УДК 517.977.1

О ЛИНЕАРИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ВЕКТОРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ НА ОСНОВЕ МАСШТАБИРОВАНИЯ ВРЕМЕНИ И ПРОДОЛЖЕНИЯ

Д.А. Фетисов

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Россия, 105005, Москва, 2-ая Бауманская ул., 5, стр. 1

E-mail: dfetisov@yandex.ru

Ключевые слова: нелинейная система, линеаризация, масштабирование времени, продолжение.

Аннотация: Для нелинейных систем общего вида с векторным управлением рассматривается задача линеаризации на основе масштабирования времени и продолжения. Показывается, что для линеаризации нелинейной системы на основе масштабирования времени необходимо составить систему Пфаффа, естественным образом ассоциированную с системой управления, и исключить из нее дифференциал времени. Нелинейная система управления линеаризуема на основе масштабирования времени тогда и только тогда, когда полученная в результате система Пфаффа диффеоморфна расширенной нормальной форме Гурса. Показывается, что если система управления не линеаризуема на основе масштабирования времени, но существуют координаты, в которых указанная система Пфаффа записывается как расширенная нормальная форма Гурса, то нелинейная система управления линеаризуется на основе масштабирования времени и продолжения.

1. Введение

Проблема линеаризации нелинейных систем управления находится в центре внимания многих исследователей уже на протяжении нескольких десятков лет. Наиболее простой класс преобразований, применяемых для линеаризации, включает в себя гладкие невырожденные замены состояния и управления. Если нелинейная система может быть преобразована в линейную управляемую систему в указанном классе преобразований, то говорят, что эта система линеаризуема обратной связью [1]. Необходимые и достаточные условия линеариуземости обратной связью были получены в работе [1]. Отметим, что указанные условия сформулированы на языке векторных полей и распределений. Двойственная формулировка условий линеаризуемости обратной связью известна из статьи [2].

Концепция плоскостности [3] стала естественным обобщением понятия линеаризуемости обратной связью. Напомним, что плоской называется система, траектории которой могут быть параметризованы конечным набором функций и их производных в силу системы. Функции из указанного набора называют плоским выходом системы. Известно, что плоскостность системы управления эквивалентна линеаризуемости обратной связью системы, полученной в результате применения эндогенной динамической обратной связи к исходной системе. Примеры показывают, что модели многих физических явлений описываются плоскими системами. Вместе с тем, есть примеры систем, не являющихся плоскими. Для таких систем бывает целесообразно рассмотреть (в дополнение к традиционному набору преобразований) преобразования, содержащие масштабирование времени – замену независимой переменной. В работе [4] было введено понятие орбитальной плоскостности. Систему управления называют орбитально плоской, если распределение, порожденное ее бесконечномерным векторным полем, диффеоморфно распределению, порожденному бесконечномерным векторным полем тривиальной линейной системы. Орбитальная плоскостность системы управления означает, что эта система становится линейной тривиальной системой в результате применения преобразований, включающих в себя, среди прочего, масштабирования времени.

В настоящее время условия линеаризуемости нелинейных систем на основе масштабирования времени известны лишь для систем, аффинных по управлению, и класса преобразований, включающего в себя невырожденные замены состояния, управления и времени. В этой связи стоит упомянуть понятия орбитальной линеаризации аффинных систем [5, 6] и A-орбитальной линеаризации аффинных систем [7, 8]. В работе [9] были получены необходимые и достаточные условия линеаризуемости систем с одним управлением на основе масштабирования времени и однократного продолжения. В настоящем докладе эти условия обобщаются на случай систем с векторным управлением.

