УДК 517.925.54

МЕТОД ЛОКАЛИЗАЦИИ: ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЛАСТЕЙ ПРИТЯЖЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ

А.П. Крищенко
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5, стр.1
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН
Россия, 119333, Москва, ул. Вавилова, 44, кор.2
E-mail: apkri@bmstu.ru

Ключевые слова: инвариантный компакт, локализация, устойчивость, аттрактор, положительно инвариантное множество.

Аннотация: Формулируются основные определения и некоторые результаты метода локализации инвариантных компактов. Их применение при качественном анализе автономных систем демонстрируется на примере системы третьего порядка динамики популяций, для которой доказано существование аттрактора, найдены условия устойчивости в целом положения равновесия и вымирания хищников.

1. Введение

Вопросы нахождения у автономной системы дифференциальных уравнений аттрактора, областей с хаотическим поведением, периодических траекторий, положений равновесия и исследования их устойчивости, возможных бифуркаций и другие остаются в центре внимания многих работ. При решении некоторых из них можно использовать метод локализации инвариантных компактов. Одно из оснований для этого состоит в том, что метод связан с изучением поведения траекторий системы и генерирует построение положительно инвариантных областей в фазовом пространстве. В зависимости от цели исследования, можно выделить три этапа использования этого метода: нахождение оценки для всех инвариантных компактов системы в виде содержащего их множества специального вида (локализирующего множества); улучшение этой оценки с помощью уменьшения локализирующего множества и ухудшение этой оценки при расширении локализирующего множества.

Метод локализации можно использовать при доказательстве неограниченной продолжимости решений и ограниченности самих решений, существования у системы аттрактора, исследования асимптотической устойчивости и устойчивости в целом положения равновесия и решении других задач.

Возможности использования этого метода демонстрируются в разделе 3 при рассмотрении трехмерной системы динамики популяций с девятью параметрами, для которой доказано существование аттрактора и найдены: условия устойчивости в целом нулевого положения равновесия, т.е. вымирания всех популяций, и условия вымирания хищников. Необходимые определения и результаты метода локализации приведены в разделе 2.

2. Метод локализации

Рассмотрим систему $\dot{x} = f(x)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ и множество $Q \subset \mathbb{R}^n$. Любой функции $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ соответствует множество

$$S(\phi) = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{\phi}(x) = 0\},$$

называемое универсальным сечением, и экстремальные значения

$$\phi_{\inf}(Q) = \inf_{S(\phi)\cap Q} \phi(x), \quad \phi_{\sup}(Q) = \sup_{S(\phi)\cap Q} \phi(x).$$

Теорема 1. *[1] Все инвариантные компакты автономной системы $\dot{x} = f(x)$ содержащиеся в множестве Q, содержатся в локализирующем множестве*

$$\Omega(\phi, Q) = Q \cap \{\phi_{\inf}(Q) \leqslant \phi(x) \leqslant \phi_{\sup}(Q)\}, \tag{1}$$

которое соответствует ϕ (локализирующей функции) и множеству Q.

Пусть функции $h_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$ принадлежат $C^1(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим локализирующие множества

$$K_0 = Q, \quad K_i = \Omega(h_i, K_{i-1}), \quad i = 1, 2 \ldots. \tag{2}$$

Теорема 2. *[1] Все инвариантные компакты автономной системы $\dot{x} = f(x)$ содержащиеся в множестве Q, содержатся в локализирующих множествах K_i, $i = 1, 2 \ldots$.*

Несложно заметить, что $K_i \supseteq K_{i+1}$ и поэтому (2) называют итерационной последовательностью локализирующих множеств. Ее предел всегда существует, равен $K_\infty = \cap_{i=0}^{+\infty} K_i$ и содержит все инвариантные компакты системы.

