УДК 517.977

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БАРЬЕРНЫХ ФУНКЦИЙ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ СТАБИЛИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Н.О. Седова
Ульяновский государственный университет
Россия, 432000, Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42
E-mail: sedovano@ulsu.ru

О.В. Дружинина
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН;
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 119333, Москва, ул. Вавилова, 44, к. 2; Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: ovdruzh@mail.ru

Ключевые слова: нелинейные динамические системы, запаздывание, стабилизация, ограничения, барьерные функции Ляпунова, условия Разумихина.

Аннотация: Рассматривается задача стабилизации динамической системы с одновременным обеспечением безопасности, определяемой как соблюдение заданных фазовых ограничений. Поведение изучаемой системы описывается задачей Коши для нелинейного неавтономного дифференциального уравнения запаздывающего типа с обыкновенной производной. Для решения задачи используется вспомогательная управляющая функция типа Разумихина. Предлагаемая конструкция выступает одновременно и в качестве функции Ляпунова, обеспечивая возможность построения стабилизирующего управления, и в качестве барьерной функции, гарантируя инвариантность некоторого «безопасного» множества для управляемой системы. Управление с требуемыми свойствами выражается через построенную функцию, при этом формула управления содержит параметр, который может быть выбран достаточно произвольно. Рассматриваемый подход отличается от предложенных ранее в основном условиями относительно производной используемой вспомогательной функции. Полученные результаты являются новыми в том числе для автономных уравнений.

1. Введение

Важнейшими свойствами, характеризующими поведение динамических систем, являются устойчивость и ограниченность решений уравнений, описывающих эти системы. Анализу этих свойств посвящено огромное количество исследований; большая часть полученных в этой области результатов, особенно для нелинейных систем, связана с применением того или иного варианта функций Ляпунова. Другим важным свойством, активно изучаемым в последнее десятилетие, является так называемая «безопасность» (safety) системы [1–3].

Изучение безопасности в контексте динамических систем восходит к 1940-м годам (см. [4]). Пусть $X_0 \subset R^n$, $U \subset R^n$ – открытое множество, $U \cap X_0 = \varnothing$. Безопасность определяется как требование, чтобы траектории системы, начинающиеся внутри X_0, не достигали «опасного» множества U.

Описанное свойство оказалось удобным изучать с помощью подходов, идейно близких к прямому методу Ляпунова. По аналогии с функциями Ляпунова было введено понятие барьерных функций (или функций безопасности), с тем чтобы определить их свойства, гарантирующие безопасность системы.

Применяется два основных типа барьерных функций [2, 4]. Функция первого типа неограниченно возрастает при приближении к границе опасного множества. Такие барьерные функции широко используется при решении экстремальных задач с ограничениями [5]. Функция второго типа имеет определенный знак на множестве начальных точек системы и противоположный знак на опасном множестве. В этом случае безопасность системы определяется как положительная инвариантность относительно системы некоторого множества S, на котором барьерная функция не меняет знак; в указанной постановке надлежащее определение барьерных функций позволило применить к решению задачи анализа безопасности те же идеи, которые применяются для анализа устойчивости с помощью функций Ляпунова.

Подобных результатов появилось довольно много в последние десятилетия для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (см. ссылки в [4]). Чуть позже те же идеи стали развиваться для систем, моделируемых уравнениями с запаздыванием. В [1] авторы определяют барьерные функционалы Ляпунова–Красовского и изучают их свойства, обеспечивающие инвариантность некоторого безопасного множества; здесь же приводится довольно обширный перечень ссылок, относящихся к данному вопросу. Более удобными с точки зрения определения безопасного множества могут оказаться функции, определенные в конечномерном пространстве. Такое обобщение барьерных функций на системы с запаздыванием рассматривается в [6–8].

