УДК 517.977.1

ВЫПУКЛОСТЬ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

И.О. Осипов

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

Россия, 620108, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16

E-mail: i.o.osipov@imm.uran.ru

Ключевые слова: квазилинейные системы, малый параметр, интегральные ограничения, множества достижимости, выпуклость

Аннотация: В работе исследуется выпуклость множеств достижимости квазилинейных систем с интегрально-квадратичными ограничениями на управление. Опираясь на работы Б. Т. Поляка о выпуклости образа малого гильбертова шара при его нелинейном отображении, изучается случай, когда в правой части системы существует малая нелинейность. При нулевом значении малого параметра, квазилинейная система становится линейной, а ее множество достижимости - выпуклым. В докладе показано, что для сохранения выпуклости множеств достижимости таких систем при малых значениях параметра достаточно, чтобы производная нелинейного отображения была липшицевой. Доклад включает в себя постановку задачи, исследование нелинейного отображения с параметром и применение к квазилинейным системам управления.

1. Введение

Предметом настоящего исследования являются множества достижимости квазилинейных систем с интегрально-квадратичными ограничениями.

Исследование восходит к работам Б. Т. Поляка [15], в которых были получены достаточные условия выпуклости нелинейного отображения малого гильбертова шара. Эти условия были использованы при исследовании выпуклости множеств достижимости нелинейных систем с малым ресурсом управления [16] и на малом интервале времени [9, 10, 13]. В этом докладе обсуждается выпуклость множеств достижимости еще одного варианта нелинейных систем с малым параметром, а именно с малой нелинейностью в правой части.

Такие системы часто называют квазилинейными. Их изучение началось в работах [11, 12, 17]. Задачам управления для квазилинейных систем также посвящены работы [1, 2, 5, 6]. В современных приложениях, квазилинейные системы возникают, например, при линеаризации обратной связью [3] или стохастической линеаризации [4, 7].

Рассмотрим квазилинейную систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + \varepsilon f\bigl(x(t), t\bigr), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant T, \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^r$ – вектор управления, t_0 – неотрицательное число, T – положительное число, а ε – малый параметр, такой, что $\varepsilon \in [0, \overline{\varepsilon}]$, $\overline{\varepsilon} > 0$. Матричные отображения $A : [t_0, T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $B : [t_0, T] \to \mathbb{R}^{n\times r}$ предполгаются непрерывными. Вектор функция $f : \mathbb{R}^n \times [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ непрерывна по паре (x, t) и непрерывно-дифференцируема по x.

Управление $u(\cdot)$ будем выбирать из шара $B_{\mathbb{L}_2}(0, \mu)$, где $\mu > 0$. Каждому управлению $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$ и любому $\varepsilon \in [0, \overline{\varepsilon}]$ соответствует единственное абсолютное непрерывное решение $x(t, \varepsilon, u(\cdot))$ системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0, \varepsilon, u(\cdot)) = x_0$, и это решение продолжимо на интервал $[t_0, t_0 + \Delta]$, где $t_0 + \Delta < T$.

Далее, мы будем считать выполнеными условия следующего предположения.

Предположение 1. *Существует такое $\overline{\mu} > \mu$, что для любого $\varepsilon \in [0, \overline{\varepsilon}]$ все решения $x(t, \varepsilon, u(\cdot))$ отвечающие управлениям $u(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_2}(0, \overline{\mu})$ лежат в выпуклом компакте $D \subset \mathbb{R}^n$. Кроме этого, предполагается, что функция f и ее производная по x удовлетворяют условию Липшица с константами L_f, l_f соответственно*

$$\|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| \leqslant L_f \|x_1 - x_2\|, \quad t \in [t_0, T], \quad x_1, x_2 \in D$$
$$\left\| \frac{\partial f(x_1, t)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_2, t)}{\partial x} \right\| \leqslant l_f \|x_1 - x_2\|, \quad t \in [t_0, T], \quad x_1, x_2 \in D.$$

Определение 1. *Множеством достижимости $G(T, \mu, \varepsilon)$ системы* (1) *в момент T называется множество всех возможных состояний, в которые система может быть переведена к моменту T управлениями $u(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_2}(0, \mu)$.*

$$G(T, \mu, \varepsilon) = \{\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n : \exists u(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_2}(0, \mu),\ x(T, \varepsilon, u(\cdot)) = \widetilde{x}\}.$$

Возникает вопрос, при каких условиях множество достижимости системы (1) будет сохранять выпуклость при малых ε?

