УДК 512:519.2:519.7:681.5

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ОБЩЕГО ПРИНЦИПА ИЗОМОРФИЗМА

В.С. Кулабухов
АО «Московский научно-производственный комплекс «Авионика» имени О.В. Успенского» (*АО МНПК «Авионика»*)
Россия, 127055, Москва, ул. Образцова, 7
E-mail: kws0704@mail.ru

Ключевые слова: теория реализации, принцип единственности, общий принцип изоморфизма, управляемость, система управления, изоморфный регулятор.

Аннотация: Рассмотрены современные доминаты в эволюции систем управления динамическими объектами, обусловленные их цифровизацией и необходимостью фундаментального научного обоснования используемых методов и технологий. Приведены основные положения алгебраической теории систем управления, основанной на общем принципе изоморфизма и используемой для формирования новых технологий решения типовых задач. Теория проиллюстрирована на примере задачи анализа управляемости динамических объектов и синтеза изоморфных регуляторов.

1. Введение: новые вызовы для систем управления

Главным вызовом и одновременно доминантой эволюции систем управления (СУ) является их полная цифровизация, опирающаяся на наличие математических моделей (ММ) объектов управления (ОУ) и собственно СУ. Модели позволяют реализовать технологию заблаговременного компьютерного прототипирования СУ, которая резко сокращает сроки разработки, испытаний и сертификации, а также обеспечивает сопровождение СУ в эксплуатации. Цифровые модели СУ используются не только на стадии проектирования, но и в процессе функционирования на ОУ.

Требование дальнейшего повышения эффективности СУ вызывает необходимость фундаментального научного обоснования и переоценки существующих методов и технологий, а также создания новых методов их синтеза – это вторая доминанта эволюции СУ. Большая группа новых методов развивается в рамках алгебраической теории систем, опирающейся на общий принцип изоморфизма (ОПИ).

2. Общий принцип изоморфизма и его приложения к теории управления

Типовые задачи теории систем решаются с использованием большого числа методов, в основе которых лежат эвристические приемы и «постулаты», обобщающие эмпирический опыт. Примером является постулат «обратной связи» (ОС). В связи с этим возникает вопрос о научных предпосылках, причинах возникновения и границах применения «постулатов», а также *классический «математический вопрос» о существовании и единственности решения любой рассматриваемой задачи*.

Фундаментально этот вопрос обсуждался на основе «принципа единственности» в «задаче реализации» – построения ММ системы по данным о ней [1-3]. Однако конструктивное решение даже этой «узкой» задачи найдено не было [1-9]: возникли проблемы с формализацией понятий «полнота» и «точность» данных [1].

С практической точки зрения формулировку принципа единственности было предложено уточнить в форме более «сильной» в математическом смысле формулировки *общего принципа изоморфизма* (ОПИ) [10-14]: если существует такое минимальное в смысле [1-3] отображение (модель) f, которое однозначно (изоморфно) объясняет некоторые данные о системе, то

a) с точностью до модели-изоморфизма f эти данные являются полными и точными – имеет место изоморфизм данных;

b) модель f единственна в том смысле, что если существуют другие минимальные изоморфные модели-объяснения тех же данных, то эти модели-объяснения изоморфны модели f – имеет место изоморфизм моделей.

В пункте b) повторяется принцип единственности, а введение пункта a) делает рассматриваемые данные автоматически полными и точными в силу определения изоморфизма алгебраических структур [15] и снимает вопрос формализации понятий. По сути, ОПИ дает естественно-научную интерпретацию определения изоморфизма. Взгляд на общую теорию систем с позиций ОПИ позволяет четко формализовать и систематизировать ее понятия, их соотношения и всю логику построения дисциплины. На рис. 1 проиллюстрировано определение изоморфизма $f{:}X \to Y$ алгебраических структур или «данных» X и Y.