Поскольку обеспечение безопасности системы, как правило, не является целью управления, возникает вопрос о совмещении основной задачи управления с вспомогательной задачей «обеспечения безопасности». В последние десятилетия в литературе активно обсуждались способы решения этой проблемы для обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом можно выделить два различных подхода. В одном случае сначала строится управление, решающее «основную» задачу, а затем путем решения некоторой задачи оптимизации находится добавочное управление, которое включается только при приближении решения к «опасному» множеству. В другом случае на основе одной вспомогательной функции строится управление, решающее обе задачи одновременно. Несмотря на разницу в инструментах, результирующее управление в обоих случаях действует по одному и тому же принципу: вдали от опасного множества доминирует управление, решающее основную задачу, а при приближении к границе основное действие оказывает управление, «возвращающее» решение в безопасное множество.

Большая часть исследований в качестве основной задачи управления рассматривает стабилизацию. Этой задаче посвящена и данная работа. Стабилизацию с одновременным выполнением требования безопасности будем далее называть безопасной стабилизацией. Здесь мы предлагаем обсуждение условий относительно вспомогательной функции, позволяющей в явной форме найти решающее задачу управление. В отличие от известных работ, обсуждающих подобный подход, при оценке производной вспомогательной функции в силу системы используются условия типа Разумихина [9]. Это повышает гибкость полученных условий при их практическом применении.

2. Основной результат

Рассмотрим нелинейную аффинную по управлению систему, описываемую дифференциальным уравнением запаздывающего типа:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) + g(t, x_t)u, \tag{1}$$

где $t \in R^+$, $x(t) \in R^n$, функционалы f и g удовлетворяют условиям типа Каратеодори из [10], $u \in R^m$ $(m \leqslant n)$ – вектор управления, и $f(t, 0) = 0$ для всех $t \in R^+$, $u \in R^m$.

Здесь и далее используем следующие обозначения: $R^+ = [0, +\infty)$, R^n – n-мерное пространство векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ с нормой $|x|$, $C = C([-r, 0], R^n)$ – банахово пространство с супремум-нормой $\|\cdot\|$. Для непрерывной функции $x(t) \in C([t_0 - r, t_0 + T), R^n)$ $(t_0 \in R^+, T > 0)$ элемент $x_t \in C$ определяется для любого $t \in [t_0, t_0 + T)$ формулой $x_t(s) = x(t+s)$, $-r \leqslant s \leqslant 0$, $\dot{x}(t)$ обозначает правостороннюю производную функции $x(t)$ в точке t.

Определим скалярную функцию $W(t, x) \in C(R^+ \times R^n, R)$ и предположим, что почти всюду определена ее производная в силу уравнения (1) – функционал $W'_u \in C(R^+ \times C, R)$:

$$W'_u(t, \varphi) = \frac{\partial W(\varphi(0))}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W(\varphi(0))}{\partial \varphi_i(0)} \cdot \big(f(t, \varphi) + g(t, \varphi) \cdot u\big).$$

Используем далее для удобства обозначения

$$L_f W(t, \varphi) = \frac{\partial W(t, \varphi(0))}{\partial t} + \left(\frac{\partial W(t, \varphi(0))}{\partial \varphi(0)}\right)^\top \cdot f(t, \varphi),$$

$$L_g W(t, \varphi) = \left(\frac{\partial W(t, \varphi(0))}{\partial \varphi(0)}\right)^\top \cdot g(t, \varphi).$$

Предположим, что $\{(t, \varphi) : \ L_g W(t, \varphi) = 0\} = R^+ \times N_W$, $N_W \subset C$. Определим также множество $C_W = \{\varphi \in C : W(t, \varphi(s)) \leqslant 0 \ \forall t \in R^+, \ s \in [-r, 0]\}$.

Пусть теперь $c_1 > 0$ и $\gamma \in C(R, [c_1, +\infty))$. Определим структуру управления:

$$u_\gamma(t, \varphi) = -\gamma(W(t, \varphi(0))) \cdot (L_g W(t, \varphi))^\top. \tag{2}$$

Рассмотрим задачу безопасной стабилизации: для заданного множества начальных точек $X_0 \subset R^n$ найти управление u, при котором система, описываемая уравнением (1), безопасна, и нулевое решение равномерно асимптотически устойчиво относительно начальных функций $\varphi \in C$, для которых $\varphi(s) \in X_0$ при всех $s \in [-r, 0]$.

