УДК 681.5

РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ КВАДРОКОПТЕРА ПО ВЫХОДУ

С.А. Ким
Университет ИТМО
Россия, 197101, г. Санкт-Петербург, Кронверкский проспект, 49, литер А
E-mail: skim@itmo.ru

А.А. Пыркин
Университет ИТМО
Россия, 197101, г. Санкт-Петербург, Кронверкский проспект, 49, литер А
E-mail: pyrkin@itmo.ru

О.И. Борисов
Университет ИТМО
Россия, 197101, г. Санкт-Петербург, Кронверкский проспект, 49, литер А
E-mail: borisov@itmo.ru

Ключевые слова: робастное управление, управление движением, квадрокоптеры, управление по выходу.

Аннотация: Рассматривается задача управления движением квадрокоптера по выходу. С применением геометрического подхода модель квадрокоптера приводится к нормальной форме с нестационарным коэффициентом усиления, который впоследствии стационализируется с помощью двойного интегрирования управляющего воздействия. На основе метода расширенного наблюдателя получен закон робастного управления по выходу.

1. Введение

Движение квадрокоптера описывается многомерной нелинейной моделью, которая зачастую содержит параметрические, структурные, функциональные и сигнальные неопределенности, что существенно затрудняет синтез законов управления и тем самым сохраняет актуальность такой задачи и привлекает интерес исследователей к ее решению. Распространенным подходом к управлению движением квадрокоптера является линеаризация модели, что позволяет в известной степени упростить синтез закона управления, однако на практике при этом часто страдают показатели качества переходных процессов ввиду модельных неточностей. Известны решения, в которых рассматривается нелинейная модель движения, например [1, 2], однако в этих работах она неполная, поскольку в ней исключена динамика угла рыскания, а методика настройки параметров предлагаемого алгоритма управления затруднена. В работе [3] учтены эти недостатки и получена полная модель движения квадрокоптера для задачи динамического позиционирования, на основе которой предложены решения, обобщающие предыдущий результат [1] на случай изменяющегося угла рыскания, и упрощающие методику настройки закона управления, однако полученные в этой работе алгоритмы требуют измерения состояния. Настоящая работа развивает ранее полученный результат [3] на случай неизмеримых производных выходных переменных, что достигается путем синтеза закона робастного управления по выходу на основе метода расширенного наблюдателя.

2. Постановка задачи

Рассмотрим модель движения квадрокоптера

$$\begin{bmatrix}\dot x\\ \dot y\\ \dot z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}\dot v_x\\ \dot v_y\\ \dot v_z\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}a_x & 0 & 0\\ 0 & a_y & 0\\ 0 & 0 & a_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\end{bmatrix} + \frac{1}{m}\begin{bmatrix}c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi\\ s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi\\ c_\theta c_\psi\end{bmatrix}\left(\sum_{i=1}^4 F_i\right) - \begin{bmatrix}0\\ 0\\ g\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}\ddot\psi\\ \ddot\theta\\ \ddot\phi\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}a_\psi & 0 & 0\\ 0 & a_\theta & 0\\ 0 & 0 & a_\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\psi\\ \dot\theta\\ \dot\phi\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{\ell}{J_\psi} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\ell}{J_\theta} & 0\\ 0 & 0 & \frac{C}{J_\phi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\end{bmatrix},$$

где x, y, z – декартовы координаты центра масс; ϕ, θ, ψ – углы рысканья, тангажа и крена; $g = 9,81\,\text{м/с}^2$ – ускорение свободного падения; m – масса; F_i, $i = \overline{1,4}$ – подъемные силы роторов; ℓ – расстояние между центром тяжести и роторами; J_ψ, J_θ, J_ϕ – моменты инерции; C – коэффициент пропорциональности; $a_x, a_y, a_z, a_\psi, a_\theta, a_\phi$ – коэффициенты вязкого трения; $c_{(\cdot)} \equiv \cos(\cdot)$; $s_{(\cdot)} \equiv \sin(\cdot)$.

