УДК 681.5.01

СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНОГО ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ ТЕЛЕЖКА-МАЯТНИК НА ОСНОВЕ МЕТОДА АКАР

В.А. Петров

Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова (филиал) федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Национальный исследовательский технологический университет "МИСИС"

Россия, 309516, Старый Оскол, м-н им. Макаренко, 42

E-mail: petrov.va@misis.ru

В.С. Воробьев

Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова (филиал) федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Национальный исследовательский технологический университет "МИСИС"

Россия, 309516, Старый Оскол, м-н им. Макаренко, 42

E-mail: vorobev.vs@misis.ru

Ключевые слова: Инвариантное многообразие, макропеременная, аналитическое конструирование агрегированных регуляторов (АКАР), демпфирование колебаний, мостовой кран.

Аннотация: Для компенсации колебаний груза мостового крана в работе синтезирован закон управления методом АКАР. Впервые для системы тележка-маятник выбрана макропеременная, позволяющая перейти в инвариантное многообразие для последующего синтеза закона управления. Проведенные численные эксперименты показывают эффективность компенсации колебаний груза по сравнению с законом управления, полученным вторым методом Ляпунова.

1. Введение

Одной из классических задач теории управления нелинейными системами является задача управления системой тележка-маятник «рис. 1». Примером практической реализации такой системы являются широко распространенные в различных отраслях промышленности мостовые краны.

Одним из тривиальных методов решения этой задачи является линеаризация подобной системы [1]. Также существуют и другие методы робастного управления [2], адаптивного управления [3] и управления на базе скользящих режимов. Однако, для применения вышеперечисленных методов необходимо привести исходную нелинейную систему к определенному виду. Поиск подобного двухстороннего

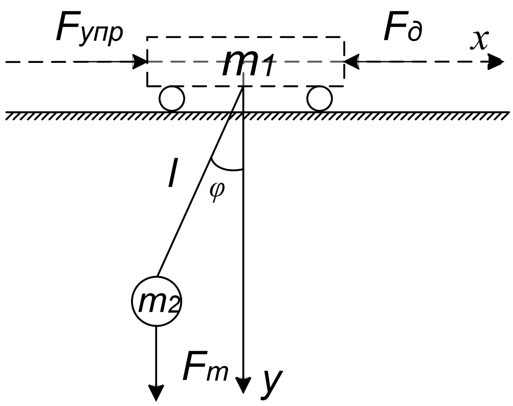

Рис. 1. Схема системы тележка-маятник

преобразования может представлять собой нетривиальную задачу. В то же время существует метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов, который позволяет синтезировать системы управления по исходному нелинейному представлению без применения упомянутых выше преобразований. Он был применен для перевернутого маятника в [4]. Однако это решение неприменимо для математического маятника. В данной работе предлагается использовать метод АКАР для этого объекта.

2. Постановка задачи

Рассматривается задача слежения за положением тележки и стабилизация маятника. Для этого запишем динамику рассматриваемой системы «рис. 1» в виде системы дифференциальных уравнений с отклонением $e_1 = r - x_1$ (1) и (2):

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2, \\ \dot{e}_2 = u, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = -\frac{k_2}{m_2} \cdot x_4 - \frac{g \cdot \sin(x_3)}{l} + \frac{k_2 \cdot \cos(x_3)}{m_2 \cdot l} \cdot e_2 + \frac{\cos(x_3)}{l} \cdot u, \end{cases} \tag{1}$$

где m_1 – масса тележки, m_2 – масса груза, l – длина троса, k_1 и k_2 – коэффициенты трения, g – ускорение свободного падения, x_3 – угол отклонения груза от вертикали, x_1 - положение тележки,r – задание по положению тележки, псевдоуправление u определено следующим образом:

$$u = \frac{1}{m_2 \cdot \sin^2(x_3) + m_1} \cdot \left(\begin{array}{c} -\left(k_2 \cdot \sin^2(x_3) + k_1\right) \cdot e_2 - \frac{m_2 \cdot g \cdot \sin(2 \cdot x_3)}{2} - \\ -m_2 \cdot l \cdot \sin(x_3) \cdot x_4^2 - f \end{array} \right), \tag{2}$$

а f – истинное управление, r – задание по положению тележки.

