

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕРАВЕНСТВА РАО-КРАМЕРА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ ПОДВОДНОГО АППАРАТА

**В.Г. Караулов**

*АО «Концерн «ЦНИИ «Электронприбор»*, Университет ИТМО  
Россия, 197046, Санкт-Петербург, Малая Посадская ул., 30  
E-mail: vladkar0707@gmail.com

**А.М. Грузликов**

*АО «Концерн «ЦНИИ «Электронприбор»*  
Россия, 197046, Санкт-Петербург, Малая Посадская ул., 30  
E-mail: agruzlikov@yandex.ru

**Ключевые слова:** автономный необитаемый подводный аппарат, задача приведения, нижняя граница точности, неравенство Рао-Крамера, донная станция.

**Аннотация:** Рассматривается задача относительной навигации автономного необитаемого подводного аппарата. В рамках байесовского подхода приводится постановка соответствующей рекуррентной задачи фильтрации и приводятся соотношения, позволяющие с использованием неравенства Рао-Крамера определять нижнюю границу точности оценивания компонент вектора состояния. Приводятся предварительные результаты имитационного моделирования, позволяющие сопоставить ожидаемые точности при решении задачи по одномоментным измерениям и в режиме фильтрации. Отмечается, что действительная СКО оценки координат и углов ориентации по одномоментным измерениям, полученная с использованием разработанного ранее алгоритма, в ряде случаев достигает своей нижней границы.

## 1. Введение

Задача относительной навигации АНПА в интересах решения задачи приведения к донной станции в настоящее время является одной из перспективных задач. Известны три метода приведения: оптический, электромагнитный и акустический.

Приведение с использованием оптического метода основывается на применении систем технического зрения – на АНПА устанавливаются видеокамеры, а на донной станции специальные маркеры-ориентиры [1, 2]. Такой подход является хорошо изученным, известны работы по визуальному позиционированию с использованием искусственных нейронных сетей [3] и т.д. Однако для решения задачи стыковки с использованием технического зрения требуются значительные вычислительные ресурсы на борту аппарата, кроме того, необходимо устранять помехи, связанные с замутнением воды на дне водоема, а также возможной деградацией аппаратуры объектива видеокамеры при длительной эксплуатации в морской среде.

Приведение на основе электромагнитного метода основывается на генерации электромагнитного поля на донной станции и его определению сенсорами АНПА [4]. Однако у такого подхода имеются ограниченная на дальность действия, 25-30 м.

В настоящей работе рассматривается свободный от указанных недостатков акустический метод относительной навигации с использованием высокочастотной гидроакустической системы ближнего радиуса действия [5-7].

Целью предлагаемого доклада является формулировка задачи рекуррентной фильтрации и описание методики оценки точности оценивания координат и углов ориентации АНПА с помощью неравенства Рао-Крамера при реализации акустического метода. Работа является продолжением исследования, представленных в [8, 9].

## 2. Постановка рекуррентной задачи фильтрации

Предполагается, что на борту АНПА имеется группа из  $n=10$  гидрофонов, работающих в единой шкале времени и расположенных в носовой и кормовой частях. Также на донной станции размещается  $m=4$  гидроакустических маяков, размещенных по краям базы. Маяки излучают тональный сигнал в соответствии с известной циклограммой излучения. По принятым сигналам требуется определить относительные координаты и ориентацию АНПА. При этом необходимо учитывать, что шкала времени на АНПА и донной станции не совпадает.

Рассматриваемую задачу можно сформулировать в рамках байесовского подхода как рекуррентную задачу фильтрации [7, 10, 11]. Для этого введем восьмимерный вектор состояния  $X_k = [x_{0,k} \ y_{0,k} \ z_{0,k} \ K_k \ \psi_k \ \theta_k \ \delta_k \ \Delta c_k]^T$ , в котором  $k$  – индекс дискретного момента времени;  $(x_{0,k} \ y_{0,k} \ z_{0,k})$  – координаты центра АНПА относительно донной станции (контрольная точка АНПА);  $(K_k \ \psi_k \ \theta_k)$  – углы курса, крена, дифферента АНПА относительно донной станции;  $\delta_k$  – погрешность измерения псевдодальности из-за расхождения шкал времени;  $\Delta c_k$  – ошибка знания скорости распространения звука в воде.