2. Предварительные сведения

Пусть X – n-мерное гладкое многообразие. Будем обозначать через $C^\infty(X)$ кольцо гладких функций $X \to \mathbb{R}$. Под гладкостью всюду в докладе понимаем бесконечную дифференцируемость. Через $\Lambda^k(X)$ будем обозначать $C^\infty(X)$-модуль гладких дифференциальных k-форм, заданных на многообразии X. Напомним, что системой Пфаффа $\mathcal{K}$ на многообразии X называют подмодуль модуля $\Lambda^1(X)$. Производным флагом системы Пфаффа $\mathcal{K} \in \Lambda^1(X)$ называют последовательность систем Пфаффа $\mathcal{K}^0 \supset \mathcal{K}^1 \supset \mathcal{K}^2 \supset \ldots$, определяемую по следующему правилу:

$$\mathcal{K}^0 = \mathcal{K}, \quad \mathcal{K}^{j+1} = \{\omega \in \mathcal{K}^j : d\omega \equiv 0 \mod \mathcal{K}^j\}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

где через $d\omega$ обозначен внешний дифференциал формы ω. Если система Пфаффа $\mathcal{K}$ имеет ранг q и задается соотношением $\mathcal{K} = \{\omega^1, \ldots, \omega^q\}$, то характеристической системой для системы Пфаффа $\mathcal{K}$ называют систему Пфаффа

$$\mathcal{C}(\mathcal{K}) = \{\xi \in \mathcal{K}^\perp : \xi \lrcorner\, d\omega^i \in \mathcal{K},\ 1 \leqslant i \leqslant q\}^\perp,$$

где $\xi \lrcorner\, d\omega^i$ – внутреннее произведение векторного поля ξ и дифференциальной формы $d\omega^i$.

Будем говорить, что система Пфаффа $\mathcal{K} \in \Lambda^1(X)$ преобразуется в расширенную нормальную форму Гурса в окрестности точки $x_0 \in X$, если существуют координаты, содержащие функции

$$y^0, \quad y^i_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant r_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant s, \tag{1}$$

и такие, что система Пфаффа $\mathcal{K}$ в этих координатах в окрестности точки x_0 принимает вид

$$\mathcal{K} = \{dy_1^i - y_2^i dy^0, \ldots, dy_{r_i-1}^i - y_{r_i}^i dy^0,\, 1 \leqslant i \leqslant s\}.$$

Отметим, что из соображений размерности всегда выполнено неравенство $\sum_{i=1}^s r_i + 1 \leqslant n$. Если оно превращается в равенство $\sum_{i=1}^s r_i + 1 = n$, то функции (1) образуют новую систему координат в окрестности точки x_0. В этом случае будем говорить, что система Пфаффа $\mathcal{K}$ диффеоморфна расширенной нормальной форме Гурса в окрестности точки x_0.

Необходимое и достаточное условие того, что существуют координаты, содержащие (1), в которых система Пфаффа становится расширенной нормальной формой Гурса, приведено, например, в работе [8]. Там же можно найти алгоритм преобразования системы Пфаффа к расширенной нормальной форме Гурса.

3. Постановка задачи

Далее рассматриваем нелинейную систему общего вида с векторным управлением

$$\Sigma: \quad \dot{x} = F(x, u),$$

где $x = (x^1, \ldots, x^n) \in X$ – состояние, $u = (u^1, \ldots, u^m) \in U$ – управление, X – открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, U – открытое подмножество $\mathbb{R}^m$, $n > m$, F – гладкое векторное поле. Далее полагаем, что система Σ рассматривается в окрестности произвольной точки $(x_0, u_0) \in X \times U$, такой, что

$$F(x_0, u_0) \neq 0, \quad \mathrm{Rg}\frac{\partial F}{\partial u}(x_0, u_0) = m.$$

Определение 1. *Будем говорить, что система Σ линеаризуема на основе масштабирования времени в окрестности точки $(x_0, u_0) \in X \times U$, если существует диффеоморфизм Ψ: $(t, x, u) \mapsto (\tau, y, v)$, который задается соотношениями*

$$\begin{gathered} \dot{\tau} = \theta(x, u), \quad y = \phi(x), \quad v = \psi(x, u), \\ \theta(x_0, u_0) \neq 0, \quad \det\frac{\partial \phi}{\partial x}(x_0) \neq 0, \quad \det\frac{\partial \psi}{\partial u}(x_0, u_0) \neq 0 \end{gathered}$$

