УДК 681.51.01

КВАЛИМЕТРИЯ КАУЗАЛЬНОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ

А.М. Малышенко
Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Россия, 634050, Томск, пр. Ленина, 30
E-mail: mam@tpu.ru

Ключевые слова: управляемые объекты и системы, каузальность, квалиметрия, индексы каузальности, диграф системы, матрицы смежности и достижимости, структура вход-выходных отображений, схемотехнические решения, идентификация, функциональная воспроизводимость.

Аннотация: Определено применяемое в теории систем понятие каузальности – одного из фундаментальных свойств объектов физического мира. Приведены предложенные для характеризации каузальности квалиметрические меры, в том числе введенные автором индексы каузальности. Описаны способы определения этих индексов для многомерных по входу и выходу линейных непрерывных и дискретных систем по их математической модели в форме «вход-состояние-выход» с использованием составленных по ней диграфу системы или матрицам смежности и достижимости, а также с помощью разработанного программного комплекса для ЭВМ. Показана применимость индексов каузальности объектов и систем при решении задач идентификации, схемотехнического проектирования систем автоматического управления, при оценке их функциональной воспроизводимости.

1. Введение

Цель доклада – донести до участников конференции, прежде всего, специалистов, занимающихся развитием теории автоматического управления, исследованиями и/или разработкой объектов и систем автоматического управления, сведения о каузальности – одном из фундаментальных понятий в философии и теории систем и ее квалиметрии.

Каузальность (лат. – *causalis*, англ. – *causality*) – свойство, отражающее причинность (взаимообусловленность) событий во времени, причинно-следственные связи. В управляемых объектах и системах каузальность отражает вход-выходную взаимообусловленность и в некоторой мере инерционность процессов.

Как одно из необходимых и базовых понятий в общей теории систем она признана, вероятно, после выхода в свет [1]. Ныне каузальность стала объектом изучения и практического приложения не только при решении теоретических и практических задач автоматического управления, но и в приложениях к другим непрерывным и дискретным вход-выходным объектам и системам, а также в экономике, логистике, при обработке больших данных.

В виду большого разнообразия вход-выходных динамических систем их в [2] делят на ***строго каузальные***, ***каузальные*** и ***антикаузальные,*** в [3] – на ***строго каузальные, каузальные*** и ***некаузальные*** (в данной публикации автор придерживается второго из этих вариантов). Строго каузальные и каузальные согласно [2, 3] системы определены в [4], соответственно, как ***каузальные*** и ***бикаузальные,*** а в [5] – ***строго собственные*** и ***собственные***.

Свойство **каузальность** характеризует распространение сигналов от входа к выходу системы, присущее любой системе, обладающей инерционностью и/или чистым запаздыванием. В этой связи некаузальными вход-выходными системами, следует считать системы, не обладающие указанными выше свойствами.

Принадлежность объекта или системы к классу строго каузальных или каузальных легко устанавливается по их математической модели вида «вход-состояние-выход»

(1) $$\sigma\,\mathbf{x}(t) = \mathbf{g}\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\big);\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\big),$$

где $x \in R^n$, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$ и $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^p$ – соответственно, векторы состояния, входа и выхода; $\sigma\,x(t)$ означает для непрерывных систем первую производную по времени от $\mathbf{x}(t)$, а для систем с дискретным относительным временем t – это $\mathbf{x}(t+1)$.

Описываемые моделью (1) объекты и системы следует считать строго каузальными, когда их уравнение выхода представлено в виде $\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}\big(\mathbf{x}(t)\big)$, т.е. нет алгебраической связи между входом $\mathbf{u}(t)$ и выходом $\mathbf{y}(t)$. Если же такая связь имеется, то они относятся к классу каузальных. Это означает, что в строго каузальной системе каналы связи между каждым входным воздействием из $\mathbf{u}(t)$ и всеми составляющими $\mathbf{y}(t)$ обладают инерционностью и/или чистым запаздыванием.

2. Квалиметрия каузальности вход-выходных динамических систем

Публикации, касающиеся каузальности, в большинстве своем указывают на наличие или ее отсутствие у описываемых объектов и систем. Но есть и публикации, содержащие характеризующие ее количественные оценки. Например, в [5] для динамических дискретных во времени систем с одним входом и одним выходом введено понятие «характеристическое число системы», под которым понимается момент времени t, в который начинает изменяться выход системы при входном воздействии, начавшемся в момент $t = 0$.

