

УХОД ОТ СТОЛКНОВЕНИЯ ПРИ УПРАВЛЕНИИ ТЯГОЙ МОБИЛЬНОГО РОБОТА ПО МОДИФИЦИРОВАННОМУ ЗАКОНУ ЛИНЕЙНОГО ТАНГЕНСА

С.А. Решмин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
Россия, 119526, Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1
E-mail: reshmin@ipmnet.ru

М.Т. Бектыбаева

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
Россия, 119526, Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1
E-mail: madi8991@mail.ru

Ключевые слова: оптимизация траектории, фазовые ограничения, максимизация скорости, линейный тангенс.

Аннотация: Решена задача управления тягой мобильного робота во время резкого поворота ввиду появления на пути протяженного препятствия. Целью является максимизация продольной терминальной скорости с соблюдением наложенных фазовых ограничений в каждый момент времени при движении по наклонной плоскости. Приведена модификация закона управления на основе закона линейного тангенса. Численное моделирование проведено для траекторий с разными начальными скоростями и расстояниями до препятствия. В результате показано, что модифицированное управление достаточно эффективно и может быть использовано для избегания столкновения с препятствием.

1. Введение

В данной работе рассматривается движение управляемого колесного объекта по плоскости, наклоненной на некоторый угол α относительно горизонтальной плоскости. Считаем, что объектом является материальная точка постоянной массы, а сила тяги постоянна и максимальная по величине. Тяга реального объекта может создаваться, например, за счёт вращения ведущих колес относительно корпуса и их взаимодействия с наклонной плоскостью. При построении управления используется модифицированный закон линейного тангенса [1]. Применение похожего закона для управления тягой ракетносителей наглядно продемонстрировано в работе [2]. Также исследовалась задача с переменной реактивной тягой [3]. В работах [4, 5, 6] решение получено вместе с подробным изложением условия разрешимости для систем, движущихся в условиях сухого трения, без учёта наклона плоскости движения и дополнительных ограничений.

2. Постановка задачи

2.1. Уравнения движения

В наклонной плоскости введем систему координат xu . Начало координат совпадает с начальной позицией объекта. На расстоянии h от начала координат находится прямая, на которую нужно перевести траекторию движения объекта. Выберем ось x параллельной этой прямой, а ось u — перпендикулярной. Угол между осью и прямой, образованной пересечением наклонной плоскости и горизонтальной плоскости равен β . Сила тяги ограничена максимальной величиной силы трения в соответствии с законом Амонтона–Кулона:

$$(1) \quad |F| \leq fF_N, F_N = mg\cos\alpha,$$

где f — коэффициент сухого трения, F_N — сила нормальной реакции, m — масса объекта, g — ускорение свободного падения. Далее предполагаем, что

$$(2) \quad f > \operatorname{tg} |\alpha|.$$

Это означает, что может быть обеспечено движение по наклонной плоскости в любом направлении, в том числе с увеличением высоты. Также предполагаем, что движение происходит с проскальзыванием или на грани проскальзывания. При этом уравнения движения в прямоугольной системе координат xu имеют вид

$$(3) \quad \dot{x} = v_x, \dot{y} = v_y, \dot{v}_x = a\cos u - g_x, \dot{v}_y = a\sin u - g_y, a = fg\cos\alpha = \operatorname{const},$$

где u — угол, отсчитываемый от оси абсцисс. Проекция ускорения свободного падения заданы в виде

$$g_x = g\sin\alpha\sin\beta, g_y = g\sin\alpha\cos\beta.$$

Пусть заданы начальные координаты и начальные проекции скорости:

$$(4) \quad x(0) = x_0 = 0, y(0) = y_0 = 0, v_x(0) = v_{x0} = 0, v_y(0) = v_{y0} > 0.$$

Здесь нулевые значения координат и проекции скорости на ось абсцисс выбраны для определенности. В фиксированный конечный момент T задано положительное значение координаты y , проекция скорости v_y считается нулевой:

$$(5) \quad y(T) = h > 0, v_y(T) = 0,$$

величины $x(T), v_x(T)$ не заданы. Сформулируем две задачи управления.

Задача 1. На основе закона линейного тангенса требуется построить эффективное управление $u(t)$, которое переводит систему (3) за время T из начального состояния (4) в конечное состояние (5) и одновременно максимизирует, насколько это возможно, проекцию скорости v_x :

$$v_x(T) \rightarrow \max.$$

При этом требуется учесть фазовое ограничение

$$(6) \quad 0 \leq y(t) \leq h,$$

а также указать конкретные множества значения T и v_{y0} , при которых поставленная задача имеет решение.

