УДК 681.5

АНАЛИЗ И УПРАВЛЕНИЕ ПЛОТНОСТНЫМИ СИСТЕМАМИ

И.Б. Фуртат
Институт проблем машиноведения РАН
Россия, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., 61
E-mail: cainenash@mail.ru

Ключевые слова: Устойчивость, управление, адаптивное управление, плотностные системы.

Аннотация: Рассматривается класс систем, названных плотностными, для которых производная от квадратичной функции зависит от некоторой функции, названной функцией плотности. С помощью функции плотности задаются свойства пространства, которые оказывают влияние на поведение исследуемых систем. Показана роль плотностных систем в синтезе законов управления. Рассмотрено построение систем управления для объектов с известными и неизвестными параметрами. Все полученные результаты сопровождаются моделированием, иллюстрирующим теоретические выводы.

1. Введение

В работе рассмотрен класс динамических систем в нормальной форме, правая часть которых зависит от некоторой функции, задающей свойства пространства и влияющей на поведение системы. Данную функцию будем называть функцией плотности. Все соответствующие определения будут рассмотрены в основной части статьи.

Частный класс таких систем рассматривался в работах [1–8]. В [1] впервые для изучения (не)устойчивости системы $\dot{x} = f(x)$ на плоскости рассматривалась новая система $\dot{x} = \rho(x)f(x)$ со вспомогательной функцией $\rho(x) > 0$ для всех x. Затем вопрос (не)устойчивости таких систем изучался с использованием свойств дивергенции и потока вектора фазовой скорости в [2–8]. В [4] функция $\rho(x)$ названа функцией плотности (от англ. «density function»), а в [5–8] показана связь полученных результатов с уравнением непрерывности [9], которое встречается в электромагнетизме, теории волн, гидродинамике, механике деформируемого твердого тела и квантовой механике.

В [10–14] предложен ряд методов управления, гарантирующих нахождения регулируемых сигналов в заданных разработчиком множествах. Для выполнения данной цели с помощью соответствующего закона управления вводилась вспомогательная функция от вида которой выполнялись соответствующие свойства в замкнутой системе. Так в [10, 12] предложен закон управления с эффектом воронки (от англ. «funnel control»), а в [11] закон управления с заданным качеством регулирования (от анг. «prescribed performance control»), которые гарантируют нахождение переходных процессов в сходящейся к окрестности нуля трубке. В [13, 14] предложен метод, обобщающий результаты [10–12] и позволяющий гарантировать нахождение выходных переменных в заданной разработчиком трубке, которая может быть несимметрична относительно положения равновесия и не сходится к заданной константе.

В данной работе будет рассмотрен класс систем, которые явно или неявно зависят от функции плотности. С помощью данной функции будет задаваться плотность пространства в смысле выделения областей (не)устойчивости, запретных областей (где отсутствуют решения системы) и величины значения функции плотности, влияющей на поведение исследуемой системы. Дополнительные примеры по данной теме с подробным разбором, описанием выводов и доказательств см. в полной версии работы в [15].

2. Плотностные системы. Определения

Рассмотрим динамическую систему вида

$$\dot{x} = f(x,t), \tag{1}$$

где $t \geqslant 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, функция $f : D \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная по t и локально липшицевая по x на $D \times [0,+\infty)$. Относительно возможности рассмотрения систем (1) с разрывной правой частью см. замечание **??**.

Определение 1. *Система* (1) *называется плотностной с функцией плотности* $\rho(x,t) : D \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, *если существует непрерывно-дифференцируемая функция* $V(x,t) : D \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *такая, что*

(а) $w_1(x) \leqslant V(x,t) \leqslant w_2(x)$,

(б) $\dot{V} \leqslant \rho(x,t)W_1(x) \leqslant 0$ *или* $\dot{V} \geqslant \rho(x,t)W_2(x) \geqslant 0$

для любых $t \geqslant 0$ *и* $x \in D$. *Здесь* $\rho(x,t)$ *– непрерывная по* t *и локально-липшицевая по* x *функция,* $w_1(x)$ *и* $w_2(x)$ *– положительно определенные функции,* $W_1(x)$ *и* $W_2(x)$ *– ненулевые (за исключением в положениях равновесия) локально лишицевые функции в* D.