Выберем сигнал для подъемных сил роторов F_i как

$$\begin{bmatrix}F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{J_\phi}{C} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{J_\psi}{\ell} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_\theta}{\ell}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1 + g\\ u_2\\ u_3\\ u_4\end{bmatrix}$$

и с помощью замены переменных

$$\begin{aligned}
\tilde\xi_1 &= \begin{bmatrix}\tilde\xi_{11}\\ \tilde\xi_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}z - z^*\\ \phi - \phi^*\end{bmatrix} = \xi_1 - \begin{bmatrix}z^*\\ \phi^*\end{bmatrix},\\
\tilde\xi_2 &= \xi_2,\\
\tilde\xi_3 &= \begin{bmatrix}\tilde\xi_{31}\\ \tilde\xi_{32}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x - x^*\\ y - y^*\end{bmatrix} = \xi_3 - \begin{bmatrix}x^*\\ y^*\end{bmatrix},\\
\tilde\xi_4 &= \xi_4,\\
\tilde\xi_5 &= \xi_5,\\
\tilde\xi_6 &= \xi_6,
\end{aligned}$$

и утверждения 1 из [3] получим динамическую модель движения квадрокоптера в отклонениях от заданного положения и ориентации:

$$\dot{\tilde{\xi}}_1 = \tilde{\xi}_2,$$

$$\dot{\tilde{\xi}}_2 = q_1(\psi, \theta) + b_1(\psi, \theta) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$\dot{\tilde{\xi}}_3 = \tilde{\xi}_4,$$

$$\dot{\tilde{\xi}}_4 = \beta(t)\tilde{\xi}_5,$$

$$\dot{\tilde{\xi}}_5 = \tilde{\xi}_6,$$

$$\dot{\tilde{\xi}}_6 = q_2(\phi, \psi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}) + b_{21}(\phi, \psi, \theta) u_2 + b_{22}(\phi, \psi, \theta) \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Целью работы является синтез закона управления по выходу для u_1, u_2, u_3, u_4 такого, чтобы нулевое положение равновесия $\tilde{\xi} = \mathrm{col}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3, \tilde{\xi}_4, \tilde{\xi}_5, \tilde{\xi}_6) = 0$ было асимптотически устойчивым.

3. Синтез закона управления по состоянию

Шаг 1. Введем новые переменные

$$\zeta_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\xi}_3 \end{bmatrix}, \quad \zeta_2 = \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_2 \\ \tilde{\xi}_4 \end{bmatrix},$$

тогда полная модель движения квадрокоптера (1)–(2) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= \zeta_2, \\ \dot{\zeta}_2 &= \begin{bmatrix} q_1(\psi, \theta) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(\psi, \theta) & 0 \\ 0 & \beta(t) I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \xi_5 \end{bmatrix}, \\ \dot{\tilde{\xi}}_5 &= \tilde{\xi}_6, \\ \dot{\tilde{\xi}}_6 &= q_2(\phi, \psi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}) + b_{21}(\phi, \psi, \theta) u_2 + b_{22}(\phi, \psi, \theta) \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3}$$

Шаг 2. Пусть вектор управляющих воздействий $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ будет выходом двух интеграторов с некоторым входом $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, который будет выбран далее:

$$\dot{u}_{12} = \rho_{12}, \qquad \dot{\rho}_{12} = v_{12}.$$

Шаг 3. Модель движения квадрокоптера может быть представлена в нормальной форме.

Утверждение 1. *Агрегированная модель движения квадрокоптера может быть представлена в нормальной форме:*

$$
\begin{array}{rcl}
\dot{\zeta}_1 & = & \zeta_2, \\
\dot{\zeta}_2 & = & \zeta_3, \\
\dot{\zeta}_3 & = & \zeta_4, \\
\dot{\zeta}_4 & = & q_4(\zeta,\phi) + b_4(\zeta,\phi)U,
\end{array} \tag{4}
$$

где $\zeta = \mathrm{col}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) \in \mathbb{R}^{16}$ *– вектор переменных состояния,* $U = \mathrm{col}(v_1, v_2, u_3, u_4)$ *– вектор управляющих воздействий, а функции* $q_4(\zeta,\phi)$ *и* $b_4(\zeta,\phi)$ *обладают следующими свойствами:*

$$
q_4(0,\phi) = 0,
$$

матрица $b_4(\zeta,\phi)$ *является невырожденной для всех значений аргументов, а также*

$$
b_4(0,\phi) = g \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \beta \begin{bmatrix} -c_\phi & -s_\phi \\ -s_\phi & c_\phi \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \tag{5}
$$

Доказательство утверждения 1 может быть получено путем последовательного вычисления производных переменной $\zeta_3 = \dot{\zeta}_2$ и $\zeta_4 = \dot{\zeta}_3$.