Определение. *Множество*

$$\Omega(\phi, Q, \tau, \nu) = Q \cap \{\phi_{\inf}(Q) - \tau \leqslant \phi(x) \leqslant \phi_{\sup}(Q) + \nu\}, \quad \tau \geqslant 0, \nu \geqslant 0,$$

называют расширением локализирующего множества $\Omega(\phi, Q) = \Omega(\phi, Q, 0, 0)$.

Локализирующие множества и их расширения имеют следующие важные свойства.

Теорема 3. *Если компактное множество Q положительно инвариантно, то для любой функции $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ локализирующее множество (1) компактно и положительно инвариантно.*

Теорема 4. *Если локализирующее множество $\Omega(\phi, Q)$ положительно инвариантно, то и его расширение $\Omega(\phi, Q, \tau, \nu)$ положительно инвариантно.*

3. Трехмерная модель динамики популяций

Рассмотрим трехмерную модель [2] динамики популяций

$$
(3)\qquad \begin{array}{rcl}
\dot{x}_1 &=& rx_2(1-\dfrac{x_1}{k}) - \alpha x_1 - \dfrac{\beta(1-m)x_1x_3}{(1-m)x_1+n_1}, \\
\dot{x}_2 &=& \alpha x_1 - \delta_1 x_2, \\
\dot{x}_3 &=& \dfrac{\phi\beta(1-m)x_1x_3}{(1-m)x_1+n_1} - \delta_2 x_3,
\end{array}
$$

$\dot{(.)} = d(.)/dt, t \geqslant 0$ с неотрицательными переменными $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_{+,0} = \{x \geqslant 0\}$ и положительными параметрами, $m < 1$, где $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ – плотности популяций подрастающих жертв, взрослых жертв и хищников.

3.1. Вымирание хищников

Система (3) далее рассматривается в множестве $\mathbb{R}^3_{+,0}$, которое положительно инвариантно.

Предложение 1. *Если $\delta_2 \geqslant \phi\beta$, то все траектории стремятся к множеству $\{x_3 = 0\}$ и популяция хищников вымирает.*

Доказательство. Несложно заметить, что множество

$$M_1(\epsilon) = \{x_1 \leqslant k + \epsilon\} \cap \mathbb{R}^3_{+,0}, \quad \epsilon \geqslant 0,$$

положительно инвариантно, поскольку в множестве $\mathbb{R}^3_{+,0} \setminus M_1(\epsilon) = \{x_1 > k+\epsilon\} \cap \mathbb{R}^3_{+,0}$ выполнено неравенство $\dot{x}_1 < 0$. Аналогично, множество

$$M_2(\epsilon, \tau) = \{x_2 \leqslant \alpha(k+\epsilon)/\delta_1 + \tau\} \cap M_1(\epsilon), \quad \epsilon \geqslant 0, \tau \geqslant 0,$$

положительно инвариантно, поскольку $\dot{x}_2 < 0$ в $M_1(\epsilon) \setminus M_2(\epsilon,\tau) = \{x_2 > \alpha(k+\epsilon)/\delta_1 + \tau\} \cap M_1(\epsilon)$. В $M_2(\epsilon,\tau)$ справедлива оценка

$$\dot{x}_3 = (\frac{\phi\beta(1-m)x_1}{(1-m)x_1+n_1} - \delta_2)x_3 \leqslant (\frac{\phi\beta(1-m)}{(1-m)+n_1/(k+\epsilon)} - \delta_2)x_3.$$

Если $\delta_2 \geqslant \phi\beta$, то $\dot{x}_3 \leqslant 0$ в множестве $M_2(\epsilon,\tau)$ и $\dot{x}_3 = 0$ лишь при $x_3 = 0$. Поэтому компактное множество $D(\epsilon,\tau,\nu) = M_2(\epsilon,\tau) \cap \{x_3 \leqslant \nu\}$, $\nu > 0$, положительно инвариантно и по теореме Ласалля все траектории в этом множестве стремятся к $\{x_3 = 0\}$. Это верно и для траекторий в $\mathbb{R}^3_{+,0}$, поскольку начальная точка любой траектории в $\mathbb{R}^3_{+,0}$ при достаточно больших значениях ϵ, τ, ν содержится в множестве $D(\epsilon,\tau,\nu)$.