Определение 2. *Если в определении 1 функции* $W_1(x)$ *и* $W_2(x)$ *локально лишицевые в* D, *то система* (1) *называется слабо плотностной.*

Определение 3. *Если в условии (б) определения 1 выполнено* $\dot{V} \leqslant \rho(x,t)W_1(x) < 0$ *или* $\dot{V} \geqslant \rho(x,t)W_2(x) > 0$, *то систему* (1) *будем называть строго плотностной.*

Определение 4. *Если* $\dot{V} \leqslant \rho(x,t)W_1(x) \leqslant 0$ *в области* $D_S \times [0,+\infty)$, *то функцию плотности* $\rho(x,t)$ *и область* D_S *будем называть устойчивыми. Если* $\dot{V} \geqslant \rho(x,t)W_2(x) > 0$ *в области* $D_U \times [0,+\infty)$, *то функцию плотности* $\rho(x,t)$ *и область* D_U *будем называть неустойчивыми.*

3. Плотностное управление

Рассмотрим объект управления

$$Q(p)y(t) = kR(p)u(t), \tag{2}$$

где $y \in \mathbb{R}$ – выходной сигнал, $u \in \mathbb{R}$ – сигнал управления, $Q(p)$ и $R(p)$ – линейные дифференциальные операторы с постоянными не известными коэффициентами, $R(\lambda)$ – гурвицевый полином, k – известный коэффициент. Пусть относительная степень объекта равна 1. Все полученные результаты могут быть распространены на объекты с относительной степенью больше 1, например, с использованием схем [16]. В настоящей статье рассмотрим только объекты с относительной степенью 1 дабы избежать громоздких выводов по преодолению проблемы высокой относительной степени.

Перепишем операторы $Q(p)$ и $R(p)$ как $Q(p) = Q_m(p) + \Delta Q(p)$ и $R(p) = R_m(p) + \Delta R(p)$, где $Q_m(\lambda)$ и $R_m(\lambda)$ – произвольные гурвицевы многочлены порядков n и $n-1$ соответственно, порядки $\Delta Q(p)$ и $\Delta R(p)$ соответственно равны $n-1$ и $n-2$. Выбрав $Q_m(\lambda)/R_m(\lambda) = \lambda + a$, $a > 0$ – известное число и выделив целую часть в $\frac{\Delta Q(\lambda)}{Q_m(\lambda)} = k_{0y} + \frac{\Delta \tilde{Q}(\lambda)}{R_m(\lambda)}$, перепишем (2) в виде

$$\dot{y}(t) = -ay(t) + k\left(u(t) + \tfrac{\Delta R(p)}{R_m(p)}u - \tfrac{\Delta \tilde{Q}(p)}{R_m(p)}y - k_{0y}y\right). \tag{3}$$

Введем $c_0 = col\{c_{0y}, c_{0u}, k_{0y}\}$ – вектор неизвестных параметров, где $\Delta \tilde{Q}(p) = c_{0y}^{\mathrm{T}}[1\ p\ ...\ p^{n-2}]$ и $\Delta R(p) = c_{0u}^{\mathrm{T}}[1\ p\ ...\ p^{n-2}]$. Также рассмотрим вектор регрессии $w = col\{V_y, V_u, y\}$, составленный с помощью следующих фильтров

$$\dot{V}_y = FV_y + by, \quad \dot{V}_u = FV_u + bu. \tag{4}$$

Здесь F – матрица в форме Фробениуса с характеристическим многочленом $R_m(\lambda)$, $b = col\{0, ..., 0, 1\}$.

