УДК 004.925.8

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ВОКСЕЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЪЕКТОВ СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИИ ЗАДАННЫХ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛЬЮ

А.П. Патрушева
Московский государственный технологический университет «Станкин»
Россия, 127055, Москва, Вадковский переулок, 1
E-mail: patrushewaalina@yandex.ru

А.В. Толок
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: tolok_61@mail.ru

Ключевые слова: функционально-воксельный метод, интегральные уравнения, локальная функция, локальные геометрические характеристики.

Аннотация: В статье рассматривается потенциал применения функционально-воксельного метода (ФВМ) к решению различных задач, связанных с интегральными вычислениями, а также предлагается, как еще один метод аппроксимации уравнений со сложным или не выраженным аналитическим выражением. В случае интегрирования это в первую очередь задачи на определения площадей и объемов для объектов сложной формы. Сам метод описывает не только функцию, но и ее внешнюю и внутреннюю области на некоторой области определения, где описывается геометрический объект, определяются локальные геометрические характеристики, составляющие локальную геометрическую модель. Для расчета этих характеристик используются графические образы. Рассмотрено применение данного метода в нахождении производной и первообразной. Также показан способ определения площади круга через двойной интеграл.

1. Введение

В реальном мире геометрические модели часто описывают интегральными уравнениями, с помощью которых ищут различные площади, объемы и другие характеристики различных объектов. При этом для уравнений в неявном или сложном виде используют различные виды аппроксимации, такие как численное интегрирование и дифференцирование и др. Сложная геометрия модели требует разработки специальных алгоритмов разбиения на более простые элементы, поддающиеся интегрированию. Применение функционально - воксельных моделей позволяет уйти от таких проблем и интегрировать модель с высоким разрешением в многомерном пространстве [1]. Данный метод нашел свое применение во многих работах [2-4], где раскрыты его возможности.

2. Функционально-воксельное моделирование

Функционально-воксельный метод (далее ФВМ) предлагается как еще один метод аппроксимации функции для таких задач, где уравнение имеет сложное аналитическое выражение или оно не выражено, потому что основным свойством воксельного пространства является регулярность и непрерывность области рассматриваемых точек [1].

Построение ФВМ основано на принципах линейной аппроксимации пространства функции для вычисления его локальных геометрических характеристик [1].

Эти локальные геометрические характеристики для любой функции $f(x_1, \dots, x_m)$ можно представить как графический образ-модель этой функции или М-образ, который соразмерен области этих характеристик и отображающий одну из них. Данные образы в компьютерном представлении можно определить как некоторое последовательно организованное пространство точек, определяемых целочисленными координатами и содержащих целочисленные высотные значения, соответствующие компьютерной градации палитры одного из трех основных цветов (красный, зеленый, синий).

Растровую и воксельную структуры математически можно отнести к единому целочисленному представлению скалярного поля, следовательно, можно разложить аналитически заданное функциональное пространство в набор скалярных полей, приводимых в соответствии с воксельной структурой, т.е. получение графических образов скалярных полей функционального пространства. При этом пространство функции должно быть взято увеличенной размерности и воксельный графический образ должен иметь ту же размерность.

Процесс формирования М-образа в m-мерном пространстве строится на нескольких локальных геометрических характеристиках - компонентах нормали $N(n_x, \dots, n_m)$ к касательной плоскости для каждой точки (вокселя) поверхности функции (пространства) (рис. 1). Такая касательная плоскость определяется точками в массиве: $P_1(x_1, \dots, x_m)$, … $P_m(x_1, \dots, x_m)$, для каждой из которых определяется свое значение функции $\frac{n_1}{n_m}, \cdots, \frac{n_{m+1}}{n_m}$.

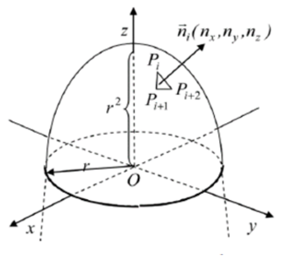

Рис. 1. Определение геометрических характеристик для некой трехмерной функции.