Задача формулируется следующим образом: оценить вектор состояния  $X_k$ , задаваемый линейным уравнением

$$(1) \quad X_k = \Phi X_{k-1} + \Gamma w_k + B u_k,$$

по  $M$ -мерным нелинейным измерениям псевдодальностей между маяками и гидрофонами

$$(2) \quad y_k = h(X_k) + v_k.$$

В соотношении (1)  $\Phi = E_{8 \times 8}$  – матрица динамики;  $\Gamma = E_{8 \times 8}$  – матрица порождающих шумов;  $B = \text{diag}[\Delta t \ \Delta t \ \Delta t \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$  – матрица при входных воздействиях;  $u_k = [u_{k-1,x} \ u_{k-1,y} \ u_{k-1,z} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  – вектор входных сигналов;  $\Delta t$  – время между  $k$  и  $k-1$  моментом времени;  $(u_{k-1,x} \ u_{k-1,y} \ u_{k-1,z})$  – скорость АНПА по каждой из координат, которая пересчитывается и выдается из навигационного комплекса;  $w_k$  – восьмимерный центрированный белый гауссовский шум, не зависящий от  $X_k$ , с известной матрицей ковариации  $Q$ .

В соотношении (2)  $y_k = \hat{c}_{0,k} T_k$ ;  $T_k$  – вектор измеренных времен обнаружения сигнала на гидрофоне;  $i = \overline{1, m}$  – номер маяка;  $j = \overline{1, n}$  – номер гидрофона;  $h(X_k)$  – нелинейная функция  $M$ -мерных измерений;  $d_{j,k}^i$  – истинные значения дальностей;  $v_k$  –  $M$ -мерный центрированный белый гауссовский шум, не зависящий от  $w_k$  и  $X_k$ , с известной матрицей ковариации  $R$ ;  $M = m \times n$  – количество измерений в момент времени  $k$ ;  $\hat{c}_{0,k}$  – априорная оценка скорости звука в воде,  $x^i, y^i, z^i, i = \overline{1, m}$  – известные координаты маяков в прямоугольной системе координат (СК) связанной с донной станцией;  $x_j, y_j, z_j, j = \overline{1, n}$  – известные координаты гидрофонов в прямоугольной СК, связанной с АНПА;  $\tilde{x}_j, \tilde{y}_j, \tilde{z}_j, j = \overline{1, n}$  – координаты гидрофонов после перехода из СК, связанной с

АНПА, в СК, связанную с донной станцией;  $A(K, \psi, \theta)$  – матрица перехода [10] от осей  $x, y, z$  к осям  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ ;

$$h(X_k) = [D_{1,k}(X_k) \ D_{2,k}(X_k) \ D_{3,k}(X_k) \ D_{4,k}(X_k)]^T;$$

$$D_{m,k}(X_k) = [d_{1,k}^m(X_k) \ d_{2,k}^m(X_k) \ \dots \ d_{10,k}^m(X_k)]^T;$$

$$T_k = [T_{1,k} \ T_{2,k} \ T_{3,k} \ T_{4,k}]^T; \ T_{m,k} = [t_{1,k}^m \ t_{2,k}^m \ \dots \ t_{10,k}^m]^T;$$

$$d_{j,k}^i(X_k) = \sqrt{(x_{0,k} + \tilde{x}_{j,k} - x^i)^2 + (y_{0,k} + \tilde{y}_{j,k} - y^i)^2 + (z_{0,k} + \tilde{z}_{j,k} - z^i)^2 + (\hat{c}_{0,k} + \Delta c_k)\delta_k + \Delta c_k t_{j,k}^i};$$

$$[\tilde{x}_{j,k} \ \tilde{y}_{j,k} \ \tilde{z}_{j,k}]^T = A(K_k, \psi_k, \theta_k)[x_j \ y_j \ z_j]^T.$$