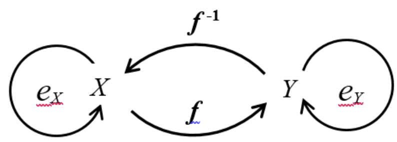

Рис. 1. Иллюстрация изоморфизма.

Тождественные отображения («единицы») e_x и e_y на «концах» изоморфизма могут быть разными и, более того, даже в простейшем случае матриц не всегда являются единичными матрицами [14]. Изоморфное отображение $f{:}X \to Y$ имеет единственное обратное $f^{-1}{:}Y \to X$. Показано [14], что соотношения

$$f = f \cdot e_x,\ f^{-1} = e_x \cdot f^{-1},$$
$$f = e_y \cdot f,\ f^{-1} = f^{-1} \cdot e_y,$$

следующие из определения изоморфизма, доказывают обязательное существование композиций отображений, реализующих изоморфизм. Это означает, что даже на двух изоморфных алгебраических структурах X и Y может быть *реализована* «*система*» [14].

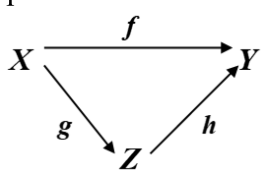

Рис. 2. Коммутативная диаграмма к теореме о реализации.

ОПИ позволил сформулировать и доказать *теорему о реализации*, раскрывающую свойства композиций отображений более общего вида, показанного на рис. 2 в форме коммутативной диаграммы (КД). Доказательство теоремы приведено в работах [12-14]. Здесь ограничимся ее формулировкой.

Теорема о реализации. *Если найдется модель $f{:}X \to Y$ изоморфно отображающая данные X в данные Y и существуют отображения $g{:}X \to Z$ и $h{:}Z \to Y$ такие, что выполняется композиция $f = hg$, то*

a) с точностью до изоморфизма f данные X и Y являются точными и полными;

б) модель f минимальна и единственна (*в смысле* [1]);

в) отображения h и g являются изоморфизмами с точностью до изоморфизма f;

г) если найдется другая минимальная модель-изоморфизм $f^*:X\to Y$, объясняющая те же данные, то существует и единственно изоморфное отображение $\varphi:f^*\to f$ такое, что выполняются соотношения $f=\varphi f^*$ и $f^*=\varphi^{-1}f$, то есть отображения f и f^* изоморфны между собой: $f\cong f^*$.

Про композицию hg отображений g и h можно сказать, что она *реализует, моделирует* отображение-изоморфизм f, которое должно быть изоморфным и вне коммутативной диаграммы. Об отображениях g и h теорема утверждает, что даже если они по отдельности, вне КД, не являются изоморфизмами, то в составе композиции $f=hg$ становятся *изоморфизмами с точностью до изоморфизма f*. Это означает, что каждое из отображений g и h является изоморфизмом только в рамках КД [14]. Например, показано, что в КД единственные обратные существуют даже у прямоугольных матриц [14].

На основе теоремы даны определения всех понятий алгебраической теории систем, опирающиеся на базовое понятие «система» [14]. *Формальная система* определена как композиция отображений, реализующих какой-либо изоморфизм и образующих замкнутую КД, свойства которой, как целого, не сводятся к множеству свойств, включаемых в систему отображений, а сами эти отображения приобретают в системе свойства, отсутствовавшие у них до включения в систему. Заданный изоморфизм формализует *цель системы*. Создаваемая на изоморфизме *система, то есть композиция отображений, позволяет эту цель реализовать не напрямую* (*через изоморфизм*), что часто невозможно, а через коммутирующую его композицию отображений. Одна и та же цель-изоморфизм может быть реализована разными системами-композициями – система не единственна. Как только экземпляр системы зафиксирован, обратные для отображений в КД будут единственными.