Уравнение плоскости $n_1x_1 + \cdots + n_mx_m = 0$ по заданным точкам в пространстве, формирует матрицу

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_m & 1 \\ x_1^1 & \cdots & x_m^1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^m & \cdots & x_m^m & 1 \end{vmatrix} = n_1x_1 + \cdots + n_mx_m + n_{m+1} = 0,$$

где x_i^j $-i$-я координата j-го узла сегмента аппроксимационной сетки. В результате разложения матрицы получаем коэффициенты $(n_1, \dots, n_{m+1})$ для полученного уравнения плоскости с увеличенной размерностью (1).

Все полученные коэффициенты касательной плоскости нормируются к косинусным компонентам нормали для выбранной окрестности точки нормального поля $N(n_x, \dots, n_m, n_{m+1})$:

$$n_i = \frac{n_i}{\sqrt{{n_1}^2 + \cdots + {n_{m+1}}^2}}$$

Монохромное отображение для каждой локальной характеристики можно представить ее нормированием и приведением к соответствию цветовой палитре$P = [0; 255]$. Тон палитры определяет растровое представление нормали, которые выражаются следующим образом в общем виде:

$$M_i = \frac{P(1 + n_i)}{2},$$

где i – номер оси функционального пространства.

Обратными преобразованиями можно прийти от графического представления к аналитической форме.

3. Дифференцирование и интегрирование в функционально-воксельном моделировании

В основе ФВМ модели уже лежат принципы дифференцирования, как поиска ориентации в пространстве минимальной площадки в каждой точке заданной области функции и локальная характеристика является, в том числе и дифференциальной. Прежде чем приступить к интегральному исчислению, необходимо разобраться с дифференциальным вычислением, поскольку одна операция находит производную функции, а другая первообразную.

В работе [5] рассматриваются основные принципы дифференцирования и интегрирования средствами ФВМ, где показан переход от М-образов частных производных к М-образам первообразных и обратно.

Данные преобразования следуют из утверждения, что любая локальная функция $n_1 x_1 + \ldots + n_m x_m = 0$ в явном выражении одного из аргументов является дифференциальной составляющей первого порядка

$$x_i = -\frac{\partial x_i}{\partial x_1} x_1 - \cdots - \frac{\partial x_i}{\partial x_{i-1}} x_{i-1} - \frac{\partial x_i}{\partial x_{i+1}} x_{i+1} \cdots - \frac{\partial x_i}{\partial x_{m-1}} x_{m-1} - \frac{\partial x_i}{\partial x_m}$$

в любой точке на заданной области пространства $x \in X^m$.

Так как нормаль в точке перпендикулярна к касательной, то

(2) $$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \frac{n_i}{n_j}.$$

На рис. 2 представлено V-представление некоторой исходной функции $f(x, y, z)$, а на рис. 3 и рис. 4 V-представление ее частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

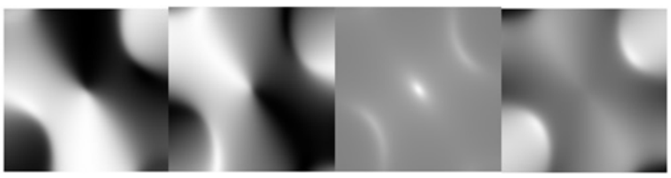

Рис. 2. Операторы M_1, M_2, M_3, M_4V-представления некоторой исходной функции $f(x, y, z)$.

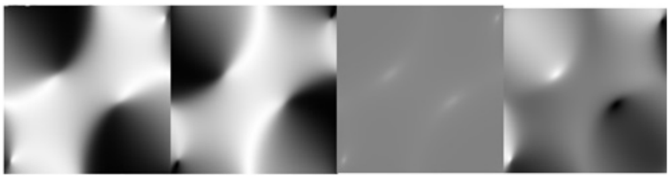

Рис. 3. Операторы M_1, M_2, M_3, M_4V-представления частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ функции $f(x, y, z)$.

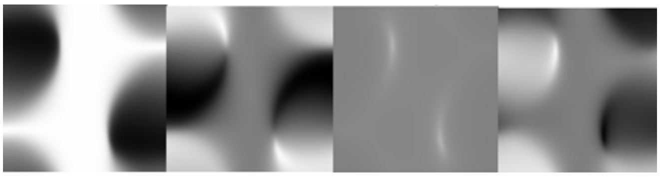

Рис. 4. Операторы M_1, M_2, M_3, M_4V-представления частной производной $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $f(x, y, z)$.