Для многомерных по входу и выходу непрерывных систем, вход-выходные отображения в которых описываются моделью

(2) $$\sigma\,\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\,\mathbf{f}(t), \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}\,\mathbf{f}(t)$$

с теми же, что в (1), условными обозначениями, и дополнительно содержащей составляющие, которые учитывают реакцию системы на внешние возмущающие воздействия $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^q$, в [6] использованы показатели «***дифференциальная степень системы***» и «***дифференциальная степень системы относительно каждой выходной переменной*** $y_i(t), i \in \overline{1,p}$». При этом первый из этих показателей определяется как сумма всех вторых, а те в свою очередь равны «минимальной степени N, при которой нарушается условие $c_i\mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B} \equiv 0$, где c_i – i-я строка матрицы $\mathbf{C}$».

Таким же способом определяемый, как и указанная выше дифференциальная степень системы, показатель для линейных и нелинейных систем в [7] назван «***относительным порядком системы***».

Каузальность правомерно отнести к группе уже хорошо известных свойств управляемости, наблюдаемости, восстанавливаемости и достижимости (УНВД) вход-выходных управляемых систем, так как все они фактически характеризуют структурные и динамические свойства таких систем. Все эти свойства оцениваются по их вход-выходным математическим моделям, причем оценка свойств УНВД ведется не только по ранговым критериям их выполнимости, но и с использованием индексов УНВД. В этой связи автор в [8] предложил для квалиметрии каузальности использовать подобную меру – ***индексы каузальности*** со следующими их определениями.

Для дискретной системы с моделью (1) или (2) и начальным состоянием

(3) $$\mathbf{x}(0) = 0;\ \mathbf{y}(0) = 0$$

индекс каузальности k_{ij}^{u} ***системы по выходу*** $y_i, i \in \overline{1,p}$ ***и входу*** $u_j, j \in \overline{1,m}$ – это наименьшее целое t, для которого при начальном состоянии (3)

$$\frac{\partial}{\partial u_j}(\mathbf{h}_i \circ \mathbf{g}^t) \neq 0.$$

При этом приняты следующие обозначения и допущения: $h_i(\cdot)$ – i-я строка вектор-функции $\mathbf{h}(\cdot)$; вектор-функции $\mathbf{g}: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$; $\mathbf{h}: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ – гладкие, удовлетворяющие условиям $\mathbf{g}(0{,}0) = 0, \mathbf{h}(0{,}0) = 0; \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0); \mathbf{u}_\nu = \mathbf{u}(\nu)$;

$$\mathbf{g}^\nu = \mathbf{g}(\mathbf{g}(\ldots(\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0), \mathbf{u}_1), \mathbf{u}_2), \ldots), \mathbf{u}_{\nu-1}),$$

а $\mathbf{h} \circ \mathbf{g}^\nu$ – вход-выходное отображение системы на интервале $0 \le t \le \nu$.

Индекс каузальности k_i^u рассматриваемой системы по выходу y_i от всего входа – это наименьшее целое t, для которого при начальном состоянии (3) $\nabla^u(\mathbf{h}_i \circ \mathbf{g}^t) \neq 0$. Здесь и далее $\nabla^\mu(T)$ означает градиент T по μ. Наконец, индекс каузальности k_c рассматриваемой системы по управлению – это наименьшее целое t, для которого при начальном состоянии (3) $\nabla^u(\mathbf{h} \circ \mathbf{g}^t) \neq 0$.

При таком определении каузальность рассматриваемых систем характеризуется матрицей индексов каузальности $\mathbf{K}^u = \left[k_{ij}^u\right]_{pm}$. При этом индекс каузальности системы по выходу y_i определяется как $k_i^u = \min\left\{k_{ij}^u : j \in \overline{1,m}\right\}$, а системы в целом – как $k^u = \min\left\{k_{ij}^u : i \in \overline{1,p}, j \in \overline{1,m}\right\}$.