и преобразует систему Σ в окрестности точки (x_0, u_0) в систему

$$\Sigma_{\mathrm{lin}}: \quad \begin{array}{l} (y^0)' = 1, \\ (y_1^i)' = y_2^i, \ldots, (y_{r_i-1}^i)' = y_{r_i}^i,\, (y_{r_i}^i)' = v^i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \end{array}$$

где r_1, ..., r_m – некоторые положительные целые числа, $\sum_{i=1}^m r_i + 1 = n$.

Определение 2. *Под однократным продолжением системы Σ в окрестности точки (x_0, u_0) будем понимать систему Σ^{1,v^m}, полученную заменой управления*

$$u = b(x, v), \quad \det\frac{\partial b}{\partial v}(x_0, v_0) \neq 0, \quad u_0 = b(x_0, v_0), \quad v = (v^1, \ldots, v^m),$$

с последующим продолжением функции v^m:

$$(2) \qquad \Sigma^{1,v^m}: \quad \begin{cases} \dot{x} = F(x, b(x, v)), \\ \dot{v}^m = w^m \end{cases}$$

Отметим, что система Σ^{1,v^m} – это нелинейная система с состоянием (x, v^m) и управлением $(v^1, \dots, v^{m-1}, w^m)$.

Определение 3. *Будем говорить, что система Σ линеаризуема на основе масштабирования времени и однократного продолжения в окрестности точки (x_0, u_0), если существует однократное продолжение (2), линеаризуемое на основе масштабирования времени в окрестности точки $(x_0, v_0^m, v_0^1, \dots, v_0^{m-1}, w_0^m)$ для некторого $w_0^m \in \mathbb{R}$.*

Определение 4. *Будем говорить, что система Σ линеаризуема на основе масштабирования времени и полного продолжения в окрестности точки (x_0, u_0), если аффинная система*

$$\Sigma^1: \quad \begin{cases} \dot{x} = F(x, u), \\ \dot{u} = w \end{cases}$$

с состоянием $(x, u) \in X \times U$ и управлением $w \in \mathbb{R}^m$ линеаризуема на основе масштабирования времени в окрестности точки (x_0, u_0, w_0) для некоторого $w_0 \in \mathbb{R}^m$.

Задача настоящей работы – получить для системы Σ условия линеаризуемости на основе масштабирования времени, на основе масштабирования времени и однократного продолжения, а также на основе масштабирования времени и полного продолжения.

4. Результаты

Сопоставим системе Σ на множестве $\mathbb{R} \times X \times U$ систему Пфаффа $\mathcal{J} = \{dx^i - F^i(x, u)dt, 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Чтобы решить задачу линеаризации системы Σ на основе масштабирования времени, построим систему Пфаффа

$$\mathcal{I} = \left\{ \omega \in \mathcal{J} : \omega \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = 0 \right\}.$$

Нетрудно видеть, что $\mathcal{I}$ задается выражением

$$\mathcal{I} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^j dx^i,\ 1 \leqslant j \leqslant n-1 \right\}, \tag{3}$$

где $\lambda^1(x, u), \dots, \lambda^{n-1}(x, u)$ – фундаментальная система решений уравнения $\sum_{i=1}^n \lambda_i F^i(x, u) = 0$.

Отметим, что по построению система Пфаффа $\mathcal{I}$ задана на множестве $\mathbb{R} \times X \times U$. В дальнейшем, тем не менее, мы будем полагать, что $\mathcal{I}$ – система Пфаффа, заданная на множестве $X \times U$ и определяемая выражением (3).

