УДК 681.511.46

УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ С ГАРАНТИЕЙ ЗАДАННОГО КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ

Б.Х. Нгуен
Институт Проблем Машиноведения РАН
Университет ИТМО
Россия, 199178, Санкт-Петербург, Большой проспект В.О., 61
Россия, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49
E-mail: leningrat206@gmail.com

Ключевые слова: нелинейные системы, стабилизация, нелинейное управление, линейные матричные неравенства.

Аннотация: Рассмотрена задача управления нелинейными системами типа Лурье с гарантией обеспечением выходной переменной в заданном множестве в любой момент времени. Для решения задачи использовалось специальное преобразование выхода, позволяющее свести исходную задачу с ограничениям по выходу к задаче без ограничений по вспомогательной переменной. Для новой системы предложен нелинейный закон управления с использованием техники линейных матричных неравенств (ЛМН). Приведен пример, иллюстрирующий эффективность предложенного метода и подтверждающий теоретические выводы.

1. Введение

На практике широко распространены задачи управления нелинейными системами. Среди них часто исследуются нелинейные объекты типа Лурье. Примерами таких систем могут быть колебательные системы, электромеханические объекты, манипуляторы, электроэнергетические сети, и т.д. Существует большое количество работ, посвященных управлению такими системами, например, см. [1–3]. Однако в этих работах удается обеспечить заданное качество регулирование только в установившемся режиме. В работах [4–6] предложен метод, позволяющий гарантировать нахождение выхода в некотором заданном множестве. Предлагаемый доклад посвящен управлению с гарантией заданного качества регулирования выходного сигнала в любой момент времени с использованием метода [4–6].

Доклад организован следующим образом. В разделе 2. приведена задача управления нелинейных систем в форме Лурье в заданном множестве. В разделе 3. предложен метод решения поставленной задачи. В разделе 4. рассмотрен пример в MATLAB, подтвеждающий теоретические результаты.

2. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную систему:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + G\phi(z) + Df, \\ y &= Cx, \quad z = Mx, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор измеряемых состояний; $u \in \mathbb{R}$ – сигнал управления; $y \in \mathbb{R}$ – регулируемый выход; $f \in \mathbb{R}$ – неизвестное возмущение такое, что $|f| \leqslant \bar{f}$; $z \in \mathbb{R}^q$ – аргумент нелинейности ϕ; матрицы A, B, C, D, G, M известны и имеют соотвествующие размерности. Система (1) имеет относительную степень, равную единице. Неизвестная нелинейность $\phi(\cdot) : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ удовлетворяет секторным ограничениям, т.е. для всех $z, \phi(z) = col\{\phi_1(z_1), ..., \phi_q(z_q)\} \in \mathbb{R}^q$ выполнены условия

$$k_{1i} \leqslant \frac{\phi_i(z_i)}{z_i} \leqslant k_{2i}, \quad \forall z_i \neq 0, i = 1, ..., q, \tag{2}$$

где k_{1i}, k_{2i} – некоторые известные константы.

Цель работы – синтез закона управления, стабилизирующего выходной сигнал y объекта (1) в следующем заданном множестве в любой момент времени:

$$\mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R} : \underline{g}(t) < y(t) < \overline{g}(t), \quad \forall t \geqslant 0\}, \tag{3}$$

где $\underline{g}(t)$ и $\overline{g}(t)$ — ограниченные дифференцируемые функции вместе с ограниченными первыми производными. Данные функции могут выбираться разработчиками по требованиям к работе системы.

3. Метод решения. Основной результат

Согласно [4], рассмотрим преобразование выхода $\varepsilon(t) = \Phi(y, t)$, где $\Phi : \mathcal{Y} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ – диффренцируемая функция, определенная следующим образом:

$$\Phi(y, t) = ln\left(\frac{y(t) - \underline{g}(t)}{\overline{g}(t) - y(t)}\right) \tag{4}$$

Видно, что для каждого момента времени $t \geqslant 0$, существует следующее обратное отображение:

$$y(t) = \Phi^{-1}(\varepsilon, t) = \frac{\overline{g}(t)e^{\varepsilon} + \underline{g}(t)}{e^{\varepsilon} + 1}. \tag{5}$$

Берем полную производную по времени функции $y(t)$ с учетом (5):

$$\dot{y} = \frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial \varepsilon}\dot{\varepsilon} + \frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial t}. \tag{6}$$

Принимая во внимание (1) с учетом $\frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial \varepsilon} > 0 \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, мы получим динамку для переменной ε как:

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} \Big[CAx + CBu + CG\varphi + \psi\Big], \tag{7}$$

где $\psi = CDf - \frac{\partial\Phi^{-1}}{\partial t}$. Функция $\psi(t)$ является ограниченной по t, т.е., $|\psi(t)| \leqslant \bar{\psi} := \|CD\|\bar{f} + \sup_{t\geqslant 0}\left(\frac{\partial\Phi^{-1}}{\partial t}\right) = \|CD\|\bar{f} + \max\{\sup_{t\geqslant 0}|\dot{\bar{g}}(t)|, \sup_{t\geqslant 0}|\dot{\underline{g}}(t)|\}$.