Если у объекта управления $k_{ij}^u = 0$, то это значит, что его выходная переменная y_i начинает меняться одновременно с началом изменения $u_j, j \in \overline{1,m}$, т. е. между ними существует безынерционный канал связи. Когда управление u_jне влияет на y_i, считаем, что индекс каузальности $k_{ij}^u = \infty$. Для системы с моделью вида (2) и непрерывным временем t индекс каузальности по входу u_jи выходу y_i определяет минимально возможный порядок $\alpha \ge 0$ отличной от нуля в момент $t = 0_+$ производной $y_j^{(\alpha)}(t)$ реакции системы на управление $u_j(t)$ при условии (3).

Следует иметь в виду, что для полной характеристики каузальности многомерных по входу и/или выходу объектов и систем с вход-выходными моделями (2) следует определять не только указанную выше матрицу индексов каузальности $\mathbf{K}^u$по вектору входных управляющих воздействий, но и аналогичным образом вычисленную матрицу каузальности $\mathbf{K}^f$ по возмущениям $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^q$.

3. Определение индексов каузальности вход-выходных линейных динамических объектов и систем

Индексы каузальности (ИК) можно определить либо по диграфу анализируемой системы, либо по ее матрицам смежности и достижимости [8]. При относительно невысоком порядке линейной многомерной системы с моделью вход-выходных отображений (2) они более просто вычисляются по диграфу системы, т.е. ориентированному графу, вершинами которого являются переменные, входящие в векторы состояния $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, входа $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$и выхода $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^p$ системы.

Дуги в этом диграфе определяются по скелетным матрицам $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{D}}$, которые получаются заменой на единицы всех ненулевых элементов (вне зависимости от их знака) в матрицах $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ модели (2). Дуги-петли при вершинах в диграфе не указываются. При этом элементу $\bar{a}_{ij} = 1$ матрицы $\bar{\mathbf{A}}$ соответствует в диграфе дуга, выходящая из вершины x_j в вершину $x_i (i, j \in \overline{1,n})$, элементу $\bar{b}_{ij} = 1$ матрицы $\bar{\mathbf{B}}$ – дуга из $u_j, j \in \overline{1,m}$ в $x_i, i \in \overline{1,n}$. Нулевые элементы матриц $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{D}}$ указывают на то, что в диграфе отсутствуют дуги между соответствующими этим элементам вершинами.

По диграфу системы (2) ее индекс каузальности между u_j и y_i определяется как уменьшенное на единицу число дуг в маршруте наименьшей длины между ними.

При вычислении индексов каузальности для систем с вход-выходной моделью (2) по ***матрицам достижимости*** вначале формируется ***матрица смежности*** системы, представляющая собой матрицу размера $\alpha \times \alpha$, где $\alpha = n + m + p$, и имеющая вид:

(4) $$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_{nn} & \overline{\mathbf{B}}_{nm} & \mathbf{0}_{np} \\ \mathbf{0}_{mn} & \mathbf{I}_{mm} & \mathbf{0}_{mp} \\ \overline{\mathbf{C}}_{pn} & \overline{\mathbf{D}}_{pm} & \mathbf{I}_{pp} \end{bmatrix}.$$

Индексы в (4) указывают на размерность соответствующих блочных матриц. Если в (2) $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, то вместо матрицы $\overline{\mathbf{D}}_{pm}$ в (4) вводится нуль-матрица $\mathbf{0}_{pm}$.

Матрицы достижимости $\mathbf{S}N, N = 1,2,3,\ldots,n$ для рассматриваемого класса систем определяются по (5 *а*), после их преобразования к виду (5 *б*):

(5) $$а)\ \mathbf{S}N \triangleq \left[s_{i\,j}\right]_{\alpha\alpha} = ((\mathbf{I}_\alpha + \mathbf{E})^N)^* = ((\mathbf{S}1)^N)^*,$$

$$б)\ \mathbf{S}N = \begin{bmatrix} \mathbf{S}N_{nn} & \mathbf{S}N_{nm} & \mathbf{0}_{np} \\ \mathbf{0}_{mn} & \mathbf{I}_{mm} & \mathbf{0}_{mp} \\ \mathbf{S}N_{pn} & \mathbf{S}N_{pm} & \mathbf{I}_{pp} \end{bmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{I}_\alpha$ – единичная $\alpha \times \alpha$ матрица, а символ «*» означает, что соответствующие преобразования выполняются по правилам булевой алгебры. При этом, если в $\mathbf{S}N$ элемент $s_{i\,j} = 1$, то это означает, что от вершины V_j к вершине V_i имеется минимум один маршрут длины N, т. е. состоящий из Nдуг. При $s_{i\,j} = 0$ такие маршруты отсутствуют.