2. Нелинейное отображние, зависящее от малого параметра

Рассмотрим отображение $F(x, \varepsilon) = a_0 + A_0 x + \varepsilon A_1(x, \varepsilon) : B_X(0, r) \times \mathbb{R}_+ \to Y$, где X и Y – гильбертовы пространства. Здесь $a_0 \in Y$ – константа, A_0 – линейный оператор, который предполагается сюръективным. Из последнего следует, что существует такое $\nu > 0$, что

$$\|A_0^* y\| \geqslant \nu \|y\|, \quad \forall y \in Y. \tag{2}$$

Здесь A_0^* – сопряженный к A_0 линейный оператор. Наконец, $A_1 : B_X(0, r) \times \mathbb{R}_+ \to Y$ – это нелинейный оператор, непрерывный по (x, ε).

Предположение 2. *Существует такое $\overline{\varepsilon} > 0$, что для всех $x \in B_X(0, r)$, $\varepsilon \in [0, \overline{\varepsilon}]$ отображение $A_1(x, \varepsilon)$ имеет производную Фреше $\frac{\partial A_1(x,\varepsilon)}{\partial x} = A_1'(x, \varepsilon)$, которая непрерывна по ε и липшицева по x: существует $L > 0$, такая что*

$$\|A_1'(x_1, \varepsilon) - A_1'(x_2, \varepsilon)\| \leqslant L \|x_1 - x_2\|, \qquad x_1, x_2 \in B_X(0, r), \qquad \varepsilon \in [0, \overline{\varepsilon}].$$

Теорема 1. *Обозначим через $F\big(B_X(0,r),\varepsilon\big)$ образ шара $B_X(0,r)$ при его отображении $F(x,\varepsilon)$, т.е. $F\big(B_X(0,r),\varepsilon\big) = \big\{F(x,\varepsilon) \,:\, x \in B_X(0,r)\big\}$. Пусть выполнено Предположения 2 и $F\big(B_X(0,r),\varepsilon\big)$ – замкнутое множество при всех $\varepsilon \in [0,\bar\varepsilon]$. Тогда найдется $\varepsilon_0 \in (0,\bar\varepsilon]$, такое, что для всех $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$ образ $F\big(B_X(0,r),\varepsilon\big)$ – выпуклое множество в Y.*

Доказательство. Опишем кратко схему доказательства. Заметим, что константа a_0 не влияет на выпуклость образа $F\big(B_X(0,r),\varepsilon\big)$, поэтому, в доказательстве мы будем считать ее равной нулю.

Пусть x_1 и x_2 – произвольные точки из шара $B_X(0,r)$. Обозначим $x_0 = \frac{1}{2}(x_1+x_2)$, $y(\varepsilon) = \frac{1}{2}\big(y_1(\varepsilon) + y_2(\varepsilon)\big)$, где $y_1(\varepsilon) = F(x_1,\varepsilon)$ и $y_2(\varepsilon) = F(x_2,\varepsilon)$. Для того, чтобы доказать выпуклость $F\big(B_X(0,r),\varepsilon\big)$ достаточно показать, что $y(\varepsilon) \in F\big(B_X(0,r),\varepsilon\big)$ или, что тоже самое, найдется такое $x^* \in B_X(0,r)$, что $F(x^*,\varepsilon) = y(\varepsilon)$.

В условиях Предположения 2 имеем

$$y(\varepsilon) = \frac{1}{2}\big(F(x_1,\varepsilon) + F(x_2,\varepsilon)\big) = \frac{1}{2}\big(A_0x_1 + \varepsilon A_1(x_1,\varepsilon) + A_0x_2 + \varepsilon A_1(x_2,\varepsilon)\big) =$$
$$= A_0x_0 + \frac{1}{2}\varepsilon\big(A_1(x_1,\varepsilon) + A_1(x_2,\varepsilon)\big) = A_0x_0 + \varepsilon A_1(x_0,\varepsilon) + \xi(\varepsilon,x_1,x_2).$$

Для остаточного члена можно получить оценку $\|\xi(\varepsilon,x_1,x_2)\| \leqslant \frac{1}{4}L\varepsilon\|x_1-x_2\|^2$.

