УДК 519.71

СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ НА СОСТОЯНИЯ

А.Е. Голубев

Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН

Россия, 119526, Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1

E-mail: v-algolu@hotmail.com

Ключевые слова: нелинейные динамические системы, стабилизация, бэкстеппинг, ограничения на состояния, барьерные функции Ляпунова.

Аннотация: Рассматривается задача стабилизации нулевого значения вектора состояния нелинейных динамических систем специального вида с учетом ограничений на абсолютные величины переменных состояния. Стабилизирующее управление строится на основе метода бэкстеппинга с использованием логарифмических барьерных функций Ляпунова. Полученные стабилизирующие обратные связи в отличие от аналогичных известных результатов не приводят к неограниченному росту переменных управления при приближении переменных состояния к граничным значениям.

1. Введение

Популярной темой исследований последних лет в области нелинейных систем управления является построение законов управления с учетом различных ограничений на переменные состояния и управления системы. Одним из эффективных подходов к синтезу стабилизирующих обратных связей с учетом ограничений на состояние обьекта управления является метод бэкстеппинга [1] в сочетании с использованием барьерных функций Ляпунова [2, 3]. Отметим, что рассматриваемые в большинстве работ обратные связи на основе метода бэкстеппинга приводят к значениям управляющих переменных, неограниченно возрастающих при приближении выходных переменных или переменных состояния к граничным значениям, что нежелательно.

В настоящей работе решается задача стабилизации нулевого значения вектора состояния нелинейной динамической системы, которая может быть представлена как совокупность подсистем

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_{1i} = x_{2i},\\
&\qquad\vdots\\
&\dot{x}_{r_i-1,i} = x_{r_i i},\\
&\dot{x}_{r_i i} = f_i(x) + g_i(x)u_i,\ i \in \overline{1,l},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $x_i = (x_{1i}, \ldots, x_{r_i i})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{r_i}$, $x = (x_1^{\mathrm{T}}, \ldots, x_l^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $u = (u_1, \ldots, u_l)^{\mathrm{T}}$ – вектор управляющих воздействий, функции $f_i(x)$ и $g_i(x)$ локально липшицевы, $g_i(x) \neq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Компоненты вектора управляющих воздействий u в системе (1) выбираются в виде обратных связей по состоянию системы таким образом, что для произвольных значений $x(0)$ гарантировано выполнение условий $|x(t)| \to 0$ при $t \to +\infty$ с учетом ограничений

(2) $$|x_{ji}(t)| < M_{ji},\ j \in \overline{1, r_i},\ i \in \overline{1, l},\ t \geqslant 0,$$

где M_{ji} – некоторые заданные положительные константы, удовлетворяющие соответственно условиям $M_{ji} \geqslant |x_{ji}(0)|$. Показано, что полученные стабилизирующие обратные связи имеют конечный предел при стремлении переменных состояния к граничным значениям.

2. Синтез стабилизирующей обратной связи

Рассмотрим сначала одну из подсистем системы (1) при произвольном фиксированном значении i, $1 \leqslant i \leqslant l$. При построении стабилизирующего управления u_i, определим барьерные функции

$$V_{ki}(z_{1i}, \ldots, z_{ki}) = V_{k-1,i}(z_{1i}, \ldots, z_{k-1,i}) + k_{ki} \ln\left(\frac{N_{ki}^2}{N_{ki}^2 - z_{ki}^2}\right),\ k \in \overline{1, r_i},$$

где $k_{ki} > 0$ и $N_{ki} > 0$ – положительные постоянные, $z_{1i} = x_{1i}$, $z_{ki} = x_{ki} - \alpha_{k-1,i}(x_{1i}, \ldots, x_{k-1,i})$ при $k \geqslant 2$,

$$\alpha_{1i}(x_{1i}) = -c_{1i} z_{1i},$$

$$\alpha_{k-1,i}(x_{1i}, \ldots, x_{k-1,i}) = \sum_{j=1}^{k-2} \frac{\partial \alpha_{k-2,i}}{\partial x_{ji}} x_{j+1,i} - c_{k-1,i} z_{k-1,i} - N_{k-1,i}^2 z_{k-1,i},\ k > 2.$$

Здесь $c_{k-1,i} > 0$ – положительные коэффициенты усиления.

На решениях динамической системы (1) функции $V_{ki}(z_{1i}, \ldots, z_{ki})$ определены при всех $t \geqslant 0$ таких, что справедливы неравенства

$$|z_{ki}(t)| < N_{ki},\ k \in \overline{1, r_i}.$$

При этом для справедливости неравенств (2) достаточно выполнения соотношений

(3) $$N_{1i} = M_{1i},\ N_{2i} \leqslant M_{2i} - c_{1i} M_{1i},$$

(4) $$N_{ki} \leqslant M_{ki} - \sum_{j=1}^{k-2} \frac{\partial \alpha_{k-2,i}}{\partial x_{ji}} M_{j+1,i} - c_{k-1,i} N_{k-1,i} - N_{k-1,i}^3,\ k \in \overline{3, r_i}.$$