Необходимо определить истинное управление таким образом, что:

$$\lim_{t \to \infty} x_3(t) = \lim_{t \to \infty} e_1(t) = 0.$$

3. Синтез закона управления

Для достижения поставленной цели в данной работе предлагается определить макропеременную в следующем виде:

$$\psi(t) = -e_1(t) + \int v(e_1(t))\,dt + g(x_3(t)) + \xi \cdot \int g(x_3(t))\,dt, \tag{3}$$

где $\xi > 0$ – произвольное число.

Дважды продифференцируем (3) и подставим $\dot{x}_4$ и $\dot{e}_2$ из (1), определим функцию $g(x_3(t))$, где $g(...)$ – неопределенная функция, позволяющая линеаризовать коэффициент перед псевдоуправлением u. Также определим функцию $v(e_1(t) + r(t))$, где $v(...)$ – неопределенная функция, позволяющею задать движение систему на конечном инвариантном многообразии координатой отклонения груза от вертикали:

$$g(x_3(t)) = \int \frac{p}{\cos(x_3(t))}dt = p \cdot \ln\left(\sqrt{-\frac{2}{\sin(x_3(t)) - 1} - 1}\right), \tag{4}$$

$$v(e_1(t)) = \int v(e_1(t))\,dt = -\frac{k_2}{m_2}\int e_1(t)\,dt, \tag{5}$$

где $p > 0$ – произвольное число.

Подставим (4) и (5) в (3) и для упрощения введем переменную $\lambda = \frac{p-l}{l}$:

$$\begin{gathered}\psi(t) = -e_1(t) + l \cdot (\lambda + 1) \cdot ln\left(\sqrt{-\tfrac{2}{sin(x_3(t))-1} - 1}\right) - \tfrac{k_2}{m_2} \cdot \int e_1(t)dt + \\ +\gamma \cdot \int ln\left(\sqrt{-\tfrac{2}{sin(x_3(t))-1} - 1}\right)dt,\end{gathered} \tag{6}$$

где $\gamma = p \cdot \xi$.

Согласно методу АКАР [5] введем функциональное уравнение следующего вида:

$$\ddot{\psi}(t) + a_1 \cdot \dot{\psi}(t) + a_2 \cdot \psi(t) = 0, a_1 > 0, a_2 > 0. \tag{7}$$

Определим вторую производную макропеременной $\psi(t)$ в силу (6):

$$\begin{gathered}\ddot{\psi} = \left(\tfrac{l}{cos(x_3)} \cdot x_4^2 - g\right) \cdot (\lambda + 1) \cdot tg(x_3) - \tfrac{k_2 \cdot l \cdot (\lambda+1) - \gamma \cdot m_2}{m_2 \cdot cos(x_3)} \cdot x_4 + \\ + \tfrac{k_2 \cdot \lambda}{m_2} \cdot e_2 + \lambda \cdot u = 0.\end{gathered} \tag{8}$$

Из (8) выразим псевдоуправление u:

$$\begin{gathered}u = \left(\tfrac{\lambda+1}{\lambda} \cdot g - \tfrac{l \cdot (\lambda+1)}{cos(x_3) \cdot \lambda} \cdot x_4^2\right) \cdot tg(x_3) + \tfrac{k_2 \cdot l \cdot (\lambda+1) - \gamma \cdot m_2}{\lambda \cdot m_2 \cdot cos(x_3)} \cdot x_4 - \\ -\tfrac{k_2}{m_2} \cdot e_2.\end{gathered} \tag{9}$$

Подставим псевдоуправление (9) в (1) и получим уравнения движения на многообразии $\psi(t) = \dot{\psi}(t) = 0$:

$$\begin{cases} \dot{e}_{2\psi} + a_3 \cdot e_{2\psi} + \left(a_4 + a_5 \cdot x_{4\psi}^2\right) \cdot tg(x_{3\psi}) + a_6 \cdot x_{4\psi} = 0, \\ \dot{x}_{4\psi} + a_7 \cdot tg\left(x_{3\psi}\right) \cdot x_{4\psi}^2 + a_8 \cdot x_{4\psi} + a_9 \cdot \sin\left(x_{3\psi}\right) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

