УДК 629.7.05

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФИЛЬТРОВ КАЛМАНА НА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЯХ В НАВИГАЦИИ

М.Ю. Тхоренко

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: tkhorenkom@mail.ru

Ключевые слова: фильтр Калмана на дифференцируемых многообразиях, обобщенный фильтр Калмана, интегрированные навигационные системы, кватернионы.

Аннотация: В настоящей работе рассматривается модификации обобщенного фильтра Калмана, позволяющая получать оценки вектора состояния, принадлежащего какому-либо дифференцируемому многообразию – так называемый фильтр Калмана на многообразии. Описываются особенности применения таких фильтров в навигационных приложениях для оценивания компонент единичного кватерниона ориентации. В заключениие рассматриваются преимущества данного подхода по сравнению с ранее предложенными альтернативами.

1. Введение

Существует несколько способов описания ориентации некоторого объекта в пространстве – с использованием углов Эйлера, матриц направляющих косинусов, кватернионов [1]; последний способ, благодаря своей компактности и относительной простоте программной реализации, получил сравнительно широкое распространение при проектировании бесплатформенных инерциальных навигационных систем. Как известно, данные системы, наряду с большим количеством преимуществ, обладают и серьезным недостатком: ошибка определения навигационных параметров накапливается со временем и может достигать весьма больших величин. Поэтому естественным является желание оценить ошибки инерциальной системы с привлечением информации другой, неинерциальной, природы и использованием фильтра Калмана [2]; навигационные системы, построенные на таком принципе, называются интегрированными [3], [4].

Однако прямое оценивание ориентации, определяемой единичным кватернионом, с использованием алгоритма обобщенного фильтра Калмана (ОФК, Extended Kalman filter (EKF) в иностранной литературе), традиционно применяемого для оценивания в нелинейных системах, невозможно. Это ясно хотя бы из того, что на этапе коррекции в ОФК к полученной ранее оценке вектора состояния прибавляется некоторый корректирующий член, в результате условие единичности нормы кватерниона ориентации, вообще говоря, нарушается. Иными словами, алгоритм ОФК никак не учитывает дополнительное нелинейное условие, наложенное на компоненты кватерниона.

По видимому, первой печатной работой, дающей решение этой проблемы и находящейся в открытом доступе, можно назвать статью [5] (см. также обзор [6]). Авторы рассматриваемой работы предлагают описывать ошибку определения ориентации вектором малого поворота и оценивать в ОФК именно этот вектор. Тогда текущий скорректированный кватернион ориентации будет определяться как значение этого кватерниона на предыдущем шаге, умноженное на кватернион коррекции, вычисляемый по оцененному ОФК вектору малого поворота; благодаря данной особенности, описываемый алгоритм получил в иностранной литературе наименование multiplicative update [8].

В последние годы, однако, рассматривается и другой подход к данной проблеме, основанный на т.н. фильтрах Калмана на дифференцируемых многообразиях (ФКМ) [7]. Данный подход позволяет оценивать вектор состояния, принадлежащий какому-либо дифференцируемому многообразию, например сфере S^3 в 4-х мерном пространстве в случае компонент кватернионов. В данной статье я кратко сформулирую алгоритм такого фильтра для навигационных приложений.

2. Использование ФКМ для оценивания компонент единичного кватерниона

Пусть U^S – некоторая окрестность единичного кватерниона на S^3, U – окрестность нулевого вектора в R^3; ведем функцию $\phi\ :\ U^S\ \to\ U$. Не останавливаясь на явном виде функции ϕ, предположим, что справедливы следующие асимптотические разложения при $||e||_2 \to 0$:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 - \frac{||e||_2^2}{8} \\ \frac{e}{2} \end{pmatrix} + o(||e||_2), \qquad e = 2\overline{\delta} + o(||\overline{\delta}||_2^2),$$

где $\delta \in U^S$, $e \in U$. Рассмотрим теперь кватернион $q' \in U^S$. Тогда, аналогично предыдущему, введем функции $e^q = \phi_q(q') = \phi(q^\star \circ q')$ и $q' = \phi_q^{-1}(e^q) = q \circ \phi^{-1}(e^q)$, где $q^\star$ – сопряженный кватернион, знаком «$\circ$» обозначено произведение кватернионов.