Задача 2. Управление и соответствующую траекторию, полученные при решении задачи 1, нужно при разных значениях T сравнить по эффективности с другими альтернативными стратегиями разгона, у которых такое же время окончания T , но терминальная координата $y(T)$ не обязательно равна h .

2.2. Необходимые условия существования

К необходимым условиям существования решения относится ограничение на проекцию начальной скорости на ось ординат:

$$(7) \quad 0 < v_{y0} \leq \sqrt{2(a + g_y)h},$$

а также наличие запаса по времени маневра:

$$(8) \quad T > T_{\min} = \frac{1}{a - g_y} \left[\sqrt{\frac{2a(2h(a - g_y) + v_{y0}^2)}{a + g_y}} - v_{y0} \right].$$

Условия гарантируют, что найдутся законы управления, для которых будет выполнено фазовое ограничение (6). Величина T_{\min} найдена из анализа соответствующего предельного случая, причём для скорости v_{y0} , удовлетворяющей (7).

2.3. Нахождение критического значения времени, при превышении которого происходит наезд на препятствие

При построении решения для задач 1 и 2 использовался закон линейного тангенса. Приведем его общий вид и связь констант интегрирования, полученные в ходе решения краевой задачи принципа максимума:

$$(9) \quad u(t) = \operatorname{arctg}(-Ct + \operatorname{tg} u_0),$$

$$(10) \quad C = \frac{2a[(a \sin u_0 - g_y)T + v_{y0}]}{\cos u_0 [a^2 T^2 - (v_{y0} - g_y T)^2]}.$$

Для нахождения критического значения времени T_* процесса воспользуемся условием

$$(11) \quad u(T) = \arcsin \frac{g_y}{a} \quad (\dot{v}_y(T) = 0),$$

откуда, воспользовавшись связью (10) (полученной из второго равенства (5); подробности см. также в [4, 5, 6]), получим квадратное уравнение относительно параметра T с двумя корнями, один из которых принимает значение меньше условия разрешимости T_{\min} , поэтому оно было исключено из рассмотрения. Далее полученный корень подставляется в первое терминальное условие (5), которое решается численно относительно параметра u_0 . Выражение для критического значения времени имеет следующий вид

$$(12) \quad T_* = \frac{v_{y0} \left(a - g_y \sin u_0 + \cos u_0 \frac{a^2 + g_y^2}{\sqrt{a^2 - g_y^2}} \right)}{2a g_y - \sin u_0 (a^2 + g_y^2) - g_y \cos u_0 \sqrt{a^2 - g_y^2}}.$$

В результате модифицированное управление будет состоять из двух этапов. На отрезке $0 < t \leq T_*$ управление задаётся согласно (9), в соответствующих формулах (5) и (10) время окончания выбираем равным T_* . Далее на интервале $T_* < t \leq T$ полагаем $u(t) = \arcsin \frac{g_y}{a}$.

3. Результаты

Приведем результаты численного моделирования для $T \geq T_*$. Установим следующие параметры рассматриваемой задачи:

$$f = 0.509, \quad g = 9.806 \text{ м/с}^2, \quad a = 5 \text{ м/с}^2, \quad h = 10 \text{ м}.$$

Условие (2) накладывает ограничение на начальный угол α , найдем его:

$$|\alpha| < \operatorname{arctg} f = 27.015^\circ,$$

тогда пусть начальный угол $\alpha = \pi/8$. В соответствии с (7) выберем начальную составляющую скорости вдоль оси ординат:

$$0 < v_{y0} < 12.372 \text{ м/с},$$

например, $v_{y0} = 5 \text{ м/с}$. Тогда согласно (8) и (12)

$$T_{\min} = 2.000 \text{ с}, \quad T_* = 6.257 \text{ с}.$$

Приведем график для обычного линейного тангенса (9) для нескольких значений времени маневра, превышающих критическое значение (рис. 2).