где

$$a_3 = \frac{k_2}{m_2}, a_4 = -\frac{\lambda+1}{\lambda} \cdot g, a_5 = \frac{l \cdot (\lambda+1)}{cos(x_{3\psi}) \cdot \lambda}, a_6 = -\frac{k_2 \cdot l \cdot (\lambda+1) - \gamma \cdot m_2}{\lambda \cdot m_2 \cdot cos(x_3)}, a_7 = \frac{\lambda+1}{\lambda},$$
$$a_8 = -\frac{k_2 \cdot l - m_2 \cdot \gamma}{\lambda \cdot m_2 \cdot l}, a_9 = -\frac{g}{\lambda \cdot l}.$$

Выполнив замену $x_{4\psi} = \dot{x}_{3\psi}$, $e_{2\psi} = \dot{e}_{1\psi}$, получим:

$$\begin{cases} \ddot{e}_{1\psi} - a_3 \cdot \dot{e}_{1\psi} + \left(a_4 + a_5 \cdot \dot{x}_{3\psi}^2\right) \cdot tg(x_{3\psi}) + a_6 \cdot \dot{x}_{3\psi} = 0, \\ \ddot{x}_{3\psi} + a_7 \cdot tg\left(x_{3\psi}\right) \cdot \dot{x}_{3\psi}^2 + a_8 \cdot \dot{x}_{3\psi} + a_9 \cdot \sin\left(x_{3\psi}\right) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Вторым методом Ляпунова можно показать, что уравнение (11) является асимптотически устойчивым при условии, что a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 и a_9 больше нуля и $x_{3\psi} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, первая и вторая производная задания равны нулю [5].

Подставим в (7) выражение для $\ddot{\psi}(t), \dot{\psi}(t), \psi(t), u(t)$ и выразим истинное управление:

$$\begin{aligned} & f = -\left(k_2 \cdot \sin^2\left(x_3\right) + k_1\right) \cdot e_2 - \frac{m_2 \cdot g \cdot \sin(2 \cdot x_3)}{2} - \\ & -m_2 \cdot l \cdot \sin\left(x_3\right) \cdot x_4^2 + \frac{(m_2 \cdot \sin(x_3) + m_1)}{\lambda} \times \\ & \times \left(\begin{array}{l} a_1 \cdot \left(\begin{array}{l} \gamma \cdot \ln\left(\sqrt{-\frac{2}{\sin(x_3)-1} + 1}\right) - \frac{k_2}{m_2} \cdot e_1 + \\ + \frac{l \cdot (\lambda+1)}{\cos(x_3)} \cdot x_4 - e_2 \end{array} \right) + \\ + a_2 \cdot \left(\begin{array}{l} \gamma \cdot \int \ln\left(\sqrt{-\frac{2}{\sin(x_3)-1} + 1}\right) dt - \frac{k_2}{m_2} \cdot \int e_1 dt + \\ + l \cdot (\lambda+1) \ln\left(\sqrt{-\frac{2}{\sin(x_3)-1} + 1}\right) - e_1 \end{array} \right) + \\ + \left(\frac{l \cdot (\lambda+1)}{\cos(x_3)} \cdot x_4^2 - (\lambda+1) \cdot g\right) \cdot tg\left(x_3\right) + \frac{\gamma \cdot m_2 - l \cdot (\lambda+1) \cdot k_2}{m_2 \cdot \cos(x_3)} \cdot x_4 + \\ + \frac{k_2 \cdot \lambda}{m_2} \cdot e_2 \end{array} \right). \end{aligned} \tag{12}$$

Синтезированный закон управления (12) обеспечивает сходимость на инвариантном многообразии и, как следствие, его отображение в исходное многообразие будет являться устойчивым. Характер переходного процесса будет завить от выбора a_1 и a_2 в (7).

4. Численное моделирование

Численное моделирование производилось в MATLAB Simulink на модели мостового крана, используемого в [6]. В ходе экспериментов сравнивалась работа предлагаемого закона управления (12) и регулятора на основе второго метода Ляпунова, синтезированного авторами в [6].