Тогда, с учетом введеных обозначений, уравнение (3) можно переписать в виде

$$\dot{y}(t) = -ay(t) + k[u(t) - c_0^{\mathrm{T}} w(t)]. \tag{5}$$

Зададим закон управления

$$u(t) = c^{\mathrm{T}}(t)w(t) + \tfrac{a}{k}y(t) + \rho(y, t). \tag{6}$$

Подставив (6) в (5), получим уравнение замкнутой системы

$$\dot{y}(t) = \rho(y, t) + k(c(t) - c_0)^{\mathrm{T}} w(t). \tag{7}$$

Теорема 1. *Закон управления* (6) *вместе с алгоритмом адаптации*

$$\dot{c} = -\alpha y w \tag{8}$$

приводит объект (2) *к системе плотностного вида. Если при* $t \to \infty$ *имеем устойчивую плотность* $\rho(y, t)$ *с предельным устойчивым множеством в окрестности нуля, то все сигналы в замкнутой системе будут ограниченными.*

Пример 5. Рассмотрим объект управления (2) с неизвестными параметрами операторов $Q(p) = (p-1)^3$ и $R(p) = (p+1)^2$, известным $k = 1$ и неизвестными начальными условиями $p^2 y(0) = 1$, $py(0) = 1$, $y(0) = 4$.

Определим $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ в фильтрах (4). В алгоритме адаптации (8) зададим $\alpha = 0.1$. В законе управления (6) выберем $a = 1$.

Рассмотрим различные виды функции плотности $\rho(y,t)$ в (6).

1) При $\rho(y,t) = -\alpha y$ замкнутая система (7) имеет точку равновесия $y = 0$. Имеем $\dot{V} = -\alpha y^2 \leqslant 0$ в области $D_S = \mathbb{R}$. Получили задачу адаптивной стабилизации, которая подробна описана в [16]. На рис. 1 (см. только траекторию, входящую в серую область) приведен переходной процесс при $\alpha = 1$ и $p^2 y(0) = py(0) = 0$, $y(0) = 4$.

2) При $\rho(y,t) = \alpha \ln \frac{g-y}{g+y}$, $g(t) > 0$ замкнутая система (7) имеет положение равновесия $y = 0$. Имеем $\dot{V} = \alpha \ln \frac{g-y}{g+y} y < 0$ в области $D_S = \{y \in \mathbb{R} : -g < y < g\}$. Причем $\rho(y,t) \to -\infty$ при $y \to g$ и $\rho(y,t) \to +\infty$ при $y \to -g$. Получили задачу стабилизации с симметричными ограничениями $-g$ и g. На рис. 1 приведены результаты переходных процессов при $\alpha = 1$ (траектория внутри пунктирной трубки), $p^2 y(0) = py(0) = 0$, $y(0) = 4$ и $g(t) = \begin{cases} -4.6t + 5 & t \leqslant 1, \\ 0.4 & t > 1. \end{cases}$ Видно, что в отличие от классической схемы адаптивного управления [16] (траектория, соответствующая $\rho(y,t) = -\alpha y$), задание функции плотности вида $\rho(y,t) = \alpha \ln \frac{g-y}{g+y}$ гарантирует нахождение переходного процесса в трубке в любой момент времени.

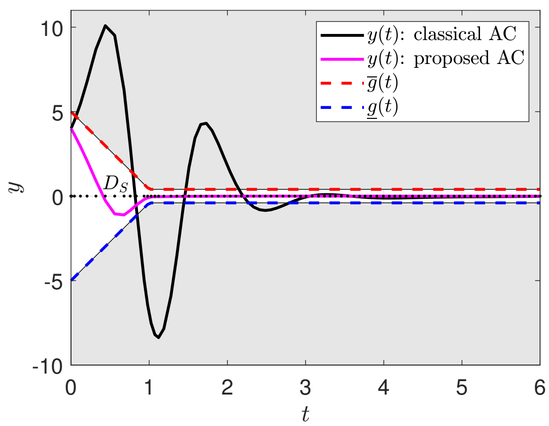

Рис. 1. Переходные процессы в адаптивной системе управления с функциями плотности $\rho(y,t) = -\alpha y$ [16] (кривая, пересекающая серую область) и $\rho(y,t) = \alpha \ln \frac{g-y}{g+y}$ (кривая, находящиеся внутри трубки с штриховыми границами)