Таким образом, для всех $x_1,x_2 \in B(0,r)$, $x_1 \neq x_2$, $\varepsilon \in [0,\bar\varepsilon]$, выполняется

$$\|F(x_0,\varepsilon) - y(\varepsilon)\| = \|\xi(\varepsilon,x_1,x_2)\| \leqslant \frac{1}{4}L\varepsilon\|x_1-x_2\|^2.$$

Теперь рассмотрим производную $F(x_0,\varepsilon)$ по x_0 при фиксированном ε. Из предположения 2 и соотношения (2), имеем

$$\|F'_x(x_0,\varepsilon)^*y\| = \big\|\big(A_0 + \varepsilon A'_1(x_0,\varepsilon)\big)^*y\big\| \geqslant$$
$$\|A_0^*y\| - \varepsilon\,\big\|\big(A'_1(x_0,\varepsilon)\big)^*\big\|\,\|y\| \geqslant (\nu - k\varepsilon)\|y\|,$$

где $k = \max\limits_{\varepsilon\in[0,\bar\varepsilon]} \|A'_1(0,\varepsilon)\| + Lr > 0$. Положим $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0 = \min\big\{\frac{\nu}{4Lr}, \frac{\nu}{2k}, \bar\varepsilon\big\}$.

Наконец, из Леммы 2.2 [15] (или следствия 1 из теоремы 1 [14]) с параметрами $\mu = \frac{\nu}{2}$ and $\rho = \frac{\|x_1-x_2\|^2}{8r}$ следует, что существует $x^* \in B(x_0,\rho)$ такой, что $F(x^*,\varepsilon) = y(\varepsilon)$. Так как $B_X(0,r)$ – гильбертов шар, то выполняется включение $B(x_0,\rho) \subset B_X(0,r)$, следовательно $x^* \in B_X(0,r)$. Таким образом, точка $y(\varepsilon) = \frac{1}{2}\big(F(x_1,\varepsilon)+F(x_2,\varepsilon)\big)$ лежит в образе шара $F\big(B_X(0,r),\varepsilon\big)$ при всех $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ и $x_1,x_2 \in B_X(0,r)$. Из-за замкнутости, образ шара $F\big(B_X(0,r),\varepsilon\big)$ будет выпуклым для всех $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

3. О свойствах решений квазилинейных систем

В этом разделе исследуются решения (1) и приводится краткая схема обоснования применения Теоремы 1 для проверки выпуклости множеств достижимости системы (1).

Обозначим фундаментальную матрицу системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ через $X(t,\tau)$. Эта матрица является решением уравнения

$$\frac{\partial X(t,\tau)}{\partial t} = A(t)X(T,\tau), \qquad X(\tau,\tau) = I.$$

Если $x(\cdot,\varepsilon,u(\cdot))$ – решение (1), то оно удоволетворяет интегральному уравнению

$$x\big(T,\varepsilon,u(\cdot)\big)=X(T,t_0)x_0+\int\limits_{t_0}^{T}X(T,\tau)B(t)u(\tau)\;d\tau+$$
$$+\varepsilon\int\limits_{t_0}^{T}X(T,\tau)f\Big(x\big(\tau,\varepsilon,u(\cdot)\big),\tau\Big)\;d\tau.$$

Определим отображение $F:B_{\mathbb{L}_2}(0,\overline{\mu})\times[0,\overline{\varepsilon}]\to\mathbb{R}^n$ равенством $F(u(\cdot),\varepsilon)=x(T,\varepsilon,u(\cdot))$, где $x(T,\varepsilon,u(\cdot))$ – решение (1) в момент T отвечающее управлению $u(\cdot)$ и малому параметру ε.