### 3. Нахождение нижней границы Рао-Крамера

В целях оценки ожидаемой точности решения рассматриваемой задачи воспользуемся неравенством Рао-Крамера [11, 12]. Получим для начала выражение для нижней границы точности с помощью неравенства Рао-Крамера, полагая справедливыми следующие предположения. Будем считать, что требуется оценить вектор  $X$ , имеющий те же компоненты, что и вектор  $X_k$ , но при этом считаем, что  $X$  представляет собой детерминированный неизвестный вектор. Требуется его оценить, используя разовое измерение  $y = h(X) + v$ . При этом считаем, что статистические свойства ошибок измерений известны. В этом случае можно воспользоваться неравенством Рао-Крамера, которое для несмещенных оценок имеет следующий вид [11, 12]:

$$(3) \quad P(X) = M_{y/X} \left\{ (X - \hat{X}(y))(X - \hat{X}(y))^T \right\} \geq I(X)^{-1},$$

где  $I(X) = M_{y/X} \left\{ \frac{\partial \ln f(y/X)}{\partial X} \left( \frac{\partial \ln f(y/X)}{\partial X} \right)^T \right\}$  информационная матрица Фишера;  $M$  - знак математического ожидания. Считая, что ошибки измерения распределены по гауссовскому закону, можем записать условную функцию плотности распределения вероятности (ф.п.р.в.)  $f(y/X) \propto \exp((y - h(X))^T R^{-1} (y - h(X)))$ .

Тогда, подставляя выражение для условной ф.п.р.в. в выражение для матрицы Фишера, получаем:

$$(4) \quad I(X) = \left[ \frac{\partial h(X)}{\partial X} \right]^T R^{-1} \left[ \frac{\partial h(X)}{\partial X} \right],$$

где  $\frac{\partial h(X)}{\partial X} = \left[ \frac{\partial D_1(X)}{\partial X} \ \frac{\partial D_2(X)}{\partial X} \ \frac{\partial D_3(X)}{\partial X} \ \frac{\partial D_4(X)}{\partial X} \right]^T$ .

Теперь, введя предположение о случайном характере вектора  $X$ , для матрицы  $I^B$  можно получить следующее соотношение:

$$I^B = P_0^{-1} + \int \left[ \frac{\partial h(X)}{\partial X} \right]^T R^{-1} \left[ \frac{\partial h(X)}{\partial X} \right] f(X) dX.$$

С использованием результатов работ [11-12], можно показать, что при решении задачи фильтрации, для матрица  $I_k^B$  будет справедливо следующее рекуррентное соотношение:

$$(5) \quad I_k^B = (\Gamma^T Q \Gamma)^{-1} + \Delta H_k - (\Gamma^T Q \Gamma)^{-1} \Phi \left[ I_{k-1}^B + (\Phi)^T (\Gamma^T Q \Gamma)^{-1} (\Phi) \right]^{-1} \times \Phi^T (\Gamma^T Q \Gamma)^{-1},$$

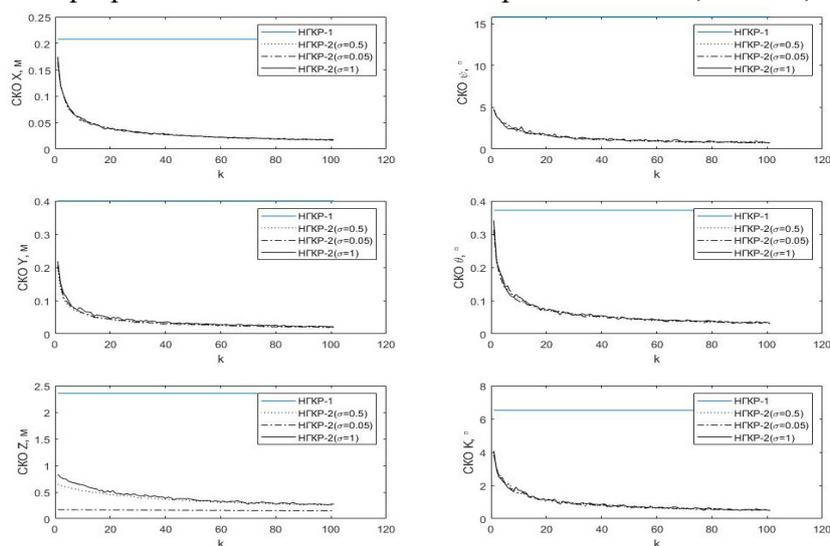
где  $\Delta H_k = M_{X_k} \left( \left[ \frac{\partial h(X_k)}{\partial X_k} \right]^T R^{-1} \left[ \frac{\partial h(X_k)}{\partial X_k} \right] \right) = M_{X_k} (I(X_k))$ .