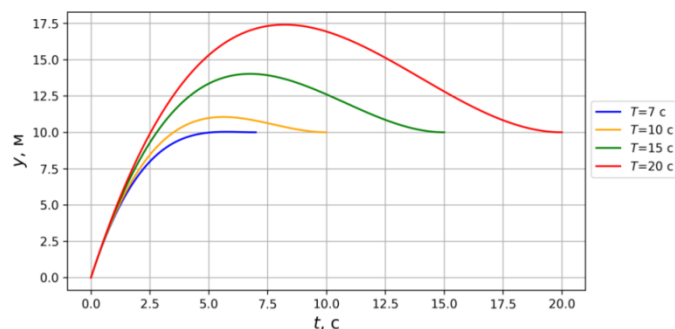


Рис. 2. Зависимость $y(t)$ для закона линейного тангенса при $T > T_*$.

Соответствующий график зависимости проекции скорости на ось ординат от времени имеет следующую особенность: на графике появляются две точки, в которых v_y обращается в нуль. Между этими точками v_y принимает отрицательное значение. С этим фактом связано используемое ранее условие (11).

Для соблюдения фазового ограничения (6) в каждый момент времени построим модифицированное управление. Приведем результаты нового управления для других высот (рис. 3), при этом для каждой новой траектории приведем траекторию с управлением по линейному тангенсу. Отметим, что функционал будет принимать наибольшее значение для красной кривой (особенность подробнее изучена при решении задачи 2).

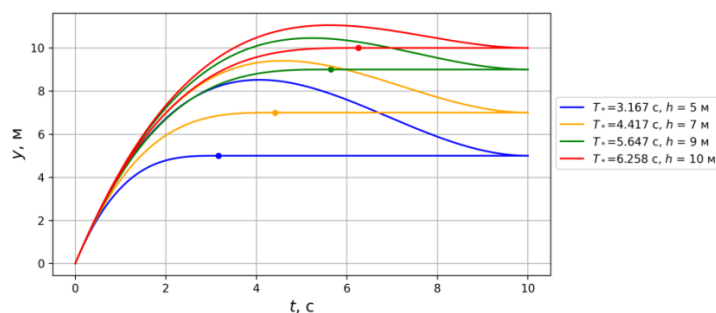


Рис. 3. Зависимость $y(t)$ для модифицированного управления при $T > T_*(h)$.

Перейдем к решению задачи 2. Установим следующие параметры:

$$H = 10 \text{ м}, v_{y0} = 10 \text{ м/с}, T = T_*(H) = 3.002 \text{ с.}$$

Сравнение траектории с этими параметрами проводилось с альтернативными траекториями, состоящими из двух участков (см. раздел 2.3).

Таблица 1. Основные параметры для модифицированного управления.

$h, \text{ м}$	$T_*, \text{ с}$	$\tau, \text{ с}$	$u_0, \text{ рад}$	$C, \text{ с}^{-1}$	$v_x(T), \text{ м/с}$
10	3.002	2.2	-0.641	-0.291	5.471
		2.5	-0.736	-0.468	5.639
		T_*	-0.772	-0.533	5.671
9	2.623	2.0	-0.799	-0.456	4.888
		2.5	-0.903	-0.719	5.051
		T_*	-0.905	-0.724	5.052
7	1.722	1.5	-1.280	-2.031	2.413
		1.6	-1.312	-2.512	2.496

		T_*	-1.321	-2.640	2.506
--	--	-------	--------	--------	-------

4. Заключение

Решена задача эффективного управления колесным роботом при скоростном маневре с уклонением от препятствия, при этом целью ставилась максимизация продольной терминальной скорости. Проведено численное моделирование для закона управления на основе линейного тангенса и соответствующей модификации, адаптированной к фазовым ограничениям. Доказана эффективность нового управления путём сравнения значений оптимизируемого функционала у разных траекторий. Также получена простая процедура для определения критического значения времени маневра.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-00128), <https://rscf.ru/project/23-11-00128/>.

Список литературы

1. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
2. Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли // УФН. 1957. Т. 63, № 1. С. 5-32.
3. Исаев В.К. Принцип максимума Л.С. Понтрягина и оптимальное программирование тяги ракет // Автоматика и телемеханика. 1961. Т. 22, Вып. 8. С. 986-1001.
4. Решмин С.А. Оптимальное управление силой тяги при скоростном маневрировании в условиях сухого трения // ПММ. 2023. Т. 87, Вып. 4. С. 604-617.
5. Решмин С.А., Бектыбаева М.Т. Эффективное управление направлением тяги при скоростном маневре в плоскости // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2023. Т. 24, № 3. С. 233-240.
6. Бектыбаева М.Т., Решмин С.А. Методика решения задачи оптимального управления механическими системами при ограничении на модуль управляющей силы // Modern European Researches. 2023. Т. 1, Вып. 1. С. 38-44.