Для того, чтобы использовать результаты предыдущего раздела, перепишем F в виде $F(u(\cdot),\varepsilon)=a_0+A_0u(\cdot)+\varepsilon A_1(u(\cdot),\varepsilon)$, где $a_0=X(T,0)x_0$, а отображения $A_0:B_{\mathbb{L}_2}(0,\overline{\mu})\mapsto\mathbb{R}^n$ и $A_1:B_{\mathbb{L}_2}(0,\overline{\mu})\times[0,\overline{\varepsilon}]\to\mathbb{R}^n$ определены равенствами

$$A_0u(\cdot)=\int\limits_{t_0}^{T}X(T,\tau)B(t)u(\tau)\;d\tau,\quad A_1(u(\cdot),\varepsilon)=$$
$$=\int\limits_{t_0}^{T}X(T,\tau)f\Big(x\big(\tau,\varepsilon,u(\cdot)\big),\tau\Big)\;d\tau. \tag{3}$$

Множество достижимости $G(T,\mu,\varepsilon)$ квазилинейной системы (1) – это образ шара $B_{\mathbb{L}_2}(0,\mu)$ при его отображении F, $G(T,\mu,\varepsilon)=F(B_{\mathbb{L}_2}(0,\mu),\varepsilon)$.

Утверждение 1. *Пусть выполнено Предположения 1. Тогда, для всех $\varepsilon\in[0,\overline{\varepsilon}]$, множество достижимости $G(T,\mu,\varepsilon)$ – замкнуто.*

Доказательство. Доказательство следует из равностепенной непрерывности траекторий, равномерной ограниченности траекторий и слабой компактности $B_{\mathbb{L}_2}(0,\mu)$ (см., например, [8]).

Лемма 1. *Пусть выполнено Предположение 1. Тогда, для всех $\varepsilon\in[0,\overline{\varepsilon}]$, существует $L_x(\varepsilon)>0$, такая, что для любых $u_i(\cdot)\in B_{\mathbb{L}_2}(0,\mu),\ i=1,2$ и $t\in[t_0,T]$,*

$$\|x_1(t)-x_2(t)\|\leqslant L_x(\varepsilon)\|u_1(\cdot)-u_2(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2},$$

где $x_i(t)=x(t,\varepsilon,u_i(\cdot))$, $i=1,2$. Более того, $L_x(\varepsilon)\leqslant L_x(\overline{\varepsilon})$.

Для того, чтобы применить Теорему 1 к отображению F, нам необходимо показать, что Предположение 2 выполняется для A_1, определенного в (3).

В условиях Предположения 1 оказывается, что производная Фреше $A_1(u(\cdot),\varepsilon)$ по $u(\cdot)$, $A_1'(u(\cdot),\varepsilon):B_{\mathbb{L}_2}(0,\overline{\mu})\to\mathbb{R}^n$ существует и определяется равенством

$$A_1'(u(\cdot),\varepsilon)\delta u(\cdot)=\int\limits_{t_0}^{T}X(T,\tau)\frac{\partial f}{\partial x}\Big(x\big(\tau,\varepsilon,u(\cdot)\big),\tau\Big)\delta x_u(\tau)\;d\tau \tag{4}$$

Здесь $\delta x_u(\tau)$ – решение линеаризованной вдоль $(u(\cdot),x(\cdot,\varepsilon,u(\cdot))$ системы (1), отвечающее управлению $\delta u(\cdot)$ и нулевым начальным условиям:

$$\delta\dot{x}_u=\overline{A}\big(t,\varepsilon,u(\cdot)\big)\delta x_u+B(t)\delta u(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant\tau,\qquad \delta x_u(0)=0, \tag{5}$$

где

$$\overline{A}\big(t,\varepsilon,u(\cdot)\big)=A(t)+\varepsilon\frac{\partial f\big(x(t,\varepsilon,u(\cdot)),t\big)}{\partial x}.$$

Лемма 2. *Пусть выполнено Предположение 1. Тогда найдется* $L_u(\varepsilon)>0$, *такая, что для всех* $\varepsilon\in[0,\overline{\varepsilon}]$, $u_i(\cdot)\in B_{\mathbb{L}_2}(0,\mu)$, $i=1,2$ *и* $\tau\in[t_0,T]$,

$$\|\delta x_{u_1}(\tau)-\delta x_{u_2}(\tau)\|\leqslant L_u(\varepsilon)\|u_1(\cdot)-u_2(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}.$$

Производная $\frac{\partial f}{\partial x}\Big(x\big(\tau,\varepsilon,u(\cdot)\big),\tau\Big)$ липшицева при всех $\tau\in[t_0,T]$ и $u_1(\cdot),u_2(\cdot)\in B_{\mathbb{L}_2}(0,\mu)$ как композиция липшецевых функций.

