

ЛМН-СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ МАТРИЧНЫХ ПИД-РЕГУЛЯТОРОВ НА МОДЕЛИ ОБЪЕКТА С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

А.Е. Коньков

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: konkov@ipu.ru

Ключевые слова: ПИД-регулятор, формирование контура, линейные матричные неравенства, выпукло-вогнутая процедура.

Аннотация: В докладе представлена методика синтеза дискретных матричных ПИД-регуляторов путем итерационного решения системы линейных матричных неравенств (ЛМН) через выпукло-вогнутую процедуру. Предложенная методика позволяет синтезировать стационарный регулятор на линейной модели объекта с переменными параметрами, обеспечивая робастную устойчивость синтезированной системы. Также предлагается новый подход к формированию контура (loop shaping).

1. Введение

В докладе предлагается расширение метода синтеза матричных ПИД-регуляторов (MIMO PID) с помощью итерационного решения системы ЛМН для дискретных систем управления. Оригинальный метод был представлен для систем в непрерывном времени в [1]. Наш вклад заключается в формулировании ключевых понятий для дискретных систем и формулировании матричных ограничений для синтеза стационарного ПИД-регулятора для нестационарного объекта управления, когда модель объекта представлена в виде линейной модели с переменными параметрами. Кроме того, метод дополнен процедурой формирования контура (loop shaping). Основной мотивацией к применению матричных ПИД-регуляторов является необходимость одновременного управления несколькими выходами многосвязного объекта управления.

2. Постановка задачи

Модель объекта в пространстве состояний имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{cases}$$

где $y(t) \in \mathbb{R}^q$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $x(t) \in \mathbb{R}^s$, q – количество выходов, m – количество входов, а s – количество состояний (порядок модели). Матрицы системы в пространстве состояний $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ изменяются во времени.

Рассматривается два случая, которые позволяют представить такую модель в виде массива стационарных моделей. Первый случай – это модель с линейным изменением параметров (LPV). Второй случай – модель объекта с параметрическими неопределенностями. Оба описанных случая позволяют аппроксимировать нестационарную модель объекта массивом стационарных линейных моделей с индексом n .

После этого производится дискретизация каждой модели в массиве с помощью метода ЗОН или ФОН, в зависимости от типа применяемых АЦП и ЦАП в цифровой системе управления:

$$\begin{cases} x_n(T_s k + T_s) = A_n^d x_n(T_s k) + B_n^d u_n(T_s k), \\ y_n(T_s k) = C_n^d x_n(T_s k) + D_n^d u_n(T_s k). \end{cases}$$

Поскольку предлагаемый метод работает с передаточными функциями, получим массив дискретных передаточных функций:

$$(1) \quad P_n(z) = C_n^d (zI_s - A_n^d)^{-1} B_n^d + D_n^d, \quad P_n(z) \in \mathbb{C}^{q \times m}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Используется система управления с обратной связью, изображенная на Рис. 1.

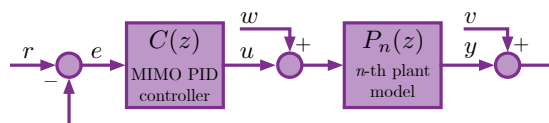


Рис. 1. Блок-схема следящей системы управления.

Здесь вектор r – задающее воздействие, вектор e – ошибка управления, вектор u – вход, а вектор y – выход. Вектор w – входные возмущения, а вектор v – выходные возмущения.

Дискретная стационарная модель матричного ПИД-регулятора в законе управления $u(z) = C(z) e(z)$ определяется дискретной передаточной функцией:

$$(2) \quad C(z) = K_P + K_I \frac{zT_s}{z-1} + K_D \frac{z-1}{zT_s}, \quad C(z) \in \mathbb{C}^{m \times q},$$

где коэффициенты ПИД-регулятора $\{K_P, K_I, K_D\} \in \mathbb{R}^{m \times q}$ являются произвольными (недиагональными) матрицами.

В соответствии со схемой на Рис. 1, определим массив дискретных передаточных функций:

- Передаточная функция разомкнутого контура $L_n(z) = P_n(z)C(z)$;
- Функция чувствительности $S_n(z) = (I_q + L_n(z))^{-1}$;
- Дополнительная функция чувствительности $T_n(z) = I_q - S_n(z) = L_n(z)S_n(z)$;

- Функция статической и низкочастотной чувствительности $F(z)$, которая является функцией чувствительности для малых частот. Если $C(z)$ задана в виде (2), то она принимает вид:

$$(3) \quad F_n(z) = \left(P_n(1)K_I T_s \right)^{-1} (z-1), \quad F_n(z) \approx S_n(z) \text{ для малых } \omega, \quad z = \exp(j\omega T_s);$$

- Q-параметр $Q_n(z) = C(z)S_n(z)$;
- Передаточная функция входных возмущений $W(z) = -S_n(z)P_n(z)$.