Иллюстрацией понятия «абстрактная система» является КД на рис. 2. Отображения g и h, реализующие *изоморфизм-цель f*, до включения в систему могут не иметь обратных, но в системе, в КД они обязательно будут иметь единственные обратные, то есть в системе возникает «системный эффект», «эмерджентность» - главный признак системы. Теорема о реализации *раскрывают причину возникновения эмерджентности*. Аналогичный рис. 2 имеют вид КД во многих задачах теории систем.

Вообще, *природа использует единый механизм решения проблем – все проблемы решаются путем создания систем* «искусственных, целенаправленных», либо «естественных», а формализуется этот механизм теоремой о реализации. На основе ОПИ сложилась *фундаментальная парадигма в теории систем* [14], позволяющая на единой математической основе решать все классические задачи. В [14] разработаны методы и технологии решения типовых задач теории систем (идентификация систем, наблюдаемость, управляемость, контроль систем, системное проектирование и др.), преимуществами которых являются строгое научное обоснование в рамках единой теории и формализованная процедура решения, а также научное объяснение ранее необъяснимых явлений «эмерджентности» и «системного эффекта».

Например, рассмотрим решение *фундаментальной научной проблемы синтеза регулятора*. Предложен метод решения проблемы как для линейных одномерных (SISO), многомерных (MIMO), так и для нелинейных систем. Соответствующие *регуляторы названы изоморфными*. Рассматривается линейный стационарный динамический объект

$$\dot{X} = AX + BU,$$

на который воздействует управление $U \subset R^m$. Здесь $X \subset R^n, m \leq n$. Нужно построить регулятор, который по желаемому состоянию X_{des} вычисляет потребное управление

$U \equiv U_{\text{des}}$. Регулятор существует, если объект управляем. Это означает, что если воздействие Uдает X_{des}, то и, наоборот, по X_{des} регулятор должен точно и однозначно восстанавливать желаемое управление $U_{\text{des}} \equiv U$. КД для *задачи синтеза регулятора* приведена на рис. 3 и построена относительно тождественного изоморфизма

$$e_U: U \to U_{\text{des}}, e_U^{-1}: U_{\text{des}} \to U.$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "e_U"] \arrow[dr, "G"'] & & U_{\text{des}} \\ & X_{\text{des}} \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

Рис. 3. Коммутативная диаграмма к задаче синтеза регулятора

На рис. 3 стрелка G есть модель ОУ в операторной форме:

$$(pX - AX) = BU \Rightarrow X = (pI - A)^{-1}BU = \Phi BU,$$

$$G = (pI - A)^{-1}B = \Phi B \Rightarrow X = GU.$$

Здесь I– единичная матрица, Ф – фундаментальная матрица. В соответствии *с целью синтеза* регулятора $e_U \equiv I_m$, где I_m – единичная матрица размера m, регулятор H должен обеспечивать обратное преобразование от X_{des} к U_{des} такое, что между Uи U_{des}должен существовать изоморфизм, то есть композиция $e_U = HG$ отображений $G: U \to X$и $H: X \to U$должна быть изоморфным отображением в обычном смысле. КД на рис. 3 формализует *систему синтеза регулятора*. При этом под отображением Gможно понимать модель объекта и более общего вида, например, нелинейного. Итак, нужно найти регулятор H, который отвечал бы композиции

$$e_U = HG$$

и проверочной системе уравнений

$$e_U^{left} = G^{-1}G = e_U^{right} = HH^{-1} = HG = e_U = I_m, e_U = e_U^{-1}, e_U e_U = e_U,$$

$$e_X^{left} = GG^{-1} = e_X^{right} = H^{-1}H = GH = e_X, e_X = e_X^{-1}, e_X e_X = e_X,$$

