = Q^{-1}\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & e^{-\nu s} I_{n_2}\end{bmatrix} e^{Gs}Q$ и (9), получим

$$
\begin{aligned}
\dot V &\leqslant -\sigma\|x\|_{\mathbf{d}_E}^{1+\nu}\Upsilon z^T X^T E z + \|x\|_{\mathbf{d}_E}^{1-\nu}\Upsilon g^T\chi^T \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \|x\|_{\mathbf{d}_E}^{\nu} I_{n_2}\end{bmatrix} {Q^{-1}}^T\Omega^{-1}Q^{-1}\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \|x\|_{\mathbf{d}_E}^{\nu} I_{n_2}\end{bmatrix}\chi g \\
&\quad -\tfrac{1}{2}\beta\|x\|_{\mathbf{d}_E}^{\nu+1}\Upsilon z\left(X^T E G_{\mathbf{d}} + G_{\mathbf{d}}^T E^T X\right) z \\
&= \|x\|_{\mathbf{d}_E}\Upsilon\left(-\sigma\|x\|_{\mathbf{d}_E}^{\nu} + \|x\|_{\mathbf{d}_E}^{-\nu} g^T {Q^{-1}}^T \Xi^T(-\ln\|x\|_{\mathbf{d}_E})\Omega^{-1}\Xi(-\ln\|x\|_{\mathbf{d}_E})Q^{-1}g\right) \\
&\quad -\tfrac{1}{2}\beta\|x\|_{\mathbf{d}_E}^{\nu+1}\Upsilon z\left(X^T E G_{\mathbf{d}} + G_{\mathbf{d}}^T E^T X\right) z \\
&\leqslant -\tfrac{1}{2}\beta\|x\|_{\mathbf{d}_E}^{\nu+1}\Upsilon z\left(X^T E G_{\mathbf{d}} + G_{\mathbf{d}}^T E^T X\right) z = -\beta\|x\|_{\mathbf{d}_E}^{\nu+1}\frac{\frac{1}{2}z\left(X^T E G_{\mathbf{d}} + G_{\mathbf{d}}^T E^T X\right)z}{z^T X^T E G_{\mathbf{d}} z} = -\beta V^{\nu+1}.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Наконец, применяя лемму сравнения, получаем, что (12) гарантирует (см. [6]), что система (7), (4) является финитно устойчивой и $T(x_0)\leqslant -\frac{1}{\beta\nu}V_0^{-\nu}$, где $V_0 = V(x_0)$.

4. Заключение

В работе представлен анализ финитной устойчивости однородного регулятора (4) при наличии в дескрипторной системе секторных нелинейностей и аддитивных возмущающих воздействий. Настройка параметров регулятора представлена в виде решения линейных матричных уравнений и неравенств. Предложенный метод робастного управления не требует преобразования системы к канонической полуявной форме или перехода к системе ОДУ, что позволяет избежать вычислительных ошибок при преобразовании и упростить настройку и реализацию.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No 22-29-00344.

Список литературы

1. Dai L. (ed.). Singular control systems. Berlin, Heidelberg: Springer, 1989.
2. Kumar A. Control of nonlinear differential algebraic equation systems with applications to chemical processes. Chapman and Hall/CRC, 2020.
3. Reis T. An infinite dimensional descriptor system model for electrical circuits with transmission lines // Proc. International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems. 2004.
4. Xu S., Lam J. Robust control and filtering of singular systems. Berlin: Springer, 2006. P. xii+234.
5. Wang H.S., Yung C.F., Chang F.R. H-infinity Control for Nonlinear Descriptor Systems. Springer, 2006.
6. Bhat S.P., Bernstein D.S. Finite-time stability of continuous autonomous systems // SIAM Journal on Control and optimization. 2000. Vol. 38, No. 3. P. 751-766.
7. Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W. Finite-time and fixed-time stabilization: Implicit Lyapunov function approach // Automatica. 2015. Vol. 51. P. 332-340.
8. Utkin V. Sliding modes in control and optimization. Springer, 2013.
9. Levant A. Homogeneity approach to high-order sliding mode design // Automatica. 2005. Vol. 41, No. 5. P. 823-830.
10. Polyakov A. Sliding mode control design using canonical homogeneous norm // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2019. Vol. 29, No. 3. P. 682-701.
11. Kawski M. Geometric homogeneity and stabilization // IFAC Proceedings Volumes. 1995. Vol. 28, No. 14. P. 147-152.
12. Zimenko K., Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W. Robust feedback stabilization of linear mimo systems using generalized homogenization // IEEE Transactions on Automatic Control. 2020. Vol. AC-65, No. 12. P. 5429-5436.
13. Polyakov A. Generalized homogeneity in systems and control. – Cham: Springer, 2020.

14. Konovalov D., Zimenko K., Belov A., Wang H. Homogeneity-based finite-time stabilization of linear descriptor systems // IEEE Conference on Decision and Control. 2021. P. 3901-3905.
15. Konovalov D. E., Shopa N. M., Zimenko K. A., Kremlev A. S., Belov A. A. On Homogeneous Descriptor Systems and Homogeneity-Based Finite-Time Control of Linear Descriptor Systems // IEEE Access. 2022. Vol. 10. P. 110335-110343.
16. Konovalov D., Zimenko K., Kremlev A. Input-to-State Stability Analysis for Descriptor Homogeneous Systems // International Russian Automation Conference. 2023. P. 627-633.
17. John F. Introduction to calculus and analysis. Interscience, 1965.