Пусть имеется некоторая динамическая система с вектором состояния x, содержащим компоненты кватерниона q и другие переменные y, так что $x = (q^T, y^T)^T$. Требуется найти оценку вектора $\hat{x}$ по измерениям z_k при условии

$$\begin{cases} x_k = f_{k-1}(x_{k-1}) + w_{k-1}, \\ z_k = h_k(x_k) + v_k, \end{cases}$$

где w_k, v_k – шумы с известными ковариационными матрицами Q_k, R_k соответственно.

Введем вспомогательный вектор $\mathcal{X} = (e^T, y^T)^T$. Можно показать, что алгоритм

ФКМ для данной системы будет иметь вид [8]:

$$
\begin{aligned}
&\hat{q}_k^- = f_{k-1}^q(\hat{x}_{k-1}^+), \qquad \hat{\mathcal{X}}_k^- = \begin{pmatrix} e^0 \\ f_{k-1}^y(\hat{x}_{k-1}^+) \end{pmatrix}, \\
&P_k^- = F_{k-1}P_{k-1}^+F_{k-1}^T + Q_{k-1}, \qquad K_k = P_k^- K_k^T(H_kP_k^-H_k^T + R_k)^{-1}, \\
&\hat{\mathcal{X}}_k^+ = \hat{\mathcal{X}}_k^- + K_k(z_k - h_k(\hat{x}_k^-)), \qquad P_k^{\pm} = (I - K_kH_k)P_k^-, \\
&\hat{x}_k^+ = \begin{pmatrix} \hat{q}_k^- \circ \phi^{-1}(\hat{e}_k^+) \\ \hat{y}_k^+ \end{pmatrix}, \qquad P_k^+ = T_kP_k^{\pm}T_k^T,
\end{aligned}
$$

где F_k может быть вычислена как якобиан от f^q, f^y, а переходная матрица T_k определяется соотношением:

$$
\mathcal{T}_k = \left.\frac{\partial \phi_{q'}^{-1}}{\partial e^q}\right|_{q'=\hat{q}_k^-}, \qquad T_k = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_k & \dots \\ \dots & I \end{pmatrix};
$$

ее возникновение связано с тем, что на каждом шаге алгоритма вектор e_k, являющийся мерой отклонения от $\hat{q}_k^-$, вычисляется относительно разных $\hat{q}_k^-$. В настоящей работе я не останавливаюсь на явном виде функции ϕ; отмечу лишь, что возможны различные параметризации (подробнее см. в [8]).

3. Заключение

В настоящей работе нами представлен алгоритм оценивания кватерниона ориентации на основе ФКМ. Данный алгоритм, по сравнению с альтернативными подходами, позволяет автоматизировать вывод уравнений калмановской фильтрации для сложных случаев комплексирования инерциальных навигационных систем с неинерциальной корректирующей информацией. Еще одним преимуществом рассматриваемого алгоритма является его способность работать при больших начальных ошибках в задании ориентации.

Список литературы

1. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
2. Kalman R.E., Bucy R.S. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory // Transactions of ASME, Series D, Journal of Basic Engineering. 1961. Vol. 83. P. 95-108.
3. Rogers R.M. Applied Mathematics in Integrated Navigation Systems / 3rd ed. Reston: AIAA, 2007.
4. Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Часть 1. Математические модели инерциальной навигации / 2-е изд. М.: Изд-во МГУ, 2010.
5. Leferts E.J., Markley F.L., Shuster M.D. Kalman Filtering for Spacecraft Attitude Estimation // J. Guidance. 1982. Vol. 5, No. 5. P. 417-429.
6. Markley F.L. Multiplicative vs. additive filtering for spacecraft attitude determination // Dyn. Control Syst. Struct. Space. 2004. Vol. 6. P. 311–317.
7. He D., Xu W., Zhang F. Kalman filters on differentiable manifolds. arXiv preprint arXiv:2102.03804. 2021.
8. Bernal-Polo P., Martinez-Barbera H. Kalman Filtering for Attitude Estimation with Quaternions and Concepts from Manifold Theory // Sensors. 2019. Vol. 19, No. 1. P. 149.