Выбрав стабилизирующее управление

(5) $$u_i = \frac{1}{g_i(x)}\Big(-f_i(x) + \sum_{j=1}^{r_i - 1} \frac{\partial \alpha_{r_i - 1,i}}{\partial x_{ji}} x_{j+1,i} - c_{r_i i} z_{r_i i} - N_{r_i i}^2 z_{r_i i}\Big),$$

где $c_{r_i i} > 0$ – положительный коэффициент усиления, получим

$$\dot{V}_{r_i}(z_{1i}, \ldots, z_{r_i i}) \leqslant -\sum_{j=1}^{r_i - 1} S_{ji} - \sum_{j=1}^{r_i} \frac{k_{ji} c_{ji} z_{ji}^2}{2(N_{ji}^2 - z_{ji}^2)},$$

где

$$S_{ji} = z_{ji}^2 \left(k_{ji} - \frac{k_{j-1,i}}{2c_{j-1,i}(N_{j-1,i}^2 - z_{j-1,i}^2)} \right).$$

В качестве функции Ляпунова для системы (1), замкнутой обратной связью $u = u(x)$, покомпонентно заданной соотношениями (5) при $i \in \overline{1, l}$, рассмотрим барьерную функцию

$$V(x) = \sum_{i=1}^{l} V_{r_i}(z_{1i}, \ldots, z_{r_i i}) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{1}{2} k_{ji} \ln \left(\frac{N_{ji}^2}{N_{ji}^2 - z_{ji}^2} \right).$$

Заметим, что функция $V(x)$ является положительно определенной в области $\{x \in \mathbb{R}^n : |z_{ji}| < N_{ji},\, j \in \overline{1, r_i},\, i \in \overline{1, l}\}$ и неограниченно возрастает $V(x) \to +\infty$ при стремлении $|z_{ji}| \to N_{ji} - 0$ хотя бы для одной пары значений j и i, $1 \leqslant j \leqslant r_i$, $1 \leqslant i \leqslant l$.

Для производной по времени функции $V(x)$ в силу замкнутой системы (1) имеет место оценка

$$\dot{V}(x) \leqslant \sum_{i=1}^{l} \left(-\sum_{j=1}^{r_i - 1} S_{ji} - \sum_{j=1}^{r_i} \frac{k_{ji} c_{ji} z_{ji}^2}{2(N_{ji}^2 - z_{ji}^2)} \right).$$

Следовательно, производная по времени функции $V(x)$ в силу замкнутой системы (1) отрицательно определена в области

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |z_{ji}| < \sqrt{N_{ji}^2 - k_{ji}/(2k_{j+1,i} c_{ji})}, |z_{r_i i}| < N_{r_i i},\, j \in \overline{1, r_i - 1},\, i \in \overline{1, l}\}.$$

Заметим, что для любых коэффициентов усиления $c_{ji} > 0$ в управлениях (5) за счет выбора положительных постоянных k_{ji} и $k_{j+1,i}$ в функции Ляпунова $V(x)$ значения величин $N_{ji}^2 - k_{ji}/(2k_{j+1,i} c_{ji})$ можно сделать положительными и сколь угодно близкими к значениям соответствующих констант N_{ji}^2, $j \in \overline{1, r_i - 1}$, $i \in \overline{1, l}$.

Дополнительно, при любых значениях положительных постоянных M_{ji}, $j \in \overline{1, r_i}$, $i \in \overline{1, l}$, найдутся константы $c_{ji} > 0$ и $N_{ji} > 0$, $j \in \overline{1, r_i}$, $i \in \overline{1, l}$, такие, что выполнены условия (3) и (4). Тогда положение равновесия $x = 0$ замкнутой системы (1) асимптотически устойчиво с областью притяжения

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |x_{ji}| < M_{ji},\, j \in \overline{1, r_i},\, i \in \overline{1, l}\}, \tag{6}$$

являющейся положительно инвариантным множеством. Таким образом, для любого решения $x = x(t)$ замкнутой системы (1) с начальной точкой в множестве (6) справедливы ограничения (2). Дополнительно отметим, что при стремлении $|x_{ji}| \to M_{ji} - 0$ при каких либо j, $1 \leqslant j \leqslant r_i$ и i, $1 \leqslant i \leqslant m$, соответствующие функции (5) не являются неограниченно возрастающими и имеют конечный предел.

Исследование выполнено по теме государственного задания (№ госрегистрации 123021700055-6).

Список литературы

1. Krstić M., Kanellakopoulos I., Kokotović P.V. Nonlinear and Adaptive Control Design. John Wiley and Sons, 1995. 563 p.
2. Ngo K.B., Mahony R., Jiang Z.P. Integrator backstepping using barrier functions for systems with multiple state constraints // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference. Seville, Spain, 2005. P. 8306–8312.
3. Голубев А.Е. Стабилизация программных движений механических систем с учетом ограничений // Известия РАН. Теория и системы управления. 2023. № 4. С. 153–167.