3.2. Существование аттрактора

Теорема 5. *Все инвариантные компакты системы* (3) *содержатся в положительно инвариантных множествах*

$$M_1 = \{x_1 \leqslant k\} \cap \mathbb{R}^3_{+,0}, \quad M_2 = \{x_1 \leqslant k, x_2 \leqslant \alpha k/\delta_1\} \cap \mathbb{R}^3_{+,0},$$

$$M_3 = \{x_1 \leqslant k, x_2 \leqslant \alpha k/\delta_1, x_1 + x_3/\phi \leqslant k + r\alpha k/(\delta_1\delta_2)\} \cap \mathbb{R}^3_{+,0}$$

Множество M_3 компактно и содержит аттрактор системы.

Доказательство. Для локализирующей функции $h_1 = x_1$ находим, что $h_{1\inf}(\mathbb{R}^3_{+,0}) = 0$, $h_{1\sup}(\mathbb{R}^3_{+,0}) = k$ и поэтому $\Omega(h_1, \mathbb{R}^3_{+,0}) = \{0 \leqslant x_1 \leqslant k\} \cap \mathbb{R}^3_{+,0} = M_1$. Множество $M_1(\epsilon)$ является расширением локализирующего множества M_1 и поэтому содержит все инвариантные компакты системы (3).

Аналогично, для локализирующей функции $h_2 = x_2$ получаем, что $h_{2\inf}(M_1(\epsilon)) = 0$, $h_{2\sup}(M_1(\epsilon)) = \alpha(k+\epsilon)/\delta_1$ и $\Omega(h_2, M_1(\epsilon)) = \{0 \leqslant x_2 \leqslant \alpha(k+\epsilon)/\delta_1\} \cap M_1(\epsilon) = M_2(\epsilon, 0)$, а $M_2(0,0) = M_2$. Множество $M_2(\epsilon,\tau)$ является расширением множества $M_2(\epsilon, 0)$ и поэтому содержит все инвариантные компакты системы (3).

Рассмотрим локализирующую функцию $h_3 = x_1 + x_3/\phi$. Для нее в $\mathbb{R}^3_{+,0}$ справедлива оценка

$$\dot{h}_3 = rx_2(1 - \frac{x_1}{k}) - \alpha x_1 - \delta_2 x_3/\phi \leqslant rx_2 - \delta_2 x_3/\phi$$

и на $S(h_3, M_2(\epsilon,\tau))$ выполнены неравенства

$$x_3 \leqslant \frac{r\phi}{\delta_2} x_2 \leqslant \frac{r\phi}{\delta_2}(\frac{\alpha}{\delta_1}(k+\epsilon)+\tau), h_3 \leqslant k+\epsilon+\frac{r}{\delta_2}(\frac{\alpha}{\delta_1}(k+\epsilon)+\tau) = h_{3\sup}(M_2(\epsilon,\tau)).$$

Следовательно,

$$\Omega(h_3, M_2(\epsilon,\tau)) = \{x_1 + \frac{x_3}{\phi} \leqslant k+\epsilon+\frac{r}{\delta_2}(\frac{\alpha}{\delta_1}(k+\epsilon)+\tau)\} \cap M_2(\epsilon,\tau) = M_3(\epsilon,\tau).$$

Отметим, что $\dot{h}_3 < 0$ в множестве $M_2(\epsilon,\tau) \setminus M_3(\epsilon,\tau)$. Действительно, если $h_3 = x_1 + x_3/\phi = h_{3\sup}(M_2(\epsilon,\tau)) + d$, $d > 0$, то

$$\begin{aligned}\dot{h}_3 &\leqslant rx_2 - \delta_2 x_3/\phi = rx_2 - \delta_2(h_{3\sup}(M_2(\epsilon,\tau)) + d - x_1) \leqslant \\ &\leqslant r(\alpha(k+\epsilon)/\delta_1 + \tau) + \delta_2(k+\epsilon) - \delta_2 h_{3\sup}(M_2(\epsilon,\tau)) - \delta_2 d \leqslant -\delta_2 d < 0.\end{aligned}$$