Чтобы найти матрицу, характеризующую нижнюю границу точности для оценивания вектора  $X_k$ , по измерениям  $y_k$ , нужно обратить матрицу  $I_k^B$ , полученную из выражения (5).

## 4. Результаты вычисления нижней границы Рао-Крамера

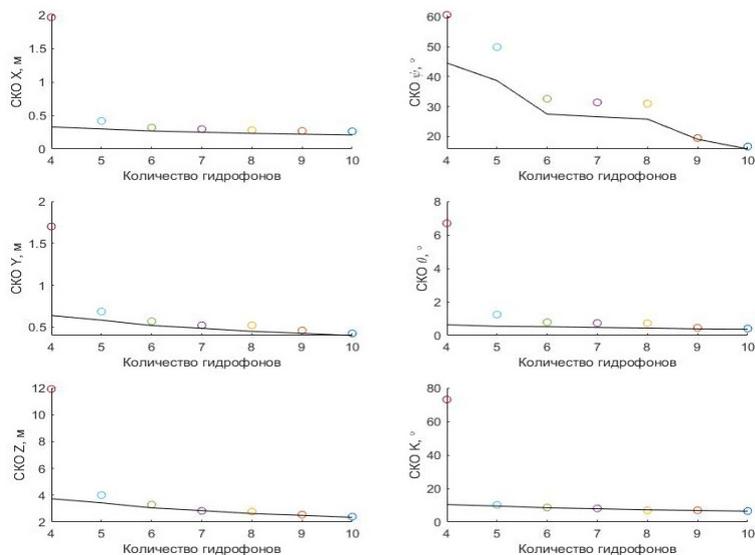
Приведем результаты вычисления нижней границы, полученные путем моделирования рассматриваемой задачи. Были заданы следующие параметры для моделирования: АНПА движется вертикально вниз со скоростью 0.57 м/с (скорости по координатам  $x$  и  $y$  равны 0) из начальной точки с координатами (0, 0, 40) м.; углы крена и дифферента не изменяются и равны нулю; курсовой угол не изменяется и равен 0 градусов; СКО погрешности измерения псевдодальности равно 12 см; СКО ошибки знания начального значения  $X$  для координат – 2 м, для углов – 5 градусов, для погрешности измерения псевдодальностей – 15 см, для ошибки знания скорости звука – 1 м/с; СКО порождающих шумов для координат – 10 см, для углов – 5 градусов, для погрешности измерения псевдодальностей – 1 см, для ошибки знания скорости звука – 0.1 м/с. Время  $\Delta t$  между измерениями – 0.5 с. Всего 100 измерений.

По результатам имитационного моделирования были найдены значения нижней границы для ошибки оценки координат и углов ориентации АНПА для варианта оценивания по одномоментному измерению и для варианта фильтрации. На рис. 1 приведены зависимости СКО оценки координат и углов ориентации, соответствующие нижней границе Рао-Крамера, от количества измерений. Также приведены значения нижней границы при различных СКО ошибки скорости 0.05 м/с, 0.5 м/с, 1 м/с.



**Рис. 1.** Зависимость СКО оценки координат и углов ориентации АНПА, соответствующие нижней границе Рао-Крамера, от количества измерений (HGKP-1 – граница по разовому измерению, HGKP-2 – граница в режиме фильтрации для СКО ошибки скорости 0.05 м/с, 0.5 м/с, 1 м/с).