Зададим кусочно-непрерывный закон управления в виде:

$$u = -(CB)^{-1}[K\varepsilon + CAx + \mu sign(\varepsilon)\|CG\|\|M\||x|], \tag{8}$$

где $K \in \mathbb{R}$ – искомый коэффициент усиления в управлении, $\mu = \max_i\{k_{1i}, k_{2i}\}$, функция $sign(\varepsilon)$ определяется как $sign(\varepsilon) = \begin{cases} 1, & \varepsilon \geqslant 0, \\ -1, & \varepsilon < 0. \end{cases}$

Сформулируем основную теорему данной работы.

Теорема 1. *Для заданных чисел c, $\bar{\psi}$, $\alpha > 0$, если существуют положительное число K и положительные коэффициенты τ_1, $\tau_2 > 0$ такие, что выполнены неравенства*

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} -K + \alpha + 0,5\tau_1 & 0,5 \\ \star & -\tau_2 \end{bmatrix} \leqslant 0, \\ &-c\tau_1 + \bar{\psi}^2\tau_2 \leqslant 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\star$ означает симметричный блок в симметричной матрице.

Тогда закон управления (8) обеспечивает целевое условие (3).

Доказательство теоремы 1. Подставив (8) в (7), получим замкнутую систему

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial\Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1}\Big[-K\varepsilon - \mu sign(\varepsilon)\|CG\|\|M\||x| + CG\phi + \psi\Big]. \tag{10}$$

Выберем функцию Ляпунова вида $V = \frac{1}{2}\varepsilon^2$. Найдем от нее полную производную по времени вдоль решений (10):

$$\dot{V} = \varepsilon\dot{\varepsilon} = \varepsilon\left(\frac{\partial\Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1}\Big[-K\varepsilon - \mu sign(\varepsilon)\|CG\|\|M\||x| + CG\phi + \psi\Big]. \tag{11}$$

Потребуем при $V \geqslant c$ выполнение условия $\dot{V} \leqslant -2\alpha V$, α – любое известное положительное число, т.е. $\dot{V} < 0$, $\forall\varepsilon \notin \{\varepsilon \in \mathbb{R} : |\varepsilon| < \sqrt{2c},\ c > 0\}$. Так как $CG\phi \leqslant |CG\phi| \leqslant \mu\|CG\|\|M\||x|$ и принимая во внимание ограничения $|\psi| \leqslant \bar{\psi}$, перепишем вышеназванные условия как

$$\begin{aligned} &(-K + \alpha)\varepsilon^2 + \varepsilon\psi \leqslant 0 \quad \forall\,(\varepsilon, \psi) : \\ &0,5\varepsilon^2 \geqslant c, \psi^2 \leqslant \bar{\psi}^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Обозначив $z = col\{\varepsilon, \psi\}$, перепишем (12) в матричном виде:

$$\begin{gathered} z^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} -K + \alpha & 0,5 \\ \star & 0 \end{bmatrix} z \leqslant 0, \\ z^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} -0,5 & 0 \\ \star & 0 \end{bmatrix} z \leqslant -c, z^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \star & 1 \end{bmatrix} z \leqslant \bar{\psi}^2. \end{gathered} \tag{13}$$

Согласно S-процедуре [7] неравенства (13) будут выполнены, если будут выполнены условия (9). Значит система (10) устойчива по вход-состоянию и сигнал $\varepsilon(t)$ ограничен. Благодаря преобразованию (4), выход $y(t)$ тоже ограничен и соотвественно ограничен вектор состояний $x(t)$ системы (1). Следовательно, будет ограничен сигнал управления $u(t)$ в (8). Согласно [4], целевое условие (3) будет выполнено. Теорема 1 доказана.

4. Пример

Рассмотрим неустойчивый объект (1) со следующими параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix},$$
$$f(t) = 0,1 + \sin(3t) + 0,5sat(d(t)), \phi(z) = \sin(z).$$

где $sat\{\cdot\}$ – функция насыщения, $d(t)$ – белый шум с мощностью шума и времени выборки 0,1. Тогда $\bar{f} = 1,6$.