Используя эти замкнутые передаточные функции, мы формулируем критерии качества [2] замкнутой системы управления посредством наложения ограничений на их \mathcal{H}_∞ -нормы. Мы стремимся достичь минимально возможных времен переходных процессов в замкнутой системе, соблюдая при этом ограничения на \mathcal{H}_∞ -нормы других передаточных функций. Для этого мы будем минимизировать спектральную норму матрицы $(P_n(1)K_I T_s)^{-1}$, которую мы называем матрицей статической и низкочастотной чувствительности:

$$\min \left\| \left(P_n(1)K_I T_s \right)^{-1} \right\|_2.$$

Минимизация спектральной нормы матрицы статической и низкочастотной чувствительности также обеспечивает развязку контуров управления в замкнутой системе, по крайней мере, на низких частотах.

Подход к формированию контура разомкнутой системы (loop shaping) предполагает определение требований к качеству и запасам робастной устойчивости замкнутой системы управления в терминах сингулярных значений передаточной функции разомкнутого контура [3]. Функции, ограничивающие максимальный коэффициент усиления передаточных функций в замкнутой системе, принято называть функциями формы (shape functions).

Определим частотную область Ω , на которой мы будем осуществлять синтез дискретного регулятора

$$(4) \quad \Omega = \{ \omega \mid 0 < \omega_0 \leq \omega \leq \omega_{nyq} \}.$$

В силу симметрии дискретного преобразования Фурье, эта частотная область ограничена частотой Котельникова–Найквиста ω_{nyq} [5], а ω_0 – достаточно малой частотой. $\omega_0 \neq 0$, так как в этом случае получились бы бесконечные значения частотной характеристики передаточной функции с единичными полюсами ($z = 1$). Разделим частотную область на три части $\Omega = \Omega_L \cup \Omega_C \cup \Omega_H$:

$$(5) \quad \begin{aligned} \text{низкие частоты:} \quad & \Omega_L = \{ \omega \mid \omega_0 \leq \omega < \omega_b^{\min} \}; \\ \text{желаемый диапазон частот среза:} \quad & \Omega_C = \{ \omega \mid \omega_b^{\min} \leq \omega \leq \omega_b^{\max} \}; \\ \text{высокие частоты:} \quad & \Omega_H = \{ \omega \mid \omega_b^{\max} < \omega \leq \omega_{nyq} \}. \end{aligned}$$

В отличие от классического loop shaping, мы можем задавать функции формы в любой форме. Для массива передаточных функций замкнутого контура мы определяем набор функций формы

$$b_G(\omega) = \{ b_S(\omega), b_T(\omega), b_Q(\omega), b_W(\omega) \}$$

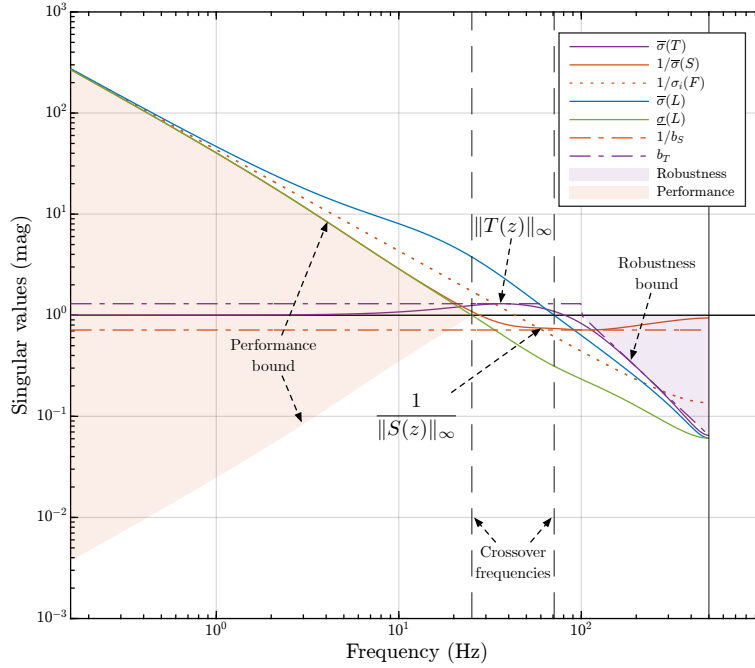


Рис. 2. Иллюстрация процедуры формирования контура (loop shaping). Сингулярные значения передаточных функций $L(z)$, $S(z)$ и $T(z)$. Области качества и робастности закрашены.