Начиная с работы [11], в исследовании задачи стабилизации получил распространение аналог функции Ляпунова в виде так называемой управляющей функции Ляпунова [12] (от англ. CLF – control Lyapunov function). Похожей конструкцией является управляющая барьерная функция, которая используется для построения управлений, гарантирующих безопасность системы (см., например, [2–4]). Для автономного уравнения (1) задача безопасной стабилизации рассматривалась в [6, 7]. В [6] авторы предлагают использование управляющей барьерной функции Ляпунова–Разумихина, на основании которой строится закон управления, аналогичный известной «универсальной» формуле для обыкновенных дифференциальных уравнений [13]. Поскольку в общем случае эта формула непосредственно не распространяется на уравнения с запаздыванием [14], автор [6] предлагает вместо условий Разумихина использовать оценку производной, справедливую во всем пространстве. Эта оценка зависит от максимального значения функции на интервале запаздывания и по сути сужает класс используемых функций по сравнению с «классическими» функциями Разумихина. Некоторое обобщение условий из [6] предложено в [15]. Заметим, что универсальная формула определяет управление, которое не обязательно непрерывно в начале координат. В [7] предлагается другая структура управления, при этом определяющая его вспомогательная функция строится в виде комбинации управляющей функции Ляпунова и управляющей барьерной функции, каждая из которых по отдельности решает свою задачу: стабилизации или безопасности.

В данной работе мы также используем вспомогательную функцию, удовлетворяющую некоторым условиям в традициях управляющих функций. В следующей теореме устанавливаются условия, при которых обеспечивается безопасность уравнения (1) и сходимость к нулю всех решений, начинающихся в некотором множестве. Для неавтономного случая здесь дополнительно используем понятие предельных уравнений, определяемых последовательностями $t_n \to +\infty$ [10].

Теорема. *Предположим, что:*
(i) *существует функция* $W \in C(R^+ \times R^n, R)$ *такая, что для некоторого множества* $X \subset R^n$*, содержащего* U *и не содержащего начало координат, функция* W *положительна при* $x \in U$*, отрицательна при* $x \in \partial X$*, и* $W(t,x) \geqslant -C$ *при* $x \in R^n \setminus X$ *для некоторого* $C > 0$*;*
(ii) $X_0 \subset \tilde{X}_0 = R^n \setminus D_0$*, где* $D_0 = \{x \in X \,: W(t,x) > 0 \forall t \in R^+\}$*;*
(iii) $L_f W(t,\varphi) \leqslant 0$ *при условии, что* $\varphi \in C_W \cap P_t(W) \cap N_W$*;*
(iv) $\frac{L_f W}{|L_g W|^2} < c_0$ *при некотором* $c_0 \geqslant 0$ *и всех* $\varphi \in C_W \setminus N_W$*,* $t \in R^+$*.*
Тогда существует $c_1 > 0$ *такое, что для любой функции* $\gamma \in C(R, [c_1, +\infty))$ *система, описываемая уравнением* (1)*, является безопасной при управлении* (2)*. Если при этом выполняются условия*
(v) $|W'_{u_\gamma}(t,\varphi)| \geqslant U(t,\varphi)$ *для некоторого функционала* U*, удовлетворяющего условиям Каратеодори из [10];*
(vi) *для любых* $t_n \to +\infty$*,* $c \in [-C, 0]$ *множество* $M(t,t_n,c) = \{\varphi \in C_W \mid \exists\, \varphi_n \to \varphi \,:\, \lim_{n\to\infty} U(t+t_n,\varphi_n) = 0,\ \lim_{n\to\infty} \max_{-r\leqslant s\leqslant 0} W(t+t_n+s,\varphi_v(s)) = \lim_{n\to\infty} W(t+t_n,\varphi_n(0)) = c\}$ *не содержит ненулевых решений соответствующего уравнения, предельного к* (1) *при* $u = u_\gamma$*,*
то все решения, начинающиеся в множестве X_0*, стремятся к нулю при* $t \to +\infty$*.*

Заметим, что если правая часть уравнения (1) и функция W не зависят от t, то условие (v) можно опустить, а условие (vi) сводится к требованию, чтобы множество $\{\varphi \in C_W \mid W'_{u_\gamma}(\varphi) = 0,\ \max_{-r\leqslant s\leqslant 0} W(\varphi_v(s)) = W(\varphi_n(0)) = c\}$ не содержало ненулевых решений уравнения (1).