Для системы (4) закон управления по состоянию принимает вид:

$$
U = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = b_4(\zeta,\phi)^{-1}[-q_4(\zeta,\phi) - \gamma_1\zeta_1 - \gamma_2\zeta_2 - \gamma_3\zeta_3 - \gamma_4\zeta_4], \tag{6}
$$

где выбор параметров $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 > 0$ определяется заданными показателями качества замкнутой системы, модель которой имеет вид

$$
\begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \dot{\zeta}_2 \\ \dot{\zeta}_3 \\ \dot{\zeta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_4 \\ -\gamma_1 I_4 & -\gamma_2 I_4 & -\gamma_3 I_4 & -\gamma_4 I_4 \end{bmatrix},
$$

откуда нетрудно показать, что параметры γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 могут быть выбраны как соответствующие коэффициенты типовых характеристических полиномов Баттерворта или Ньютона или же вычислены методом модального управления.

В соответствии с шагом 2 приведенного выше алгоритма для системы (3) закон управления (6) дополняется выражением вида

$$
\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},
$$

однако использование закона управления (6) на практике затруднено, поскольку требует знания полного состояния $\zeta = \mathrm{col}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$ и функций $b_4(\zeta,\phi)^{-1}$ и $q_4(\zeta,\phi)$, в связи с чем в следующем разделе перейдем к синтезу закона управления по выходу.

4. Синтез закона управления по выходу

Следуя [4], для системы (4) выберем закон управления по выходу

$$U = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \mathrm{sat}_N(b_4(0,\phi)^{-1}[-\sigma - \gamma_1\hat{\zeta}_1 - \gamma_2\hat{\zeta}_2 - \gamma_3\hat{\zeta}_3 - \gamma_4\hat{\zeta}_4]), \tag{7}$$

где $\mathrm{sat}_N(\cdot)$ – гладкая функция насыщения с уровнем N, $b_4(0,\phi)$ – обратимая матрица вида (5), σ и $\hat{\zeta} = \mathrm{col}(\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2, \hat{\zeta}_3, \hat{\zeta}_4)$ – состояния расширенного наблюдателя вида

$$\begin{array}{rcl} \dot{\hat{\zeta}}_1 & = & \hat{\zeta}_2 + \kappa A_4(\zeta_1 - \hat{\zeta}_1), \\ \dot{\hat{\zeta}}_2 & = & \hat{\zeta}_3 + \kappa^2 A_3(\zeta_1 - \hat{\zeta}_1), \\ \dot{\hat{\zeta}}_3 & = & \hat{\zeta}_4 + \kappa^3 A_2(\zeta_1 - \hat{\zeta}_1), \\ \dot{\hat{\zeta}}_4 & = & \sigma + b_4(0,\phi)U + \kappa^4 A_1(\zeta_1 - \hat{\zeta}_1), \\ \dot{\sigma} & = & \kappa^5 A_0(\zeta_1 - \hat{\zeta}_1), \end{array} \tag{8}$$

где κ – высокий коэффициент усиления, $A_0, A_1.A_2, A_3, A_4$ – положительно определенные матрицы такие, что собственные числа матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -A_4 & I_4 & 0 & 0 & 0 \\ -A_3 & 0 & I_4 & 0 & 0 \\ -A_2 & 0 & 0 & I_4 & 0 \\ -A_1 & 0 & 0 & 0 & I_4 \\ -A_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

вещественные и отрицательные.

Можно показать, что закон управления (7), (8) обеспечивает в замкнутой системе достижение полуглобальной асимптотической устойчивости, а вместе с тем применение самого закона не требует знания полного состояния $\zeta = \mathrm{col}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$ и функций $b_4(\zeta,\phi)^{-1}$ и $q_4(\zeta,\phi)$.

5. Заключение

В настоящей работе решена задача управления движением квадрокоптера по выходу. Этапы решения включают модельные преобразования с приведением к нормальной форме, синтез закона управления по состоянию, обеспечивающего линеаризацию объекта обратной связью, а также синтез закона управления по выходу, обеспечивающего полгулобальную асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования РФ (паспорт госзадания № 2019-0898).

Список литературы

1. Borisov O. I., Pyrkin A. A., Isidori A. Application of enhanced extended observer in station-keeping of a quadrotor with unmeasurable pitch and roll angles // IFAC-PapersOnLine. 2019. Vol. 52, No. 16. P. 837—842.

2. Борисов О. И., Каканов М. А., Живицкий А. Ю., Пыркин А. А. Робастное траекторное управление квадрокоптером по выходу на основе геометрического подхода // Изв. вузов. Приборостроение. 2021. Т. 64, № 12. С. 982—992.
3. Ким С. А., Пыркин А. А., Борисов О. И. Алгоритмы управления движением квадрокоптера в режиме динамического позиционирования // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, No 10. С. 834—844.
4. Freidovich L. B., Khalil H. K. Performance recovery of feedback-linearization-based designs // IEEE Transactions on Automatic Control. 2008. Vol. AC-53, No. 10. P. 2324—2334.