В результате получаем, что при любых $\epsilon \geqslant 0$, $\tau \geqslant 0$, $\nu \geqslant 0$ компактное множество

$$M_3(\epsilon,\tau,\nu) = \{0 \leqslant x_1 + x_3/\phi \leqslant h_{3\sup}(M_2(\epsilon,\tau)) + \nu\} \cap M_2(\epsilon,\tau)$$

положительно инвариантно, содержит все инвариантные компакты и $M_3(0,0,0) = M_3$. Ллюбая траектория в $M_3(\epsilon,\tau,\nu)$ стремится к ее ω–предельному множеству, которое содержится в M_3. Это верно и для траекторий в $\mathbb{R}^3_{+,0}$, поскольку начальная точка любой траектории в $\mathbb{R}^3_{+,0}$ при достаточно больших значениях ϵ, τ, ν содержится в множестве $M_3(\epsilon,\tau,\nu)$. Следовательно, аттрактор в системе (3) существует и содержится в M_3.

Следствие 1. *Если* $\delta_2 > \frac{\phi\beta(1-m)k}{(1-m)k+n_1}$, *то все траектории системы* (3) *стремятся к множеству* $\{x_3 = 0\}$ *и популяция хищников вымирает.*

Доказательство. Компактное положительно инвариантное множество M_3 содержит аттрактор системы (3) и в этом множестве для функции x_3 выполнены условия теоремы Лассаля.

3.3. Устойчивость в целом нулевого положения равновесия

Докажем следующую теорему.

Теорема 6. *Если* $r \leqslant \delta_1$, *то нулевое положение равновесия* $E_0(0;0;0)$ *системы* (3) *асимптотически устойчиво в целом в* $\mathbb{R}^3_{+,0}$.

Доказательство. Построим итерационную последовательность (2), соответствующую начальному множеству $Q = \mathbb{R}^3_{+,0}$ и последовательности локализирующих функций

$$h_1 = x_1,\ h_2 = x_2,\ h_3 = x_1 + x_3/\phi,\ h_4 = x_1,\ h_5 = x_2,\ h_6 = x_1 + x_3/\phi,\ \ldots.$$

Эта последовательность состоит из рассмотренных выше функций x_1, x_2 и $x_1 + x_3/\phi$, которые повторяются в одном и том же порядке и в точке E_0 имеют наименьшее значение в $\mathbb{R}^3_{+,0}$ равное нулю. Поэтому элементы итерационной последовательности (2) с номером $3j+i$, $j = 1,2,3,\ldots$, $i = 0,1,2$ имеют вид

$$K_{3j} = \{x_1 \leqslant a_j, x_2 \leqslant b_j, x_1 + x_3/\phi \leqslant c_j\} \cap \mathbb{R}^3_{+,0},$$

$$K_{3j+1} = \{x_1 \leqslant a_{j+1}, x_2 \leqslant b_j, x_1 + x_3/\phi \leqslant c_j\} \cap \mathbb{R}^3_{+,0},$$
$$K_{3j+2} = \{x_1 \leqslant a_{j+1}, x_2 \leqslant b_{j+1}, x_1 + x_3/\phi \leqslant c_j\} \cap \mathbb{R}^3_{+,0},.$$
$$K_{3(m+1)} = \{x_1 \leqslant a_{j+1}, x_2 \leqslant b_{j+1}, x_1 + x_3/\phi \leqslant c_{j+1}\} \cap \mathbb{R}^3_{+,0}.$$

Найдем последовательности $\{a_j\}$, $\{b_j\}$ и $\{c_j\}$ и их пределы a, b и c.