Теорема 1. *Система Σ линеаризуема на основе масштабирования времени в окрестности точки $(x_0, u_0) \in X \times U$ тогда и только тогда, когда система Пфаффа $\mathcal{I}$ диффеоморфна расширенной нормальной форме Гурса в окрестности точки (x_0, u_0).*

Чтобы сформулировать условие линеаризуемости на основе масштабирования времени и продолжения, введем в рассмотрение систему Пфаффа $\mathcal{X} = \{dx^1, \dots, dx^n\}$, заданную на множестве $X \times U$.

Теорема 2. *Пусть Σ не линеаризуема на основе маситабирования времени в окрестности точки $(x_0, u_0) \in X \times U$, но существуют координаты, содержащие*

$$y^0, \quad y^i_j, \quad v^i, \quad 1 \leqslant i \leqslant s, \quad 1 \leqslant j \leqslant r_i,$$

в которых система Пфаффа $\mathcal{I}$ записывается в окрестности точки (x_0, u_0) как расширенная нормальная форма Гурса

$$\mathcal{I} = \{dy^i_j - y^i_{j+1}dy^0, dy^i_{r_i} - v^i dy^0,\, 1 \leqslant i \leqslant s, 1 \leqslant j \leqslant r_i - 1\}.$$

- *Если $1 < s < m$ или $s = 1$, $\mathcal{C}(\mathcal{I}^{n-2}) \subset \mathcal{X}$, то $m = s + 1$ и система Σ линеаризуема на основе масштабирования времени и однократного продолжения в окрестности точки (x_0, u_0),*
- *Если $s = 1$, $\mathcal{C}(\mathcal{I}^{n-2}) \not\subset \mathcal{X}$, то $m = 2$ и система Σ линеаризуема на основе масштабирования времени и полного продолжения в окрестности точки (x_0, u_0).*

5. Заключение

Отметим, что в докладе рассматривался лишь случай, когда существуют координаты, в которых система Пфаффа $\mathcal{I}$ записывается как расширенная нормальная форма Гурса. Направление для дальнейших исследований – получить условия линеаризуемости на основе масштабирования времени и однократного продолжения для случая, когда указанное условие относительно системы Пфаффа $\mathcal{I}$ не выполнено.

Список литературы

1. Jakubczyk B.,Respondek W. On linearization of control systems // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. 1980. Vol. 28. P. 517–522.
2. Gardner R.B., Shadwick W.F. The GS Algorithm for Exact Linearization to Brunovsky Normal Form // IEEE Tranactions on Automatic Control. 1992. Vol. AC-37, No. 2. P. 224–230.
3. Fliess M., Levine J., Martin P., Rouchon P. Flatness and defect of nonlinear systems: introductory theory and examples // International Journal of Control. 1995. Vol. 61. P. 1327–1361.
4. Fliess M., Levine J., Martin P., Rouchon P. A Lie-Backlund Approach to Equivalence and Flatness of Nonlinear Systems // IEEE Tranactions on Automatic Control. 1999. Vol. AC-44, No. 5. P. 922–937.
5. Respondek W. Orbital feedback linearization of single-input nonlinear control systems // IDAC Proceedings Volumes. 1998. Vol. 31, No. 17. P. 483–488.
6. Li S.J., Respondek W. Orbital feedback linearization for multi-input control systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2015. Vol. 25, No. 9. P. 1352–1378.
7. Fetisov D.A. On Some Approaches to Linearization of Affine Systems // IFAC-PapersOnLine. 2019. Vol. 52, No. 16. P. 700–705.
8. Fetisov D.A. A-Orbital feedback linearization of multiinput control affine systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2020. Vol. 30, No. 14. P. 5602–5627.
9. Fetisov D.A. Goursat Normal Form and Linearization of Single-Input Nonlinear Control Systems via Time Scaling and Prolongation // IFAC-PapersOnLine. 2023. Vol. 56, No. 2. P. 7258–7263.