$$\left\|\frac{\partial f\Big(x\big(\tau,\varepsilon,u_1(\cdot)\big),\tau\Big)}{\partial x}-\frac{\partial f\Big(x\big(\tau,\varepsilon,u_2(\cdot)\big),\tau\Big)}{\partial x}\right\|\leqslant l_f L_x(\varepsilon)\left\|u_1(\cdot)-u_2(\cdot)\right\|_{\mathbb{L}_2}.$$

Тогда подынтегральное выражение в (4) также является липшицевым по $u(\cdot)$, а значит и производная $A_1'(u(\cdot),\varepsilon)$ удовлетворяет условию Липшица по $u(\cdot)$ при всех $\varepsilon\in[0,\overline{\varepsilon}]$ и $\tau\in[t_0,T]$. Непрерывность этой производной по ε следует из линейности правой части системы (1) по ε и непрерывной зависимости от ε матрицы $\overline{A}\big(t,\varepsilon,u(\cdot)\big)$.

Теорема 2. *Пусть выполнено Предположения 1, тогда найдется* $\varepsilon_0>0$ *такое, что множество достижимости* $G(T,\mu,\varepsilon)$ *системы* (1) *выпукло для всех* $\varepsilon<\varepsilon_0$.

Список литературы

1. Альбрехт Э. Г. Об оптимальном управлении движением квазилинейных систем // Дифференц. уравнения. 1969. Т. V, № 3. С. 430–442.
2. Альбрехт Э. Г. О сближении квазилинейных объектов в регулярном случае // Дифференц. уравнения. 1971. Т. VII, № 7. С. 1171–1178.
3. Calvet J.-P., Arkun Y. Design of P and PI stabilizing controllers for quasi-linear systems // Computers & Chemical Engineering. 1990. Vol. 14, № 4-5. P. 415–426.
4. Ching Sh., Eun Yo., Gokcek C., Kabamba P., Meerkov S. Quasilinear Control: Performance Analysis and Design of Feedback Systems with Nonlinear Sensors and Actuators. 2010.
5. Dauer J. P. Nonlinear perturbations of quasi-linear control systems // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1976. Vol. 54, No. 3. P. 717-725.
6. Габасов Р., Калинин А. И., Кириллова Ф. М., Лавринович Л. И. К асимптотическим методам оптимизации квазилинейных систем управления // Тр. ИММ УрО РАН. 2019. Т. 25, № 3. С. 62–72.
7. Guo Y., Kabamba P. T., Meerkov S. M., Ossareh H. R., Tang C. Y. Quasilinear Control of Wind Farm Power Output // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2015. Vol. CST-23, No. 4. P. 1555-1562.
8. Гусев М. И., Зыков И. В. Об экстремальных свойствах граничных точек множеств достижимости управляемых систем при интегральных ограничениях // Тр. ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23, № 1. С. 103–115.
9. Gusev M. I. The limits of applicability of the linearization method in calculating small-time reachable sets // Ural Mathematical Journal. 2020. Vol. 6, No. 1. P. 71-83.
10. Гусев М. И., Осипов И. О. Асимптотическое поведение множеств достижимости на малых временных промежутках // Тр. ИММ УрО РАН. 2019. Том 25, № 3. С. 86–99.
11. Киселев Ю. Н. Асимптотическое решение задачи оптимального быстродействия систем управления, близких к линейным // Докл. АН СССР. 1968. Том 182, № 1. С. 31–34.
12. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М: Наука, 1968. 476 с.

13. Осипов И. О. О выпуклости множеств достижимости по части координат нелинейных управляемых систем на малых промежутках времени // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2021. Т. 31, № 2. С. 210–225.
14. Поляк Б. Т. Градиентные методы решения уравнений и неравенств // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. Т. 4, № 6. С. 995–1005.
15. Polyak B. T. Convexity of Nonlinear Image of a Small Ball with Applications to Optimization // Set-Valued Analysis. 2001. Vol. 9. P. 159–168.
16. Polyak B. T. Convexity of the reachable set of nonlinear systems under L2 bounded controls. // Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems Ser. A Math. Anal. 2004. Vol. 11, Suppl. 2-3. P. 255–267.
17. Субботин А. И. Об управлении движением квазилинейной системы // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 7. С. 1113–1118.