так, что для любого n выполняется:

$$\left\| G_n \left(\exp(j\omega T_s) \right) \right\|_2 \leq b_G(\omega), \quad \left\| G_n(z) \right\|_\infty \leq G_{\max}, \quad G_{\max} = \sup_{\omega} \left\{ b_G(\omega) \right\}.$$

Задача достижения компромисса между производительностью и робастностью основана на том, что функция чувствительности $S(z)$ аппроксимирует передаточную функцию разомкнутого контура $L(z)$ на низких частотах, а дополнительная функция чувствительности $T(z)$ аппроксимирует ее на высоких частотах, при выполнении условий:

$$(6) \quad \text{for } \omega \in \Omega_L, \quad \text{if } \underline{\sigma} \left(L \left(\exp(j\omega T_s) \right) \right) \gg 1, \quad \overline{\sigma} \left(L^{-1} \left(\exp(j\omega T_s) \right) \right) \ll 1 : \\ S(z) = \left(I_q + L(z) \right)^{-1} \approx L^{-1}(z), \quad T(z) = I_q - S(z) \approx I_q,$$

$$(7) \quad \text{for } \omega \in \Omega_H, \quad \text{if } \overline{\sigma} \left(L \left(\exp(j\omega T_s) \right) \right) \ll 1 : \\ T(z) = L(z) \left(I_q + L(z) \right)^{-1} \approx L(z), \quad S(z) = I_q - T(z) \approx I_q.$$

Таким образом, ограничение на $S(z)$ в Ω_L определяет качество управления системы с замкнутым контуром. Аналогично, ограничение на $T(z)$ в Ω_H определяет запас робастной устойчивости замкнутой системы. Эти ограничения принято называть границей качества и границей робастности. Мы называем области, которые они ограничивают, областью качества и областью робастности (Рис. 2). Область качества всегда симметрична.

3. Метод синтеза

Понятие \mathcal{H}_∞ -нормы матричной функции является обобщением понятия спектральной нормы матрицы на матричные комплексные функции. Этот факт позволяет сформулировать задачу ограничения \mathcal{H}_∞ -нормы передаточной функции $G(z)$ как задачу на ограничение достаточно большого набора спектральных норм частотных откликов $G(\exp(j\omega_k T_s))$ на конечном множестве частот Ω_k :

$$(8) \quad \Omega_k = \{\omega_k \mid \omega_k \in \Omega, \quad k = 1, 2, \dots, N_k\}, \quad |\Omega_k| = N_k.$$

Значение N_k является мощностью множества Ω_k , а Ω определяется в (4).

Мы используем индекс k для обозначения частотного отклика на частоте ω_k . Применим это к n -й модели объекта $P_{nk} = P_n(\exp(j\omega_k T_s))$, к передаточной функции ПИД-регулятора (2)

$$(9) \quad C_k = K_P + K_I \frac{\exp(j\omega_k T_s) T_s}{\exp(j\omega_k T_s) - 1} + K_D \frac{\exp(j\omega_k T_s) - 1}{\exp(j\omega_k T_s) T_s},$$

а также ко всем остальным передаточным функциям, и к функциям формы этих передаточных функций.

Используя серию преобразований [4] и выпукло-вогнутую процедуру [6] получаем систему ЛМН, решение которой для каждой n -й модели объекта и для каждой k -й частоты на каждой i -й итерации выпукло-вогнутой процедуры даст матрицы ПИД-регулятора $\{K_P, K_I, K_D\}_i$, которые соответствуют локальному оптимуму μ_i :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \max \quad \mu_i, \\ \text{s.t.} \quad X_n^H \check{X}_n + \check{X}_n^H X_n - \check{X}_n^H \check{X}_n - \mu T_s^{-2} I_q \succeq 0, \\ Z_{nk}^H \check{Z}_{nk} + \check{Z}_{nk}^H Z_{nk} - \check{Z}_{nk}^H \check{Z}_{nk} - b_{S_k}^{-2} I_q \succeq 0, \\ \left[\begin{array}{cc} Z_{nk}^H \check{Z}_{nk} + \check{Z}_{nk}^H Z_{nk} - \check{Z}_{nk}^H \check{Z}_{nk} & b_{T_k}^{-1} L_{nk}^H \\ b_{T_k}^{-1} L_{nk} & I_q \end{array} \right] \succeq 0, \\ \left[\begin{array}{cc} Z_{nk}^H \check{Z}_{nk} + \check{Z}_{nk}^H Z_{nk} - \check{Z}_{nk}^H \check{Z}_{nk} & b_{Q_k}^{-1} C_k^H \\ b_{Q_k}^{-1} C_k & I_m \end{array} \right] \succeq 0, \\ \left[\begin{array}{cc} Z_{nk} \check{Z}_{nk}^H + \check{Z}_{nk} Z_{nk}^H - \check{Z}_{nk} \check{Z}_{nk}^H & b_{W_k}^{-1} P_{nk} \\ b_{W_k}^{-1} P_{nk}^H & I_m \end{array} \right] \succeq 0, \\ \text{for each } n, k, \end{array} \right.$$