Результаты моделирования «рис. 2» показывают эффективность предлагаемого закона управления. По сравнению с регулятором на основе второго метода Ляпунова удалось снизить угол отклонения груза от вертикали на 40%, а квадратичный интегральный критерий на 70% «рис. 2, а».

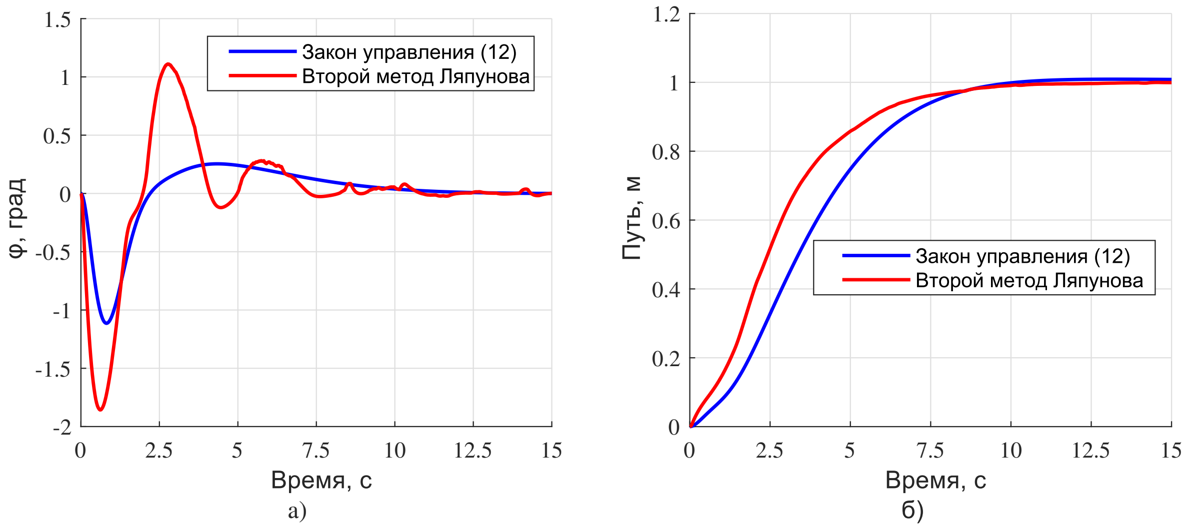

Рис. 2. Результаты численного моделирования (а - угол отклонения груза от вертикали, б - пройденный путь тележки)

5. Заключение

При синтезе закона управления методом АКАР была определена макропеременная, переводящая модель объекта тележка-маятник в инвариантное многообразие. Результатом такого перехода является возможность реализации нелинейного регулятора. Численное моделирование показало, что с помощью предлагаемого закона управления возможно улучшить качество регулирования по сравнению с законом управления, полученным вторым методом Ляпунова.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России ВУЗам по проекту FSME-2023-0014 по теме "Адаптивное управление подъемно-транспортными механизмами в условиях наличия неопределенности и возмущающих воздействий".

Список литературы

1. Воевода А.А., Шоба Е.В. О модели перевернутого маятника // Сборник научных трудов Новосибирского государственного технического университета. 2012. № 1 (67). С. 3–14.
2. Антипов А.С., Краснова С.А. Методы демпфирования колебаний груза и робастного управления ходовой тележкой мостового крана с учетом динамики электропривода // Мехатроника, автоматизация, управление. 2023. № 24(8). С. 412–420.
3. Круглов С.П., Аксаментов Д.Н. Адаптивное управление мостовым краном по скорости перемещения тележки // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. 2022. №. 1. С. 86–92.
4. Колесников А.А. Метод синергетического синтеза системы управления колебаниями «Перевернутого маятника на подвижной тележке» // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 6. С. 110–117.
5. Колесников А.А. Синергетическая теория управления. М.: Энергоатомиздат, 1994. 228 с.
6. Petrov V. , Glushchenko A. , Vorobyev V., Lastochkin K. Nonlinear Control Law Design for Overhead Crane to Supress Load Oscillations // 2023 5th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). Lipetsk, Russian Federation, 2023. P. 110–114.