Отметим, что $K_3 = M_3$ и поэтому $a_1 = k$, $b_1 = \alpha k/\delta_1$, $c_1 = k + r\alpha k/(\delta_1\delta_2)$. В более общем случае, т.е. при $j \geqslant 1$, множество $K_{3j+1} = \Omega(h_1, K_{3j})$ и так как в $\mathbb{R}^3_{+,0}$ $\dot{h}_1 \leqslant rx_2 - rx_1x_2/k - \alpha x_1 = rx_2 - x_1(rx_2/k + \alpha)$, то на $S(h_1, K_{3j})$ выполнено неравенство $x_1 \leqslant rx_2k/(rx_2 + \alpha k) \leqslant rb_jk/(rb_j + \alpha k) = h_{1\sup}(K_{3j}) = a_{j+1}$ и в итоге находим локализирующее множество $\Omega(h_1, K_{3j}) = \{0 \leqslant x_1 \leqslant a_{j+1}\} \cap K_{3j} = K_{3j+1}$.

Аналогично, $K_{3j+2} = \Omega(h_2, K_{3j+1})$ и так как в K_{3j+1} выполнено неравенство $\dot{h}_2 = \alpha x_1 - \delta_1 x_2 \leqslant \alpha a_{j+1} - \delta_1 x_2$, то $x_2 \leqslant \alpha a_{j+1}/\delta_1$ на $S(h_2, K_{3j+1})$. Поэтому $h_{2\sup}(K_{3j+1}) = \alpha a_{j+1}/\delta_1$ и находим локализирующее множество $\Omega(h_2, K_{3j+1}) = \{0 \leqslant x_2 \leqslant b_{j+1}\} \cap K_{3j+1}$, $b_{j+1} = \alpha a_{j+1}/\delta_1$.

Наконец, $K_{3j+3} = \Omega(h_3, K_{3j+2})$ и так как в $\mathbb{R}^3_{+,0}$ справедлива оценка

$$\dot{h}_3 = rx_2(1 - x_1/k) - \alpha x_1 - \delta_2 x_3/\phi \leqslant rx_2 - \delta_2 x_3/\phi,$$

то на $S(h_3, K_{3j+2})$ выполнены неравенства

$$x_3 \leqslant r\phi x_2/\delta_2 \leqslant r\phi b_{j+1}/\delta_2, \quad h_3 \leqslant a_{j+1} + rb_{j+1}/\delta_2 = h_{3\sup}(K_{3j+1})) = c_{j+1}.$$

В итоге получены рекуррентные соотношения $a_{j+1} = rb_jk/(rb_j + \alpha k)$, $b_{j+1} = \alpha a_{j+1}/\delta_1$, $c_{j+1} = a_{j+1} + rb_{j+1}/\delta_2$ и система уравнений на верхние границы предела итерационной последовательности локализирующих множеств $a = rbk/(rb + \alpha k)$, $b = \alpha a/\delta_1$, $c = a + rb/\delta_2$. При $r \leqslant \delta_1$ эта система имеет единственное решение $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. В результате положение равновесия E_0 асимптотически устойчиво и это аттрактор системы. Следовательно, E_0 асимптотически устойчиво в целом. При $r > \delta_1$ есть еще одно положительное решение $a = k(1 - \delta_1/r)$, $b = \alpha k(r - \delta_1)/(r\delta_1)$, $c = a + r/(\delta_2 b)$ и в этом случае получаем следующее следствие.

Следствие 2. *Если* $r > \delta_1$ *и* $\delta_2 > \frac{\phi\beta(1-m)a}{(1-m)a+n_1}$, *то все траектории системы* (3) *стремятся к множеству* $\{x_3 = 0\}$ *и популяция хищников вымирает.*

Список литературы

1. Крищенко А.П. Локализация инвариантных компактов динамических систем // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 12. С. 1597–1604.
2. Beay L.K., Saija M. A Stage-Structure Rosenzweig-MacArthur Model with Effect of Prey Refuge // Jambura J. Biomath. 2020. Vol. 1, No. 1. P.1–7.