следующей из КД и теоремы о реализации, где e_X– единица на X, *не обязательно являющаяся единичной матрицей*. Как видно из рис. 3,

$$G^{-1} = e_U^{-1}H = e_U H = H,$$

$$H = e_U G^{-1} = G^{-1}, H^{-1} = Ge_U^{-1} = G.$$

То есть *для решения задачи о регуляторе нужно найти матрицу*$H = G^{-1}$, *обратную к передаточной матрице объекта*, с точностью до *единственного класса*, отвечающего изоморфизму$e_U \equiv I_m$. *Существование такого регулятора*, удовлетворяющего рассмотренным условиям в силу модели объекта, *будет означать*, *во-первых*, *что объект управляем и*, *во-вторых*, *что задача синтеза регулятора решена*. Понятно, что условие для определения $H = G^{-1}$ имеет вид равенства

$$G^{-1}G = e_U = I_m.$$

Если оно разрешимо относительно G^{-1}, то объект управляем, то есть это равенство есть записанное в общем виде *условие управляемости многомерных, многосвязных MIMO-систем*, необязательно линейных. *Критерий управляемости одновременно позволяет определить и структуру регулятора*. Регулятор, как видно из рис. 3, замыкает в системе управления ОС. То есть *ОС в форме изоморфного регулятора является необходимой и достаточной для управляемости объекта*, имеет в рамках ОПИ строгое обоснование, понятную причину возникновения и детерминированную форму реализации. В [14] приведены примеры синтеза изоморфных регуляторов и показано, что в задачах идентификации и синтеза наблюдателей, как и при синтезе регуляторов, *можно работать не с изоморфизмами-моделями ОУ, а с изоморфизмами-*

целями идентификации, управления и наблюдения. Модели самих объектов могут быть неизоморфными и нелинейными.

3. Заключение

В целом сформированная на основе ОПИ алгебраическая теория управления динамическими системами, по сути, обобщает классическую теорию автоматического регулирования на системы весьма общего вида, позволяя работать с ними, как с линейными системами. Практическая значимость теории проиллюстрирована на примере решения фундаментальной задачи о синтезе регулятора.

Список литературы

1. Калман Р.Е. Идентификация систем с шумами // УМН. 1985. Т. 40. Вып.4 (244). С. 27-41.
2. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
3. Kalman R.E. On the General Theory of Control Systems // IFAC Proc. Vol. 1960. Vol. 1, No. 1. P. 491-502.
4. Sain M.K. The growing algebraic presence in systems engineering: An introduction. Proc. IEEE. 1976. Vol 64. P. 96-111.
5. Месарович М., Такахара Я. Общая теория систем: математические основы. М.: Мир, 1978.
6. Уонэм М. Линейные многомерные системы управления. М.: Наука, 1980.
7. Bukov V.N., Kulabukhov V.S., Maksimenko I.M., Ryabchenko V.N. Uniqueness of solutions of problems of the theory of systems // Automation and Remote Control. 1997. Vol. 58. No. 12, Part 1. P. 1875-1885.
8. Буков В.Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во научн. литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006. 720 с.
9. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016.
10. Кулабухов В.С. Принцип изоморфности в теории систем // Международная конференция по проблемам управления (29 июня-2июля 1999 г.). Тезисы докладов в 3-х томах. Том 1. ИПУ РАН. Москва. 1999.
11. Кулабухов В.С. Принцип изоморфности в задаче реализации и его приложения к анализу свойств систем управления // XII Всероссийск. совещ. по проблемам управления ВСПУ-2014. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. С. 438-448.
12. Кулабухов В.С. Общий принцип изоморфизма в теории систем // Cloud of Science. 2018. Vol. 5, No. 3. P. 400-472.
13. Kulabukhov V.S. A General Principle of Isomorphism: Determining Inverses // Symmetry. 2019. Vol. 11, No. 10. P. 1301. doi: 10.3390/sym11101301.
14. Кулабухов В.С. Общий принцип изоморфизма: алгебраическая теория систем. М.: Мир науки, 2023. – Сетевое издание. Режим доступа: https://izd-mn.com/PDF/32MNNPM23.pdf.
15. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Основы алгебры. М.: Физматлит, 1994.