4. Заключение

В работе рассмотрен класс динамических систем, названных плотностными, которые содержат в правой части функцию плотности, задающей свойства пространства. Определяя свойства данной функции можно влиять на поведение исследуемой системы. Данный вывод в дальнейшем используется для синтеза законов управления. Показано, что при различных заданиях функции плотности можно получать как классические законы управления, так и новые, позволяющие формировать новые целевые требования к системе. В частности, приведен пример построения адаптивного закона управления с гарантией переходных процессов в заданной разработчиком множестве, в то время как классические адаптивное управление обеспечивает только предельную ограниченность траекторий. При этом параметры множества задаются с помощью функции плотности, которая задает плотность рассматриваемого пространства. Результаты моделирования подтвердили теоретические выводы.

В статье, в качестве примера применения функции плотности с известными схемами управления показано, как существующие алгоритмы управления могут быть модифицированы для получения нового качества переходных процессов. В дальнейшем свойства плотностных систем можно применять и для более сложных алгоритмов управления таких, как управление по выходу с любой относительной степенью объекта, управление с использованием наблюдателей, управление на скользящих режимах и т.д. Исследование выполнено в ИПМаш РАН при поддержке госзадания № 121112500298-6 (ЕГИСУ НИОКТР).

Список литературы

1. Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.И., Забрейко П.П. Векторные поля на плоскости. М: Физматлит, 1963.
2. Жуков В.П. Необходимые и достаточные условия неустойчивости нелинейных автономных динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1990. № 12. С. 59–65.
3. Жуков В.П. Дивергентные условия асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем второго порядка // Автоматика и телемеханика. 1999. № 7. С. 34-43.
4. Rantzer A. A dual to Lyapunov's stability theorem // Systems & Control Letters. 2001. V. 42. P. 161–168.
5. Furtat I.B. Divergent stability conditions of dynamic systems // Automation and Remote Control. 2020. Vol. 81, No. 2. P. 247-257.
6. Furtat I.B., Gushchin P.A. Stability study and control of nonautonomous dynamical systems based on divergence conditions // Journal of the Franklin Institute. 2020. Vol. 357, No. 18. P. 13753-13765.
7. Furtat I.B., Gushchin P.A. Stability/instability study and control of autonomous dynamical systems: Divergence method // IEEE Access. 2021. No. 9. P. 49088-49094.
8. Furtat I.B., Gushchin P.A. Divergence Method for Exponential Stability Study of Autonomous Dynamical Systems // IEEE Access. 2022. No. 10. P. 49088-49094.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика / Теоретическая физика. М.: Наука, 1986.
10. Liberzon D, Trenn S. The bang-bang funnel controller for uncertain nonlinear systems with arbitrary relative degree // IEEE Transaction on Automatic Control. 2013. Vol. AC-58, No. 12. P. 3126-3141.
11. Bechlioulis C, Rovithakis G. A low-complexity global approximation-free control scheme with prescribed performance for unknown pure feedback systems // Automatica. 2014. Vol. 50, No. 4. P. 1217-1226.
12. Berger T, Le H, Reis T. Funnel control for nonlinear systems with known strict relative degree // Automatica. 2018. Vol. 87. P. 345-357.
13. Furtat I.B., Gushchin P.A. Control of Dynamical Plants with a Guarantee for the Controlled Signal to Stay in a Given Set // Automation and Remote Control. 2021. Vol.82, No. 4. P. 654-669.
14. Furtat I.B., Gushchin P.A. Nonlinear feedback control providing plant output in given set // International Journal of Control. 2021.
15. Фуртат И.Б. Плотностные системы. Анализ и управление // Автоматика и телемеханика. 2023. № 11. С. 55–76.
16. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.