Стоит отметить, что действительная СКО оценки координат и углов ориентации, полученные в результате решения задачи по одномоментным измерениям с помощью разработанного ранее алгоритма [6, 8-9], в ряде случаев достигает своей нижней границы (рис. 2).



**Рис. 2.** Зависимость СКО координат и СКО оценки углов ориентации от количества гидрофонов при 4 маяках (черная линия – НГКР-1, точки – оценки в результате работы алгоритма).

## 5. Заключение

В работе рассмотрена задача относительной навигации АНПА, приведена постановка рекуррентной задачи фильтрации в рамках байесовского подхода и получены соотношения, позволяющие с использованием неравенства Рао-Крамера определять нижнюю границу точности оценивания компонент вектора состояния.

Приведены предварительные результаты имитационного моделирования, позволяющие сопоставить ожидаемые точности при решении задачи по одномоментным измерениям и в режиме фильтрации.

Целью дальнейшей работы является более подробный анализ точности, разработка алгоритма нерекуррентной фильтрации и сравнение получаемых результатов с нижней границей по Рао-Крамера, а также выявление возможных путей сокращения объема вычислений при реализации алгоритма.

## Благодарность

Авторы выражают благодарность руководителю научно-образовательного центра АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», чл.-корр. РАН Олегу Андреевичу Степанову за помощь при проведении исследования и подготовке настоящей работы.

Работы проводились при поддержке гранта РФФИ №23-19-00626, <https://rscf.ru/project/23-19-00626/>.

## Список литературы

1. Popescu D., Ichim L. Image Recognition in UAV Application Based on Texture Analysis // International Conference on Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems. 2015. P. 693-704.
2. Pinheiro P.M., Neto A.A., Grando R.B., et al. Trajectory Planning for Hybrid Unmanned Aerial Underwater Vehicles with Smooth Media Transition // Journal Intel Robot Syst. 2022. Vol. 104, No. 46.
3. Степанов Д.Н. Методы и алгоритмы определения положения и ориентации беспилотного летательного аппарата с применением бортовых видеокамер // Программные продукты и системы. 2014. № 1. С. 150-157.

4. Peng S, Liu J, Wu J, Li C, Liu B, Cai W, Yu H. A Low-cost Electromagnetic Docking Guidance System for Micro Autonomous Underwater Vehicles // *Sensors*. 2019. Vol. 19. P. 1-21.
5. Кебкал К.Г., Машошин А.И. Гидроакустические методы позиционирования автономных необитаемых подводных аппаратов // *Гироскопия и навигация*. 2016. № 3. С. 115-130.
6. Грузликов А.М. Навигация АНПА в ближнем поле в интересах решения задачи приведения к причальному устройству // *Сборник материалов XXIX Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам*, 2022. С. 138-140.
7. Кошаев Д.А. Относительное позиционирование и определение ориентации автономного необитаемого подводного аппарата по данным от гидроакустических маяков // *Гироскопия и навигация*. 2022. Т. 30, № 4. С. 122-141.
8. Грузликов А.М., Караулов В.Г., Мухин Д.А., Шалаев Н.А. Результаты апробации алгоритма позиционирования и определения ориентации подводного аппарата по данным от гидроакустических маяков // *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2023. № 1. С. 265-275.
9. Караулов В.Г., Грузликов А.М., Золотаревич В.П. Рекуррентный алгоритм позиционирования и определения ориентации АНПА // *Сборник материалов XXX Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам*, 2023. С. 54-57
10. Емельянцева Г.И., Степанов А.П. Интегрированные инерциально-спутниковые системы ориентации и навигации. СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ Электроприбор», 2016.
11. Степанов О.А. Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации СПб: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 1998. 370 с.
12. Кошаев Д.А., Степанов О.А. Применение неравенства Рао-Крамера в задачах нелинейного оценивания // *Теория и системы управления Известия Академии наук СССР. Серия химическая*. 1997. № 2. С. 65.