где $\check{X}_{nk} = P_n(1) \check{K}_I$,

$$\check{Z}_{nk} = I + P_{nk} \check{C}_k = I_q + P_{nk} \left(\check{K}_P + \check{K}_I \frac{\exp(j\omega_k T_s) T_s}{\exp(j\omega_k T_s) - 1} + \check{K}_D \frac{\exp(j\omega_k T_s) - 1}{\exp(j\omega_k T_s) T_s} \right).$$

Здесь $\{\check{K}_P, \check{K}_I, \check{K}_D\} = \{K_P, K_I, K_D\}_{i-1}$ – матрицы ПИД-регулятора, полученные на предыдущей итерации выпукло-вогнутой процедуры. Таким образом, мы гарантируем, что значение локального оптимума μ_i не уменьшается с каждой новой итерацией выпукло-вогнутой процедуры. С каждой новой итерацией мы приближаемся к глобальному оптимуму $\mu_i \rightarrow \mu$. Алгоритм синтеза матричного ПИД-регулятора с использованием выпукло-вогнутой процедуры:

- Определить параметры,
- Установить $\check{Z}_{nk} = Z_{nk}^{\text{init}}$, $\check{X}_k = X_k^{\text{init}}$,
- Повторять решение (10) до тех пор, пока $\left| \mu_i / \mu_{i-1} \right| - 1 > \tau$.

Здесь μ_i – локальный оптимум i -ой итерации выпукло-вогнутой процедуры, а μ_{i-1} – локальный оптимум предыдущей итерации. Алгоритм останавливается, когда локальный оптимум μ_i считается близким к оптимуму μ . Типичное значение τ составляет 1%.

4. Заключение

В докладе представлена методика синтеза дискретного матричного ПИД-регулятора на линейной нестационарной модели объекта. Развернуто данная методика представлена в [7]. Там же можно найти численные примеры и описание Matlab-тулбокса, который реализует описанную методику синтеза матричного ПИД-регулятора. Метод применялся для синтеза цифровой системы управления формой плазмы в токамаке Глобус-М2 [8].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФ № 21-79-20180.

Список литературы

1. Boyd S., Hast M., Atrom K.J. MIMO PID tuning via iterated LMI restriction // Int. J. Robust. Nonlinear Control. 2016. Vol. 26, No. 8, P. 1718–1731
2. Boyd S., Barratt C. Linear controller design: limits of performance. Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall, 1991. 416 p.
3. Glover K., Sefton J., Mcfarlane D.C. A Tutorial on Loop Shaping using H-Infinity Robust Stabilization // IFAC Proceedings Volumes. 1990. Vol. 23, No. 8, P. 117–126.
4. Boyd S. Linear matrix inequalities in system and control theory. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. 193 p.
5. Котельников В.А., О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи (Приложение) // УФН. 2006. Т. 176, № 7. С. 762–770.
6. Lipp T., Boyd S. Variations and extension of the convex–concave procedure // Optim Eng. 2016. Vol. 17, No. 2. P. 263–287.
7. Konkov A.E., Mitrishlin Y.V. Synthesis Methodology of Discrete MIMO PID Controller with Loop Shaping on LTV Plant Model via Iterated LMI Restrictions // Mathematics. 2024. (На рецензировании)
8. Коньков А.Е., Коренев П.С., Митришкин Ю.В. и др. Система магнитного управления плазмой реального времени с алгоритмом восстановления равновесия в обратной связи для токамака Глобус-М2 // Физика плазмы. 2023. Т. 49, № 12. С. 1348–1356.