В качестве функции W может использоваться, например, линейная комбинация управляющей функции Ляпунова–Разумихина $V(t,x)$ (см. [15, Определение 1]) и управляющей барьерной функции $B(t,x)$ [8]: $W(t,x) = V(t,x) + bB(t,x)$. При этом удобно определять функцию B постоянной: $B \equiv -C$ вне множества X (см. [3]). В этом случае условия теоремы гарантируют решение задачи безопасной стабилизации при условии, что вместо условия (vi) выполняется следующее: для любой последовательности $t_n \to +\infty$ множество $M(t,t_n,c)$ не содержит решений соответствующего предельного уравнения при $c \neq -C$.

При исследовании устойчивости условия, подобные (vi), обычно накладываются на функцию Ляпунова в случае, когда производная не является строго отрицательной всюду, кроме начала координат (и автоматически выполняются для отрицательно определенной производной). Однако функция, удовлетворяющая условиям теоремы и имеющая отрицательно определенную производную, не существует [16], поэтому условие (vi) оказывается существенным.

Список литературы

1. Kiss A.K., Molnar T.G., Ames A.D., Orosz G. Control barrier functionals: Safety-critical control for time delay systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2023. Vol. 33. P. 7282–7309.
2. Maghenem M., Sanfelice R.G. On the converse safety problem for differential inclusions: Solutions, regularity, and time-varying barrier functions //IEEE Transactions on Automatic Control. 2022. Vol. AC-68, No. 1. P. 172-187.
3. Romdlony M.Z., Jayawardhana B. Stabilization with guaranteed safety using Control Lyapunov–Barrier Function // Automatica. 2016. Vol. 66. P. 39–47.
4. Ames A.D., et al. Control barrier functions: Theory and applications // 2019 18th European control conference (ECC). IEEE, 2019. P. 3420–3431.
5. Фико А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М.: Мир, 1972.
6. Ren W. Razumikhin-type Control Lyapunov and Barrier Functions for Time-Delay Systems // 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), 2021. P. 5471–5476.
7. Ren W., Jungers R.M., Dimarogonas D.V. Razumikhin and Krasovskii approaches for safe stabilization // Automatica. 2022. Vol. 146. P. 110563.
8. Sedova N.O. The Safety Problem for Nonlinear Systems with Delay in Terms of Barrier Functions // Journal of Mathematical Sciences. 2023. Vol. 270, No. 5. P. 1–8.
9. Разумихин Б.С. Об устойчивости систем с запаздыванием // ПММ. 1956. Т. 20, № 4. С. 500–512.
10. Седова Н.О. К вопросу о принципе сведения для нелинейных систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2011. № 9. С. 74–86.
11. Artstein Z. Stabilization with relaxed controls // Nonlinear Analysis. 1983. Vol. 7. P. 1163–1173.
12. Дашковский С.Н., Ефимов Д.В., Сонтаг Э.Д. Устойчивость от входа к состоянию и смежные свойства систем // Автоматика и телемеханика. 2011. № 8. С. 3–40.
13. Sontag E.D. A universal construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization // Syst. Cont. Lett. 1989. Vol. 13. P. 117–123.
14. Jankovic M. Control Lyapunov-Razumikhin functions and robust stabilization of time delay systems // IEEE Trans. on Automatic Control. 2001. Vol. AC-46. P. 1048–1060.
15. Sedova N., Druzhinina O. Stabilization of State Constrained Delayed Systems Using Control-Lyapunov and Control-Barrier Functions. 2022 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). Moscow, Russian Federation, 2022. P. 1–4.
16. Braun P., Kellett C.M. Comment on “Stabilization with guaranteed safety using Control Lyapunov–Barrier Function” // Automatica. 2020. Vol. 122. P. 109225.