Функции $\underline{g}(t)$ и $\overline{g}(t)$ зададим как:

$$\overline{g}(t) = \begin{cases} -3cos(t) + 0,2, & t < 2\pi, \\ cos(t) + 2,2, & t \geqslant 2\pi, \end{cases} \qquad \underline{g}(t) = \begin{cases} 3cos(t) - 0,2, & t < 2\pi, \\ cos(t) + 1,8, & t \geqslant 2\pi. \end{cases}$$

Запишем закон управления (8) в виде:

$$u = -(CB)^{-1}\left[Kln\left(\frac{y - \underline{g}}{\overline{g} - y}\right) + CAx + \mu sign\left(ln\left(\frac{y - \underline{g}}{\overline{g} - y}\right)\right)\|CG\|\|M\||x|\right].$$

Принимая во внимание (7), найдем $\bar{\psi} = 8,6$. С помощью пакета YALMIP [8] и решателя SEDUMI [9] найдем решение неравенства (9). Для $c = 100$, $\alpha = 2$ найдены $\tau_1 = 3,10, \tau_2 = 4,14, K = 6,54$. Для $c = 0,1$, $\alpha = 2$ найдены $\tau_1 = 45,47, \tau_2 = 0,04, K = 35,36$.

Переходные процессы в $y(t), u(t)$ и $f(t)$ при $x(0) = [1,1]^T$ показаны на рис. 1. Из рис. 1a видно, что выходной сигнал $y(t)$ никогда не достигает границ заданного множества. Заметим также из графика, что чем меньше значение параметра c, тем лучше подавляется влияние возмущений. На рис. 1b колебания управляющего сигнала объясняются наличием возмущения $f(t)$ (рис. 1c) в системе.

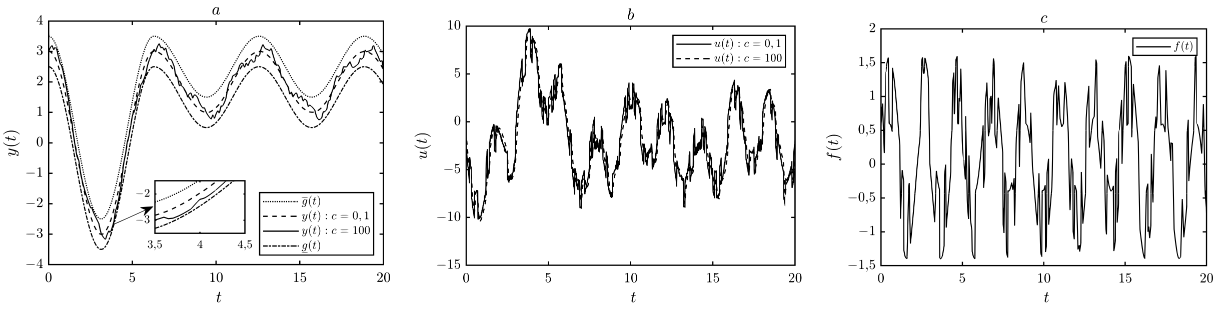

Рис. 1. Переходные процессы выхода $y(t)$ (a), управления $u(t)$ (b), возмущения $f(t)$ (c) в замкнутой системе при $c = 0,01$ и $c = 100$

5. Заключение

В работе проверен метод управления нелинейными объектами в форме Лурье с гарантией нахождения выходного сигнала в заданном множестве. В отличие от [4–6], предложенный метод позволяет рассчитать параметры регулятора с использованием техники ЛМН, что расширяет применимость полученного метода на практике. Моделирование подтвердило теоретические выводы и показало эффективность разработанного метода.

Исследование выполнено в ИПМаш РАН при поддержке госзадания № 121112500298-6 (ЕГИСУ НИОКТР)

Список литературы

1. Gupta S., Joshi S. M. Some properties and stability results for sector-bounded LTI systems // Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control. 1994. Vol. 3. P. 2973–2978.
2. Alvergue L., Gu G., Acharya S. A generalized sector bound approach to feedback stabilization of nonlinear control systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2012. Vol. 23. P. 1563–1580.
3. Churilov A. Stabilization of systems with sector bounded nonlinearity by a sawtooth sampled-data feedback // Cybernetics and Physics. 2019. Vol. 8, P. 222–227.
4. Фуртат И.Б., Гущин П.А. Управление динамическими объектами с гарантией нахождения регулируемого сигнала в заданном множестве // Автоматика и телемеханика. 2021. № 4. С. 121–139.
5. Furtat I., Gushchin P. Nonlinear feedback control providing plant output in given set // Int. J. Control. 2022. Vol. 95, No. 6. P. 1533–1542.
6. Nguyen B., Furtat I.B. Output Stabilization of Linear Systems in Given Set // Mathematics. 2023. Vol. 11, No. 16. P. 3542.
7. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств М.: Ленанд, 2014.
8. Sturm J.F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones // Optim. Method. Softwar. 1999. Vol. 11, No. 1. P. 625–653.
9. Lofberg J. YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB // Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (IEEE Cat. No.04CH37508). 2004. P. 284—289.