Чтобы найти частные производные из исходного уравнения необходимо в матрице (1), вместо координат значения z, использовать формулу (2). В результате получим М-образы, такие же, как на рис. 3 и Рис. 4. Аналогично можно находить производные более высокого порядка.

В случае же нахождения первообразной по известным частным производным всегда известен коэффициент касательной n_m, на основе которого (и значений частных производных) можно найти предыдущие коэффициенты $n_1 \cdots n_{m-1}$.

Для нахождения полного уравнения достаточно иметь одно значение z искомой функции, на основе которого получим недостающий коэффициент. Далее можем определить все значения z для оставшихся узлов аппроксимационной сетки. В результате получится результат, как на рис. 2.

В работе [6] показан подход к решению задачи Коши методом ФВМ для линейного уравнения в частных производных первого порядка. Здесь сразу известен коэффициент касательной n_m. На основе первоначальных условий вычисляется одна из производных, а на ее основе другая производная. Далее на основе вычисленных коэффициентов строятся М-образы решения дифференциального уравнения.

Интегрирование – это нахождение первообразной, которое заключается в вычислении неопределенного интеграла. Большинство численных методов интегрирования основаны на замене подынтегральной функции более простой, с точки зрения вычислений. Минус данного подхода в том, что результатом является значение функции в узлах аппроксимации, в отличии ФВМ, где результат – это локальная функция в каждой точке.

В работах [1] представлено определения площади единичной окружности (3) и на ее основе далее выводится общий случай интегрирования нахождения площади (рис.5).

(3) $$S_{circle} = \int_{-R}^{R} \int_{\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} (R^2 - x^2 - y^2) dxdy \approx \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \frac{\frac{R^2-x^2-y^2}{|R^2-x^2-y^2|}+1}{2} S_x S_y,$$

где R −радиус окружности равный 1, $m \times n$ −двумерная целочисленная область воксельного пространства, i, j − координаты узла аппроксимационной сетки, $S_x S_y$ − площадь, образуемая дискретным шагом сетки.

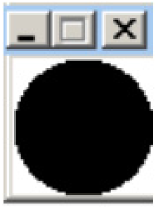

Рис. 5. Изображение единичной окружности, полученное в системе РАНОК 2D на основе формулы (3).

4. Заключение

Основное преимущество ФВМ заключается в существенном увеличении информативности компьютерной модели за счет увеличения размерности пространства алгебраической функции. Это позволяет упростить выполнение операций, таких как дифференцирование и интегрирование алгебраической функции, за счет чего он предлагается как еще один численный метод интегрирования и дифференцирования.

В дальнейшем предполагается нахождение общего алгоритма решения более сложных интегральных функций и применение ФВМ в решении различных интегральных физических задач.

Список литературы

1. Толок А.В. Локальная компьютерная геометрия. М.: Ай Пи Ар Медиа, 2022. 147 с.
2. Сычева А.А., Плаксин А.М. Функционально-воксельное моделирование траектории движения инструмента при фрезеровании карманной области // Труды Международной конференции по компьютерной графике и зрению «Графикон». 2022. № 32. С. 892-898.
3. Локтев М.А. Особенности применения функционально-воксельного моделирования в задачах поиска пути с препятствиями // Информационные технологии в проектировании и производстве. 2016. № 1 (161). С. 45-49.
4. Плаксин А. М., Пушкарев С. А. Геометрическое моделирование тепловых характеристик объектов функционально-воксельным методом // Геометрия и графика. 2020. Т. 8, № 1. С. 25-32.
5. Толок А.В., Толок Н.Б. Дифференцирование и интегрирование в функционально-воксельном моделировании // Проблемы управления. 2022. № 5. С. 60-67.
6. Толок А.В., Толок Н.Б. Применение функционально-воксельного метода для решения линейного уравнения в частных производных первого порядка с заданными начальными условиями // Проблемы управления. 2023. № 6. С. 76-83.