Индексы каузальности системы в таком случае определяются по блочным матрицам $\mathbf{S}N_{pm}, N \in \overline{1,n}$. В частности, индекс каузальности системы по входу u_j и выходу y_i определяется как $k_{i\,j} = q - 1$, где q – наименьшая степень в $\mathbf{S}N = ((\mathbf{S}1)^q)^*$, при которой в матрице $\mathbf{S}N_{pm}(i,j)$-ый элемент равен единице. Индексом каузальности k_i системы по выходу y_i будет уменьшенное на единицу значение q, при котором в -й строке $\mathbf{S}N_{pm}$впервые появится отличный от нуля элемент, а индексом каузальности всей системы в целом – уменьшенное на единицу значение q, при котором в $\mathbf{S}N_{pm}$ впервые появится отличный от нуля элемент. Если же во всем множестве $\mathbf{S}N_{pm}, N \in \overline{1,n}$ какой-либо (i,j)-ый элемент остается равным нулю, то это означает, что любое изменение входного воздействия u_j не приводит к изменениям выходной переменной y_i системы. В таком случае соответствующий этой вход-выходной связи индекс каузальности следует принять равным бесконечности.

Процедуру определения индексов каузальности по матрицам смежности и достижимости можно запрограммировать и вести на ЭВМ [9].

4. Заключение

Полученные матрицы каузальности $\mathbf{K}^u$и $\mathbf{K}^f$отражают структуру внутренних взаимосвязей между, соответственно, входами $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{f}(t)$ и выходом $\mathbf{y}(t)$. Причем, числовое значение индекса каузальности ИК по каждому внутреннему каналу связи в системе, если ее модель дискретна по времени, определяет число тактов запаздывания выходного сигнала от входного по этому каналу. Если же описываемая система непрерывного типа, то численное значение ИК в этом канале определяет порядок производной выходного сигнала, которая начинает меняться одновременно с началом изменения входного сигнала.

Знание индексов каузальности объектов управления позволяет более эффективно решать задачи структурной идентификации их вход-выходных отображений, способствует выбору наиболее эффективных схемотехнических решений систем управления для них, оценивать функциональную воспроизводимость этих систем.

Список литературы

1. Youla D.C., Carlin H.L., Castriota L.J. Bounded Real Scattering Matrices and the Foundations of Linear Passive Network Theory // IRE Trans. Circuit Theory. 1959. Vol. CT-6. P. 102-124.
2. DeSantis R.M. Causality, Strict Causality and Invertibility for Systems in Hilbert Resolution Space // SIAM J. Control. 1974. Vol. 12, No 3. P. 536-553.
3. Commault C., Lafay J.F., Malabre M. Structure of linear systems. Geometric and transfer matrix approaches // Kybernetika. 1991. Vol. 27, No. 3. P. 170-185.
4. Rao S.K., Chen C.-T. Design of minimal-degree compensators with assignable poles or structure // Automatica. 1987. Vol. 23, No. 2. P. 241-245.
5. Lee H.G., Aropostathis A., Mareus S.I. Linearisation of discrete-time systems // Int. J. Control. 1987. Vol. 45, No. 5. P. 1803-1822.
6. Roppenecker G., Lohmann B. Vollstandige Modale Synthese von Entkopplungsregelungen // Automatisierungstechnik. 1988. Vol. 36, No. 11. S. 434-441.
7. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления. М.: Наука. 1985. 296 с.
8. Малышенко А.М. Определение индексов каузальности управляемых динамических систем // Изв. АН СССР, Техническая кибернетика. 1990. № 1. С. 32–36.
9. Малышенко А.М., Рыбаков Е.А., Кочеткова Е.А. Программное обеспечение для определения индексов каузальности линейных вход-выходных динамических систем // Автоматика и программная инженерия. 2014. № 1(7). С. 40-50.